

建物の基本的動特性に対する同定手法の検討

A Study on Identification Method

for Basic Dynamic Characteristics of the Buildings

河井 雄登¹⁾ 末崎 和宏²⁾ 吉田 長行²⁾
Yuto Kawai, Kazuhiro Suezaki and Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻

²⁾ 法政大学デザイン工学部建築学科

The structural model should be constructed with high accuracy for exactly redesigning the earthquake resistance ability of old buildings. For this, the procedures for identifying the basic characteristic of the building such as natural frequencies and damping factors are intensively required nowadays. This could be done by measuring the vibration of buildings caused by microtremors of the ground and identifying the vibrational characteristics of buildings. In this study it is investigated whether these dynamic characteristics could be extracted from observed data on small vibration by using MOESP method that is the basic method in subspace identification methods.

Keywords : Microtremor, MOESP, Subspace identification

1. はじめに

既存建物に対する耐震診断と適切な耐震補強は喫緊の課題である。その際、建物の構造強度を構造モデルとして適切に評価することが耐震補強を有効にする上での重要な前提となる。一般には設計図書や現場試験による算定、旧耐震規定に則った推定などが構造モデル作成時の手がかりとなる。耐震補強設計はこの構造モデルに試行的な構造修正を加えて耐震解析を実施しその有効性を検討する繰り返しプロセスの中で進行する。このため、補強設計の基点となる構造モデルは何らかの構造指標によってその妥当性が検証されていなければならない。更には、耐震補強の効果が施工後、確かに実現されたかの検証も必要となる。これらの検証を可能にする一つの方法として、常時微動観測を通じた構造特性指標の同定検証が挙げられる。

本研究は微動観測データから構造特性指標として代表的な固有周期と減衰定数を抽出する精度の高い

同定手法の可能性を探ったものである。近年、システム制御理論の分野で研究が盛んな部分空間システム同定法に着目し、その代表的な手法である MOESP 法をこの問題に適用する場合の定式化とその有効性を検討している。

2. 振動方程式と状態方程式・出力方程式

1 質点系モデル化された構造物が地震動の加速度入力 $\ddot{z}_0(t)$ を受けるとする。これを振動方程式で表すと、

$$m\ddot{z}(t) + d\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{z}_0(t) \quad (1)$$

となる。ここで、 $z(t)$ は質点の水平変位である。

これを 1 階の微分方程式に書き換えると、

$$\{\dot{x}(t)\} = [A^*]\{x(t)\} + [B^*]\ddot{z}_0(t) \quad (2)$$

ここで

$$\begin{aligned} [A^*] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix} \\ [B^*] &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \{x(t)\} &= \begin{cases} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$\{x(t)\}$ は状態変数とよばれ、これによって記述された式(2)を状態方程式という。状態変数は観測装置を通してなんらかの出力量 $\{y(t)\}$ として計測される。例えば、絶対加速度 $\ddot{x}(t) + \ddot{z}_0(t)$ が出力量の場合は、式(1)より

$$\begin{aligned} y(t) &= [C]x(t) \\ [C] &= \begin{bmatrix} -k & -d \\ -m & -m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。上式を出力方程式とよぶ。

連続時間 t で表された状態方程式を離散時間表現すると、

$$\{x(k+1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\ddot{z}_0(k) \quad (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [A] &= e^{[A^*]\Delta t} \\ [B] &= \int_0^{\Delta t} e^{[A^*]\tau} d\tau \cdot [B^*] \end{aligned} \quad (6)$$

マトリクス A^* が正則なら、この積分値は次のようになる。

$$\begin{aligned} [B] &= [A^*]^{-1}(e^{[A^*]\Delta t} - [I])[B^*] \\ &= (e^{[A^*]\Delta t} - [I])[A^*]^{-1}[B^*] \end{aligned} \quad (7)$$

出力方程式も離散時間表現すると、以下のようになる。

$$y(k) = [C]\{x(k)\} \quad (8)$$

式(5)と式(8)からなるこのような入出力システムを線形時不変システムとよぶ^[1]。

3. 固有値

マトリクス $[A^*]$ の固有値問題は、 $[A^*]$ の固有値を λ^* 、固有ベクトルを $\{x^*\}$ とすると次のように書ける。

$$[A^*]\{x^*\} = \lambda^*\{x^*\} \quad (9)$$

固有値 λ を決定するには、固有方程式

$$[[A^*] - \lambda^*[I]] = 0 \text{ を解くことになる。1 質点系では} \\ m\lambda^{*2} + d\lambda^* + k = 0 \quad (10)$$

