

CIP法を用いた半無限地盤モデルにおける動的解析

-2次元P・SV波面内問題-

Dynamic Analysis of the Half Infinite Ground Model by CIP Method

Two Dimensional In-Plane Wave Problems

松下 周平¹⁾ 中村 圭佑²⁾ 吉田 長行²⁾

Syuhei Matsushita, Keisuke Nakamura, Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻

²⁾ 法政大学デザイン工学部建築学科

Nonlinear dynamic behavior for the ground has been studied actively. In the nonlinear problem, The finite element method (FEM) is known as an effective and flexible method. However, this method cannot simulate the infinite ground model since it is the analysis for the finite region. Therefore, we need to make a virtual boundary on a proper position. We call it the non-reflective boundary processing. Generally, the viscous boundary is used for this processing. But, this method cannot realize the non-reflection on the virtual boundary perfectly. The CIP method is to calculate the advection equation with high precision. The CIP method is used in various fields, but almost not used in the problem of the ground. In this paper, we suggest a new boundary processing using the CIP method by decomposing the equation of motion into the advection equation.

Keywords : Elastic wave, CIP, In-plane wave, Open boundary, non-reflection

1. はじめに

近年、地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている。非線形問題を扱う場合、有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている[1]。有限要素法を用いて無限もしくは半無限地盤を表現するためには開境界処理を行う必要がある。代表的な例として、境界にダッシュポットを設ける粘性境界が挙げられる。しかしながら、完全な波動透過は実現されていない[2],[3]。

本論では、CIP法(Constrained Interpolation Profile Scheme)を用いた新たな開境界処理法の可能性を検討する。CIP法は矢部ら[4],[5]によって考案された移流方程式を解く高次精度差分法である。

本論の目的はCIP法を用いた新しい開境界処理法

のための基礎研究として、P波及びSV波を扱う面内問題における2次元弾性体波動伝播解析を行いその特性を把握することにある。

2. 移流方程式

弾性体の移流方程式は波動方程式から求めることができる。

2.1 弾性体の波動方程式

$n(=1,2,3)$ 次元弾性体の振動方程式は次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\dot{u}\}_n = \frac{1}{\rho}[\mathcal{S}]_n\{\sigma\}_n, \quad \{\dot{u}\}_n = \frac{\partial}{\partial t}\{u\}_n \quad (1)$$

$$\{\sigma\}_n = [D]_n \{\varepsilon\}_n = [D]_n [S]_n^T \{u\}_n \quad (2)$$

ここで、変位を $\{u\}$ 、応力を $\{\sigma\}$ 、ひずみを $\{\varepsilon\}$ 、偏微分演算子をマトリクス表記したものを $[S]$ 、密度を ρ 、時間を t 、ヤング率 E とポアソン比 ν からなる応力ひずみマトリクスを $[D]$ とする。

式(1)に式(2)を代入したものが波動方程式(3)となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}_n = \frac{1}{\rho} [S]_n [D]_n [S]_n^T \{u\}_n \quad (3)$$

2.2 弾性体の移流方程式

式(3)は $[0]$ を任意のゼロマトリクス、 $[I]$ を任意の単位マトリクスとおくと、まとめて次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} [0] & \frac{1}{\rho} [I]_n \\ [D]_n & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S]_n^T & [0] \\ [0] & [S]_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n \quad (4)$$

簡易に表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\} = [A][Q]\{F\} \quad (5)$$

ここで、

$$[Q] = [q_x] \frac{\partial}{\partial x} + [q_y] \frac{\partial}{\partial y} + [q_z] \frac{\partial}{\partial z} \quad (6)$$

これを用いて式(5)を書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\} = [A_x] \frac{\partial}{\partial x} \{F\} + [A_y] \frac{\partial}{\partial y} \{F\} + [A_z] \frac{\partial}{\partial z} \{F\} \quad (7)$$

ここで、

$$[A_s] = [A][q_s], s = x, y, z \quad (8)$$

方向分離すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\} = [A_s] \frac{\partial}{\partial s} \{F\}, s = x, y, z \quad (9)$$

