

CIP 法を用いた 2 次元 FEM 領域の開境界処理法

Open Boundary Processing for the Two Dimensional FEM Domain

by CIP Method

佐々木 豊¹⁾ 柳川 智隆¹⁾ 松下 周平¹⁾ 吉田 長行²⁾

Yutaka Sasaki, Tomotaka Yanagawa, Syuhei Matsushita, Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻

²⁾ 法政大学デザイン工学部建築学科

When we analyze wave propagation, we have to model the ground as if it is extended infinitely in the limited analytical region. Now we try to make an infinite ground model by FEM and CIP combined method. CIP method is usually used to analyze sound, noise and electromagnetic field. In this research, we propose the wave transmitting boundary by CIP method attached to the 2-dimensional FEM domain.

Keywords : CIP Method, FEM, Wave Transmitting Boundary

1. はじめに

地盤の上に建つ構造物は、地盤の影響を受けて振動している。構造物の周期は地盤の影響を受けて増大し、構造物がもつ振動エネルギーの一部は地盤に放出され、構造物の振動エネルギーは減少する。あるいは、地震動がもつ高い振動数の成分は、構造物を振動させるのに有効な入力とならないこと、隣接する構造物は地盤を介してお互いに干渉し合うということもある。これらは地盤と構造物とが影響しあうことに起因しており、そのような現象を地盤と構造物との動的相互作用 (Dynamic Soil-Structure Interaction) と呼ばれている^[1]。この動的相互作用を考慮した地震応答を計算する方法の 1 つとして、地盤と建物を一体の系として計算する方法は直接法または一体解法と呼ばれている。この解析は複雑な地層構造や地盤の非線形性が容易に解析に取り込めるという長所があり、しばしば有限要素法が利用される。しかし、有限要素法は本来、有限領域を対象とする数値解析手法である。そのため、無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には、

Fig.1 のように、解析領域の内部と外部に境界を設け、外部から内部へ伝わる入射波と内部から外部へ逸散する反射波の双方同時の処理が要求される。有限な狭領域で波動の完全透過ができる境界処理法は確立されておらず、実現すれば地盤と建物の解析効率の向上にとって有益である^{[2][3]}。本研究では、CIP (Constrained Interpolation Profile) 法を用いた新しい境界処理法の確立を目指している^{[4][5]}。CIP 法は移流方程式を解く有効な解法であり、主に有限要素法とは異なる分野で用いられている。そこで、如何にして有限要素法と CIP 法を組み合わせるかが課題となる。

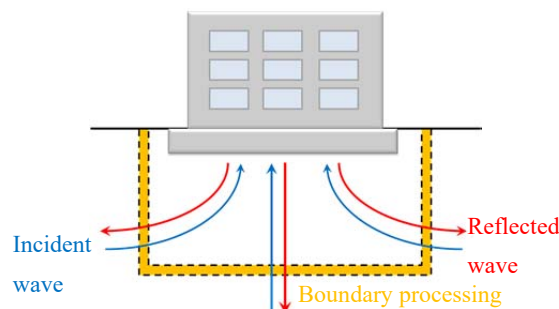


図.1 解析領域
Fig.1 Analytical region.

2. 研究過程

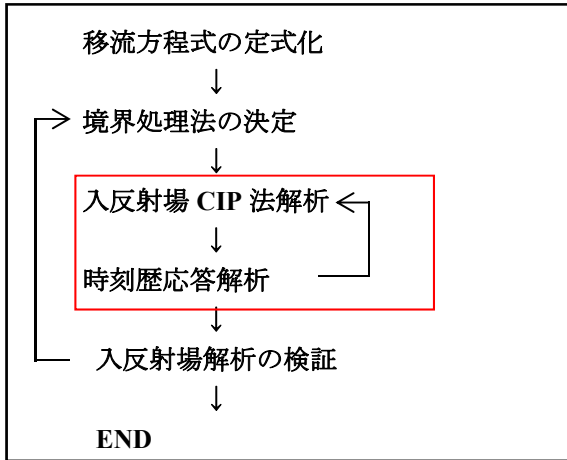


図.2 解析プロセス
Fig.2 Analytical process.