この解は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= -\omega h + i\sqrt{1-h^2}\omega \\ \lambda_2^* &= -\omega h - i\sqrt{1-h^2}\omega \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$\text{固有円振動数} : \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\text{減衰定数} : h = \frac{d}{2\sqrt{mk}} \quad (12)$$

ところで、振動系の状態空間表現は状態の正則変換の個数だけ無限の自由度がある。すなわち、任意の正則マトリクス $[T]$ を用いて状態変数を

$$\{\hat{x}(k)\} = [T]^{-1}\{x(k)\} \quad (13)$$

のように変換すると、状態方程式と出力方程式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\hat{x}(k+1)\} &= [\hat{A}]\{\hat{x}(k)\} + [\hat{B}]\ddot{z}_0(k), \\ y(k) &= [\hat{C}]\{\hat{x}(k)\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\hat{A}] &= [T]^{-1}[A][T], \\ [\hat{B}] &= [T]^{-1}[B], \\ [\hat{C}] &= [C][T] \end{aligned} \quad (15)$$

同定問題においては、 $([A], [B], [C])$ ではなく、 $([\hat{A}], [\hat{B}], [\hat{C}])$ が同定される。

マトリクス $[\hat{A}]$ の固有値問題

$$[\hat{A}]\{\hat{x}\} = [T]^{-1}[A][T]\{\hat{x}\} = \hat{\lambda}\{\hat{x}\} \quad (16)$$

では、式(13)から

$$[A]\{x\} = \hat{\lambda}\{x\} \quad (17)$$

となる。すなわちマトリクス $[\hat{A}]$ とマトリクス $[A]$ は固有モードが異なっても、同一の固有値 $\hat{\lambda}$ を有する。このことから、入出力データの違いによってどのようなマトリクス $[\hat{A}]$ が同定されても、固有値は同一なので、算定される固有円振動数や減衰定数の値は変わらない。

4. 建物の動特性指標

建物の動特性を表す基本的な指標は固有円振動数 ω または固有周期 T と、減衰定数 h である。ここでは、これらを式(6)の第1式から求める方法を文献[2]に従って述べる。

マトリクス $[A]$ (実際には $[\hat{A}]$)はその固有値 λ_i を対角に並べた固有値マトリクス $[\Lambda]$ と固有モードの列ベクトル $\{x_i\}$ を並べた固有マトリクス $[U]$ によって、次のように表すことができる。

$$[A] = [U][\Lambda][U]^{-1} \quad (18)$$

連続時間表現された状態方程式の $[A^*]$ も同様に固有値解析することができたとすれば、

$$[A^*] = [U^*][\Lambda^*][U^*]^{-1} \quad (19)$$

と表せる。このとき、次式が成立する。

$$e^{[A^*]\Delta t} = [U^*]e^{[\Lambda^*]\Delta t}[U^*]^{-1} \quad (20)$$

式(6)の第1式より、上の式(18)と式(20)は倒置できる。

$$[U][\Lambda][U]^{-1} = [U^*]e^{[\Lambda^*]\Delta t}[U^*]^{-1} \quad (21)$$

ところで、線形時不変システムでの状態変数の固

有ベクトルは連続時間の時刻にかかわらず不変であるから、離散時間のいかなる時刻においても不変である。したがって、 $[U] \propto [U^*]$ とすることができるので、次式が得られる。

$$[\Lambda] = e^{[\Lambda^*]\Delta t}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1^* \Delta t} & \\ & e^{\lambda_2^* \Delta t} \end{bmatrix} \quad (22)$$

これより、

$$\begin{aligned} |\ln \lambda_1| &= |\lambda_1^* \Delta t| \\ &= \sqrt{\omega h + (1-h)\omega \Delta t} \\ &= \omega \Delta t \end{aligned} \quad (23)$$

$$\downarrow$$

$$\omega = \frac{|\ln \lambda_1|}{\Delta t}$$

また、

$$|\lambda_1| = |e^{\lambda_1^* \Delta t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda_1^*) \Delta t} = e^{-\omega h \Delta t} \quad (24)$$

より、

$$\begin{aligned} \ln |\lambda_1| &= -\omega h \Delta t \\ \downarrow \\ h &= -\frac{\ln |\lambda_1|}{\omega \Delta t} = -\frac{\ln |\lambda_1|}{|\ln \lambda_1|} \end{aligned} \quad (25)$$