このまま移流方程式を解くことは困難であるため、 $[A_s]$ の対角化を行い独立した移流方程式を導く。したがって次の固有値問題を解く。

$$[A_s] \{F\} = \lambda_s \{F\}, s = x, y, z \quad (10)$$

上式より得られる固有値 λ_s を対角にならべたマトリクス $[\Lambda_s]$ と、固有ベクトルを並べた固有マトリクス $[\varphi_s]$ を用いると次式が成立する。

$$[\varphi_s]^{-1} [A_s] [\varphi_s] = [\Lambda_s], s = x, y, z \quad (11)$$

以上を利用して、 $\{F_s\} = [\varphi_s] \{f_s\}$ とすると、独立した移流方程式を導くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f_s\} = [\Lambda_s] \frac{\partial}{\partial s} \{f_s\}, s = x, y, z \quad (12)$$

3. CIP 解法

CIP 法は、矢部らによって考案された高次精度差分法の 1 つであり、数値拡散が少ない高精度な移流方程式解法である。

3.1 移流方程式の CIP 解法

移流方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + u \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = 0 \quad (13)$$

は移流関数 f が x 軸を速度 u で伝播していることを表す。この式を CIP 法で解くことは次式を用いることとなる。 n ステップ時における求める i 点とその隣接点 i_{up} 点の移流値 f とその空間微分値 g の情報から Δt 秒後の $n+1$ ステップでの移流値と空間微分値を導くことができる。

$$f_i^{n+1} = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + g_i^n \xi + f_i^n \quad (14)$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i \xi^2 + 2b_i \xi + g_i^n \quad (15)$$

$$a_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D^2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{D^3} \quad (16)$$

$$b_i = \frac{3(f_{iup} - f_i)}{D^2} - \frac{2g_i + g_{iup}}{D} \quad (17)$$

ここで、 $\xi = -u\Delta t$ である。また、 Δs を節点間距離とすると、 $u \geq 0$ のとき $D = -\Delta s, i_{up} = i-1$ 、 $u < 0$ のとき $D = +\Delta s, i_{up} = i+1$ である。

3.2 分離解法

分離解法は、多くの分野において使用される多次元解法であり、1次元問題に落とし込むことで、容易に解くことが可能な手法である。

CIP 法の分離解法には M 型 CIP 法と C 型 CIP 法の 2 種類がある。

3.3 M 型 CIP 法

方向分離解法を用いて、2次元 CIP 法を解く場合の手順を示す。

$$\text{STEP1: } f^n \xrightarrow{\text{CIP}} f^*, g^n \xrightarrow{\text{CIP}} g^*$$

時刻 n において、まず x 方向の移流から始めたとする。移流値 f^n とその x 方向微分値 g^n が CIP 法によって中間値となる値が求まる。

$$\text{STEP2: } f^* \xrightarrow{\text{CIP}} f^{n+1}, h^* \xrightarrow{\text{CIP}} h^{n+1}$$

中間値から y 方向の移流を行い次ステップの移流値 f^{n+1} とその y 方向微分値 h^{n+1} が得られる。しかし STEP2 で必要な h^* は STEP1 で求められていない

め、何らかの方法で求めなければならない。

この移流方向と垂直方向の微分値を求める手段として2つの手法がありその1つが、M型CIP法と呼ばれる手法である。これは1次線形補間で中間微分値を求める手法で、

$$\begin{aligned} \partial_y f_{i,j}^* &= \partial_y f_{i,j}^n - u\Delta t \frac{\partial_y f_{i+1,j}^n - \partial_y f_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \quad u > 0 \\ &= \partial_y f_{i,j}^n + u\Delta t \frac{\partial_y f_{i-1,j}^n - \partial_y f_{i+1,j}^n}{2\Delta x}, \quad u < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて計算される。ここで ∂_y は、 $\partial/\partial y$ である。この式は中央差分で解いたことと同じである。

3.4 C型CIP法

もう1つの手法がC型CIP法である。一次線形補間で値を導いたM型に対して、C型ではCIP法を用いて値を導く。すなわち、更に2階空間微分値も記憶することによって、微分値をCIP法で求めている。