以上から、マトリクス $[A]$ (または $[\hat{A}]$)の固有値から建物の固有円振動数と減衰定数を抽出することができる。

5. MOESP法を用いた構造の同定

式(14)の状態方程式と出力方程式に含まれる各マトリクスが未知であるとする。入出力データからこれら未知のマトリクスを推定することを同定という。近年、同定法として部分空間法が開発され、各分野で活発な研究が行われている。その中でも、基本的な方法であるMOESP法に注目し、これを利用することにより微動観測機器から得られる入出力データから建物構造を同定する方法を検討する。以下に、マトリクス $[\hat{A}]$ と $[\hat{C}]$ を同定する手順を要約して示す。

- (1) 入力データとして水平地動加速度 $u(k) = \ddot{z}_0(k)$ 、 $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ 、出力データとして建物の任意高さにおける水平絶対加速度 $y(k) = \ddot{x}(k) + \ddot{z}_0(k)$ 、 $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ がこのように各 q 個ずつ得られているとする。ここで、次のような入力データマトリクスと出力データマトリクスを定義する。

$$[U]$$

$$= \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(L-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(r-1) & u(r) & \dots & u(L+r-1) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\in R^{r \times L}$$

$$[Y]$$

$$= \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(L-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(r-1) & y(r) & \dots & y(L+r-1) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\in R^{r \cdot 1 \times L}$$

このようにデータ列を一つずつ左にずらして各行に一定個数 (L) 並べたマトリクスをハンケル・マトリクスという。 r はブロックハンケル・マトリクスのブロック行数である。ブロック1行のデータ数は時間幅 $(L-1)\Delta t$ の両端とその内点時刻にサンプリングされたデータの総数である。これがブロック行にして $r(=q-(r-1))$ 行配置されたハンケル・マトリクスが入出力データマトリクスである。このとき、 r 、 L の大きさは不定である。

- (2) ここで、入力データマトリクスと出力データマトリクスを縦に並べたデータマトリクス

$$[G] = \begin{bmatrix} [U] \\ [Y] \end{bmatrix} \in R^{(r+r \cdot 1) \times L} \quad (28)$$

を作り、次のようにLQ分解する。

$$\begin{bmatrix} [U] \\ [Y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{11}] & \cdot \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q_1] \\ [Q_2] \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで、

$$[L_{12}] \in R^{r \times r}, [L_{21}] \in R^{r \cdot 1 \times r},$$

$$[L_{22}] \in R^{r \cdot 1 \times r \cdot 1},$$

$$[Q_1] \in R^{r \times L}, [Q_2] \in R^{r \cdot 1 \times L}$$

上式右辺は、実際にはデータマトリクスの転置マトリクス $[G]^T$ をQR分解し、これを再度転置して得られる。

- (3) $[L_{22}]$ を特異値分解する

$$[L_{22}] \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} [U_n] & [\bar{U}_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Sigma_n] & \cdot \\ \cdot & [\bar{\Sigma}_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_n]^T \\ [\bar{V}_n]^T \end{bmatrix} \\
&= [U_n][\Sigma_n][V_n]^T + [\bar{U}_n][\bar{\Sigma}_n][\bar{V}_n]^T \\
&\cong [U_n][\Sigma_n][V_n]^T
\end{aligned}$$

ここで、 $[L_{22}]$ のランク(階数)が n であるなら、

$$\begin{aligned}
[\Sigma_n] &= \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \\
[\bar{\Sigma}_n] &= \text{diag}\{\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \dots, \sigma_r\} \quad (31) \\
&\quad (\sigma_j \cong 0, j \geq n+1)
\end{aligned}$$

となる。このような特異値の分布が得られた場合は、観測対象の自由度を $n=2$ と判定する(解析結果から $n=2$ と判定できる場合は、観測対象の自由度を1と推定する)。

- (4) $[U_n]$ は r 行 \times n 列のマトリクスである。その第 i 行から第 j 行まで取り出した部分マトリクスを $[i:jU_n]$ と表記すると、第1行を取り出して

$$[\hat{C}] = [1:1U_n] \quad (32)$$

とすることができる。

- (5) このとき、最終第 r 行を取り除いた $[1:r-1U_n]$ と第1行を取り除いた $[2:rU_n]$ とは次の関係

$$[1:r-1U_n][\hat{A}] = [2:rU_n] \quad (33)$$

があるので $[\hat{A}]$ は最小二乗法によって次のように求められる。

$$\begin{aligned}
[\hat{A}] &= ([1:r-1U_n]^T \quad [1:r-1U_n])^{-1} [1:r-1U_n]^T [2:rU_n] \quad (34)
\end{aligned}$$