M型とC型を比較すると精度はC型が優位だが、記憶する情報が増える点に短所がある。

3.5 Tマトリクス

s方向に移流したのち、r方向に移流するためにs方向移流方程式をr方向移流方程式に変換する必要がある。変換にはTマトリクスが用いられる。

Tマトリクスは以下の式で表される。

$$[T_{rs}] = [\phi_r]^{-1} [\phi_s] \quad (19)$$

また、Tマトリクスには以下のような性質がある。一般的な関係則を示す。下添え字の数字は空間次元を表す。

$$\begin{cases} [T_x]_1 = [T]_1 \\ [T_{yx}]_2 = [T_{xy}]_2 = [T]_2 \\ [T_{yx}]_3 = [T_{zy}]_3 = [T_{xz}]_3 = [T]_3 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} [T]_1 = [I] \\ [T]_2 \cdot [T]_2 = [I] \\ [T]_3 \cdot [T]_3 \cdot [T]_3 = [I] \end{cases} \quad (21)$$

移流値の変換は

$$\{f_r\} = [T_{rs}] \{f_s\} \quad (22)$$

で計算される。

4. FEM-CIP 結合解法による開境界処理

FEM 時刻歴解析では、微小な時間 Δt 後の時刻 $t + \Delta t$ における状態を推定し、順次解を導く。

FEM-CIP 結合解法はその点に着目した手法である。簡単に述べると $t + \Delta t$ 時の境界面の応力状態を示し、開境界を実現させる。その境界力を導く手立てとしてCIP法を使用する。

4.1 2次元FEM-CIP 結合解法モデル

2次元問題を扱う場合、以下のような解析モデルを想定する(Fig.1)。左図が無限地盤モデル、右図が半無限地盤モデルを示す。しかし、CIPメッシュの特性上一度にこのようなCIPグリッドの解析を行うことができない。そのため、グリッドをいくつかのCIPメッシュに分割する必要がある。分割方法は以下に示す。

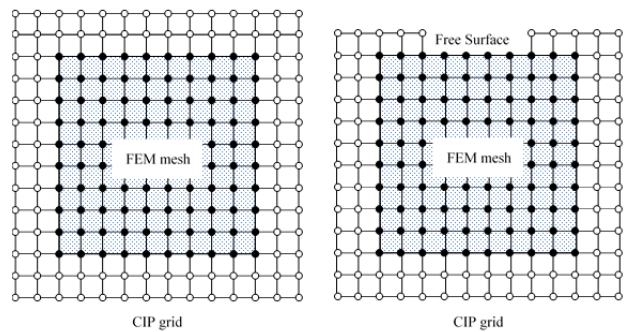


図.1 2次元解析モデル

Fig.1 two dimensional analysis model

4.1.1 Open Boundary Side scheme

境界面に与える外力(以下、境界力)を一組のCIPグリッドで計算する手法である(Fig.2)。入射用グリッドには入射波形を記憶し、逸散波用グリッドにはFEMデータを受け渡し、FEM領域外のグリッドにはFEMデータを外挿している。

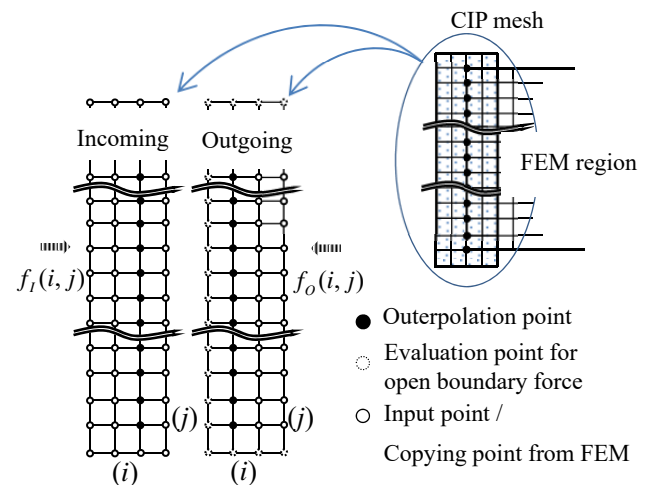


図.2 解析イメージ(OBS)

Fig.2 Analytical image(OBS).

4.1.2 Open Boundary Cell scheme

Δt 秒間での移流で、境界点に影響を与える情報量は限られる。OBCは境界点ごとに4×3のCIPグリッドを用いて境界力を計算する手法である(Fig.3)。境界点の数だけ計算が行われるため、手数は多くなるもののFEM使用メモリを除けば、4×3メッシュだけのメモリで計算が可能であり、大きなモデルを対象とした場合メモリの節約に期待が持てる。

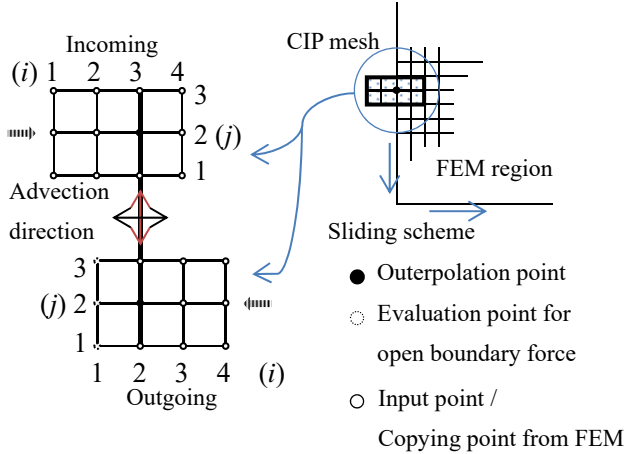


図.3 解析イメージ(OBC)
Fig.3 Analytical image(OBC).

5. 2次元面内問題波動伝播解析

CIP解析手法には計算効率を考慮し、M型CIP法を用いて解析を行い、開境界処理手法にはOBCを用いて解析を行った。

5.1 解析モデル

Fig.1右図に相当する半無限地盤モデルを用いて2次元面内波動伝播解析を行う。物性値等諸量は以下である。

表 1 材料特性

Table 1 Material property.

S波速度	$c_s = 150m/s$
P波速度	$c_p = 281m/s$
密度	$\rho = 1500kg/m^3$
せん断弾性係数	$G = \rho \times C_s^2$
時間間隔	$\Delta t = 0.001425sec$
Step数	521 step

18×17 節点の半無限地盤モデルに入射角0°及び30°でSV波が速度波として入射する2次元P・SV波伝播について解析を行う。

5.2 解析結果

解析結果はsin波1波を入力して行ったxy平面の挙動を追った面内問題解析結果からx方向変位のみを取り出し、z方向変位として取り扱った面外描画結果を示す(Fig.4)。尚、ポワソン比： ν は0.3で解析を行った。