- (6) $[\hat{A}]$ の固有値問題：式(34)、または固有方程式 $[[\hat{A}] - \lambda[I]]$ を解いて固有値 $\lambda_i (i = 1, \dots, n/2)$ を求め、各モードの固有円振動数 ω_i または固有周期 $T_i = 2\pi/\omega_i$ および減衰定数 h_i を算定する^[1]。

6. 多質点系モデルへの拡張

これまでの記述では、理解しやすいように1質点系モデルを対象とした。一般の多質点系モデルでは、式(1)が次式に代わる。

$$\begin{aligned}
[M]\{\ddot{z}\} + [D]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} &= -[M]\{1\}\ddot{z}_0 \quad (35)
\end{aligned}$$

式(3)と式(4)で示した状態方程式と出力方程式の各マトリクスやベクトルも以下のように代わる。

$$\begin{aligned}
[A^*] &= \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \\
[B^*] &= \begin{bmatrix} \{0\} \\ -\{1\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \{z(t)\} \\ \{\dot{z}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

$$[C] = [-[M]^{-1}[K] \quad -[M]^{-1}[D]] \quad (37)$$

そして、 N 質点系の場合は $n=2N$ となるが、前節までの記述はそのまま有効である。

これまでは、絶対加速度応答の観測点数 ℓ は1であるとして論じてきた。複数次 $\ell > 1$ の観測データを用いる場合では、式(27)のマトリクス内のスカラー量は以下のようにベクトル量となり、表記 $r \cdot 1$ は表記 $r \cdot \ell$ に変わる。

$$\begin{aligned}
[Y] &= \begin{bmatrix} \{y(0)\} & \{y(1)\} & \dots & \{y(L-1)\} \\ \{y(1)\} & \{y(2)\} & \dots & \{y(L)\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \{y(r-1)\} & \{y(r)\} & \dots & \{y(L+r-1)\} \end{bmatrix} \quad (38) \\
&\in R^{r \cdot \ell \times L}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\{y(k)\} = \begin{Bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_\ell(k) \end{Bmatrix} \quad (39)$$

7. 模擬微動加速度

微動は本来観測量であるが、観測量からの有意義なデータを抽出する手法の開発研究に用いるため模擬微動加速度 \ddot{z}_0 を作成する^[3]。

模擬微動を定常不規則過程とすると次のように定式化できる。

$$\ddot{y}_0(t) = g(t) \cdot \ddot{z}_0(t_j) \quad (40)$$

$$\ddot{z}_0(t_j) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2S(\omega_i)\Delta\omega}{\pi}} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (41)$$

$$j = 1, \dots, n^p$$

ここで、

$$S(\omega) = \frac{1+4h_g^2\omega^2/\omega_g^2}{(1-\omega^2/\omega_g^2)+4h_g^2\omega^2/\omega_g^2} \quad (42)$$

ω_g : 地盤の1次固有振動数

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{Upper} - \omega_{Lower}}{N} \quad (43)$$

$$1 \leq \frac{\omega}{\pi} \leq 100,$$

N : 重合個数(300程度)

$$\omega_i = \omega_L + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta\omega \quad (44)$$

$$\varphi_i : 0 \sim 2\pi \text{の一様乱数} \quad (45)$$

重合した後、加速度波形の最大値が所要の数値になるよう調整する。

変位の振幅が a の場合、加速度波形は $a(2\pi/T)^2$ となる。 $a = 1\mu m$ とし、 T を最小で $0.02s(= 2\Delta t)$ とすると、加速度振幅はおよそ $0.1m/s^2$ である。

地盤の固有周期 $T_c = 2\pi/\omega_g$ は表1によって与える。

表 1 地盤の種類と固有周期 $T_c(s)$

Table 1 Type of ground and Natural Period $T_c(s)$

第1種地盤	岩盤、硬質砂礫層、主として第3紀以前の地層など	0.4
第2種地盤	第1、3種地盤以外のもの	0.6
第3種地盤	軟弱な沖積層が30m以上のもの、または、泥沼、泥海岸を3m以上埋め立てた後30年未満のもの等	0.8

8. 解析結果

8.1 1質点モデルによる検証解析結果

単純な1質点系モデルを対象に、以上に述べたMOESP法を用いた固有周期と減衰定数の抽出手法について検討する^{[4][5][6]}。

また、式(26)(27)におけるデータマトリクス縦横比についても検討を行う。質点モデルを図.1に示す。

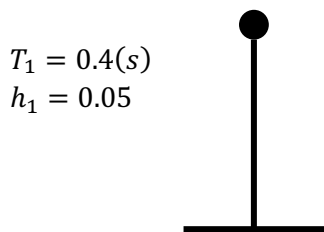


図.1 1質点系モデル

Fig.1 Single-Degree-of-Freedom Model.