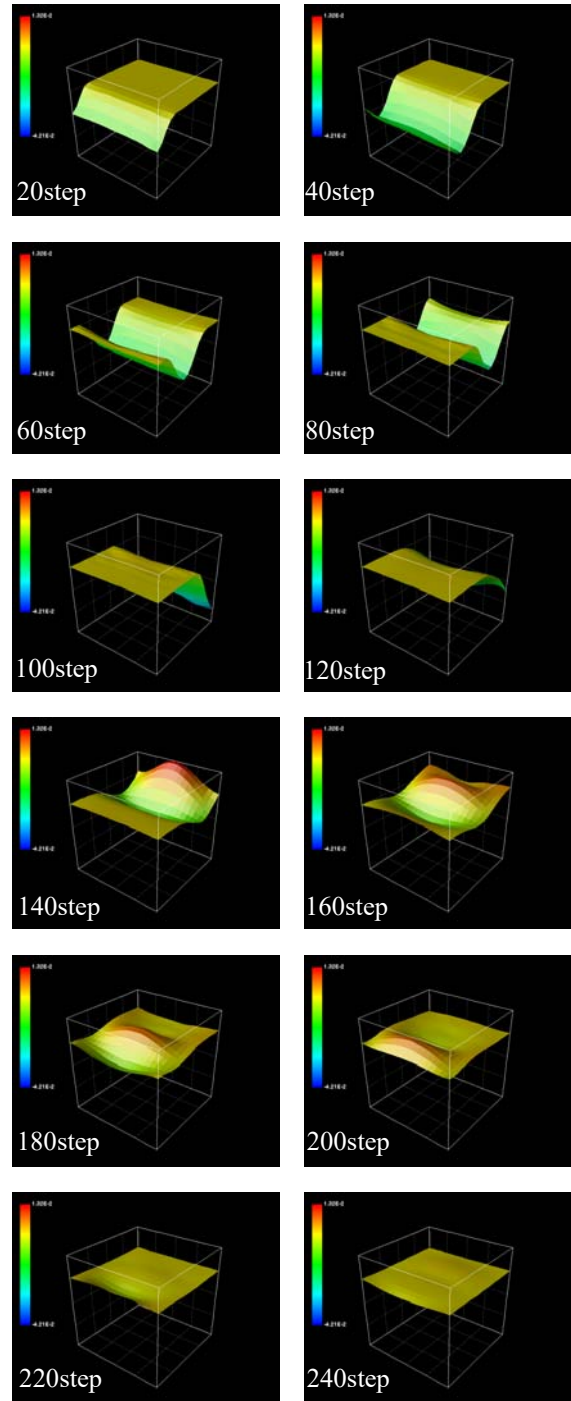


図.4 2次元半無限モデルにおけるx方向変位
Fig.4 x displacement of 2D half infinite model $\theta_2=0$

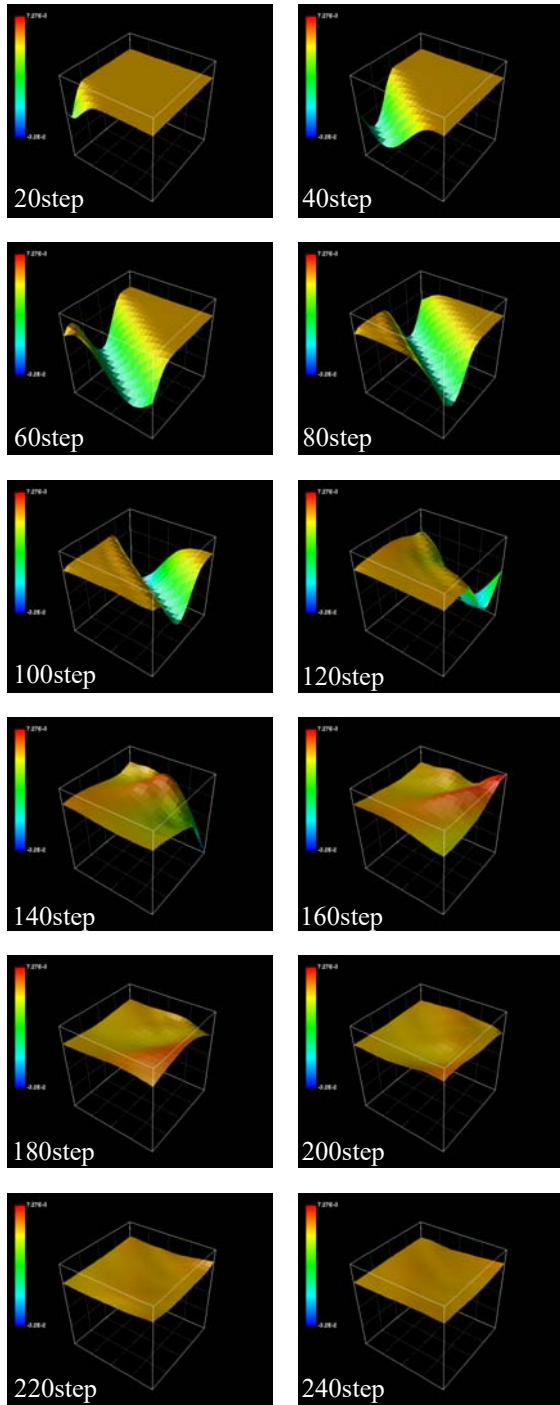


図.5 2次元半無限モデルにおけるx方向変位
 Fig.5 x displacement of 2D half infinite model
 $\theta_2 = \pi / 6$

6. 解析解比較

解析解との比較を行う。解析解は地表面における応力式からx方向反射振幅比とy方向反射振幅比を求め、以下の式で表す。

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{-2k^2 \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + k^2 \cos^2 2\theta_2} \tag{23}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 - k^2 \cos^2 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 + k^2 \cos^2 2\theta_2} \tag{24}$$