表2のように、入力データ・出力データ数がそれぞれ50もあれば高い精度で固有周期と減衰定数を抽出することができた。

作成するデータマトリクスの形状は3通りで検証したが、結果に大きな差は見られなかったため、建物と地盤の入出力データ数に応じて任意で構わないと考えられる。

表 2 データマトリクスの縦横比による比較

Table 2 Comparison of the Data Matrix Aspect Ratio.

データ数/解析時間(s)	縦横比	固有周期(t)	減衰定数
作成したモデル	-	0.4	0.05
10 (0.1s)	$m \times m$	0.3209295	0.06267000
	$m \times 2m$	0.3358009	0.07902643
	$m \times 3m$	0.0028194	0.99990000
50 (0.5s)	$m \times m$	0.4007251	0.04920188
	$m \times 2m$	0.4003544	0.04943078
	$m \times 3m$	0.4000680	0.04996341
500 (5s)	$m \times m$	0.3999954	0.05000024
	$m \times 2m$	0.3999995	0.04999714
	$m \times 3m$	0.3999941	0.04999702

8.2 2質点モデル及び雑音に対する精度の検証

次に、対象建物を多質点構造物へ拡張するため、図.2のような2質点モデルでの検証を行う。また、1質点において十分な精度が確認できたため、以下のような雑音の混入を仮定し結果の比較を行う。

- ・計測器誤差・・・各時刻の加速度 $\ddot{x}(t)$ において $|\ddot{x}(t)| \times \alpha(\%)$ のノイズを加える。
- ・環境誤差・・・加速度データの最大値 $|\ddot{x}|_{max}$ の $\alpha(\%)$ を最大振幅とするホワイトノイズを加える。

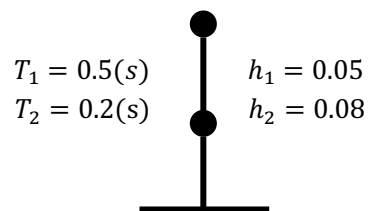


図.2 2質点系モデル

Fig.2 2-Degree-of-Freedom Model.

表 3 雑音の割合による比較

Table 3 Comparison of the Noise Ratio

導入した雑音割合 (%)	データ数/解析時間 (s)	1次モード		2次モード	
		固有周期(t)	減衰定数	固有周期(t)	減衰定数
モデル	-	0.5	0.05	0.2	0.08
なし	500(5)	0.49999849	0.04999723	0.20020135	0.07998501
1	1000(10)	0.50001824	0.05008015	0.20035986	0.07701294
5	1000(10)	0.49992202	0.04998565	0.20377790	0.06104071
10	1000(10)	0.49989092	0.05008231	0.02816362	0.00025840
	3000(30)	0.49989761	0.05029855	0.02269004	0.00121618
	6000(60)	0.49964426	0.05006224	0.52015925	0.00236592

表3に環境誤差雑音を加えた入出力データによる解析結果を示す。雑音が5%程度の場合、1000程のデータが得られていれば1次モードの固有周期と減

衰定数、2次モードの固有周期まで精度よく算出が可能であった。一方で10%を越す雑音の場合、1次モードでの精度は維持しているが、2次モードでは数値の乱れが見られた。

9. 結論

本研究では解析対象として模擬微動を受ける1質点及び2質点系モデルを作成し、部分空間システム同定法の中でも基本的な方法であるMOESP法を基に、建物の動特性を抽出する手法について検討した。

- ・入力加速度及び応答加速度から作成するデータマトリクスは形状によらず解析を行うことができる。
- ・雑音が現実的な割合で含まれる場合においても、1次モードについては精度よく抽出でき、部分空間システム同定法はその有効性を保持している。

参考文献

- [1] 大住晃, “構造物のシステム制御”, 森北出版, 2013年
- [2] 肥田剛典, 永野正行, “部分空間法に基づくシステム同定による建物の固有振動数と減衰定数の推定精度”, 日本建築学会構造系論文集, 第701号, pp.923-932, 2014.7
- [3] 柴田明德, “最新耐震構造解析”, 第3版, 第7章, 森北出版, 2014年
- [4] 川口健一, “一般逆行列と構造工学への応用”, コロナ社, 2011年
- [5] 大崎順彦, “建築振動理論”, 彰国社, 1996年
- [6] 牛島省, “数値計算のためのFortran90/95プログラミング入門”, 森北出版, 2007年