ここでkは以下で表す。

$$k = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} \tag{25}$$

A_2 はy方向反射振幅, B_1 はSV波のx方向入射振幅, B_2 はx方向反射振幅を表す。 θ_2 は入射角度, θ_1 は反射角度を表す。ポワソン比 ν は0.3である。

6.1 比較結果

実際の解析結果からは地表面における1点に注目しx方向変位及び,y方向変位をそれぞれ取り出し,地盤モデルのメッシュの分割数を10×9, 14×13, 18×17と変えて解析解との比較を行った。横軸は入射角度,縦軸は振幅比を表す。図の赤線は解析解のグラフを示す。

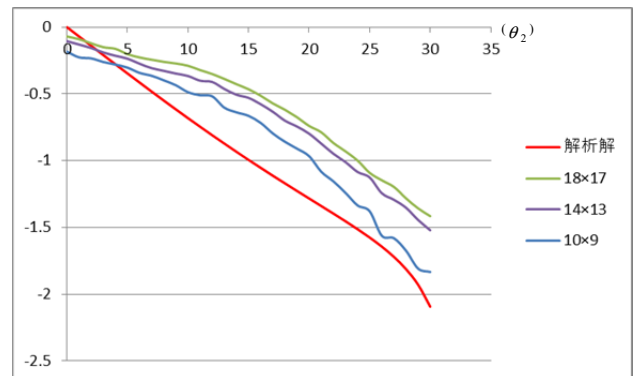


図.6 y方向反射振幅比

Fig.6 reflected wave amplitude ratios to y-direction

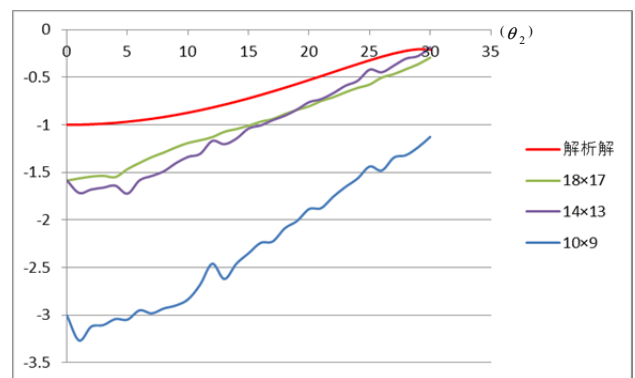


図.7 x方向反射振幅比

Fig.7 reflected wave amplitude ratios to x-direction

7. 結論・考察

7.1 考察

描画結果において、鉛直下方から波が伝播し、地表面で反射した後 CIP 法境界処理によって波が境界面で良好に透過している。このことから 2 次元面内問題においても CIP 法の有用性を確認することができる。しかし、地表面で反射した後に地表面中央にコブのような乱れが観測されたことは精度に関する今後の検討課題を示唆しているといえる。

解析解との比較については、メッシュの細かさを大きくしていくことで、より解析解の振幅比の値と傾向にグラフが近づいていくことが確認できる。入射角 $\theta = 0^\circ$ のときの振幅比の値のずれがやや大きくなるが、これも描画結果で確認したコブ状の波形の乱れに関係しているものと考えられる。

7.2 結論

- ・2次元弾性体面内問題解析において FEM-CIP 結合解法の有効性を確認することができた。
- ・解析モデルのメッシュ数を大きくしていくことで数値解が解析解の値に近づくことが確認できた。
- ・入射角 $\theta = 0^\circ$ の描画結果から観測される反射時のコブ状の乱れを改善することで精度向上が期待できる。

参考文献

- [1]日本建築学会, "入門・建物と地盤との動的相互作用", 日本建築学会, 1996
- [2]伊野慎二, 吉田長行, "波動透過境界の最適化に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21, pp.101-108, 2008
- [3]古谷忍, 吉田長行, "最適化手法による波動透過境界処理に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22, pp.55-61, 2009
- [4]矢部, 尾形, 滝沢, "CIP 法—原子から宇宙までを解くマルチスケール解法—", 森北出版, 2003
- [5]矢部, 尾形, 滝沢, "CIP 法と JAVA による CG シミュレーション", 森北出版, 2007
- [6]Karl F. Graff, "Wave Motion in Elastic Solids", Dover, 1991