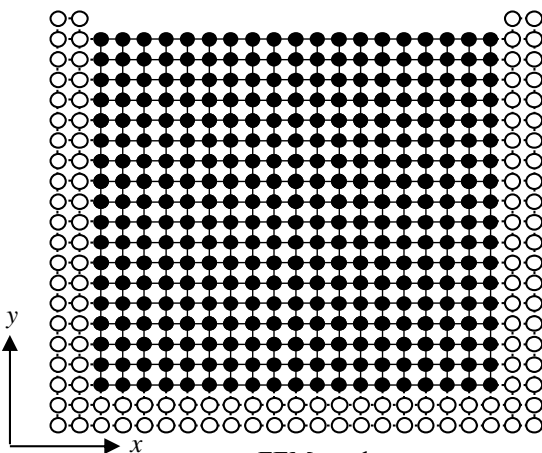
3次元への拡張を見据えた地盤の解析を目的とし、その足がかりを得るために、1次元棒材モデルでの入反射場解析⁶⁾を基に、2次元地盤モデルを用いた手法の提案と検討を行う。

3. 解析

本研究では、FEM との結合解析を2つの手法を用いて行う。

3.1 解析モデル

2次元解析におけるモデル図と材料特性を以下に示す。



● : FEM mesh
○ : CIP grid
図.3 解析モデル

Fig.3 Analytical model.

表 1 材料特性

Table 1 Material property.

Length	$L_x = 18[m]$, $L_y = 17[m]$
Secondary wave velocity	$c_s = 150[m/s]$
Primary wave velocity	$c_p = 281[m/s]$
Density	$\rho = 1500[kg/m^3]$
Elastic shear modulus	$G = \rho \times c_s^2$
Poisson ratio	$\nu = 0.3$

3.2 移流値算定

解析モデルへ外部から入射する波形データの作成が必要である。FEM-CIP 結合解放では入射値を境界力として与えるために、速度や応力を移流値に変換する必要がある。以下では2次元問題を考慮した速度入力の場合での計算式を示す。

SH 波の場合 :

$$u_z = f(t - s/c_s) \tag{1}$$

$$s = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta$$

$$\dot{u}_z = \partial f / \partial t^* = \partial f / \partial t = \dot{f},$$

$$u_{z,x} = \partial f / \partial x = \partial f / \partial t^* \cdot \partial t^* / \partial x = -\dot{f} \sin\theta / c_s \tag{2}$$

$$u_{z,y} = \partial f / \partial y = \partial f / \partial t^* \cdot \partial t^* / \partial y = -\dot{f} \cos\theta / c_s$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = Gu_{z,x} = -G\dot{f} \sin\theta / c_s \tag{3}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = Gu_{z,y} = -G\dot{f} \cos\theta / c_s$$

$$\begin{cases} f_{x1} = \frac{1}{2} \left(+\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{zx}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (1 - \sin\theta) \\ f_{x2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{zx}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (-1 - \sin\theta) \\ f_{y2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_z}{c_s} + \frac{\tau_{yz}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (-1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{4}$$

P・SV 波の場合 :

$$u_s = f(t - s/c_s), \quad s = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta \tag{5}$$

$$u_x = -u_s \cos\theta = f \cos\theta, \quad u_y = u_s \sin\theta = f \sin\theta \tag{6}$$

$$u_{x,x} = \dot{f} \sin\theta \cos\theta / c_s, \quad u_{x,y} = \dot{f} \cos^2\theta / c_s, \tag{7}$$

$$u_{y,x} = -\dot{f} \sin^2\theta / c_s, \quad u_{y,y} = -\dot{f} \sin\theta \cos\theta / c_s$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= D_1 u_{x,x} + D_2 u_{y,y} = +D_1 \frac{\dot{f}}{c_p} \cdot 2 \frac{c_s}{c_p} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_y &= D_2 u_{x,x} + D_1 u_{y,y} = -D_1 \frac{\dot{f}}{c_p} \cdot 2 \frac{c_s}{c_p} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{xy} &= G(u_{x,y} + u_{y,x}) = G \frac{\dot{f}}{c_s} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{cases} f_{x1} = \frac{1}{2} \left(+\frac{\dot{u}_x}{c_p} + \frac{\sigma_x}{D_1} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_p} \left(-1 + 2 \frac{c_s}{c_p} \sin \theta \right) \cos \theta \\ f_{x2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_x}{c_p} + \frac{\sigma_x}{D_1} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_p} \left(+1 + 2 \frac{c_s}{c_p} \sin \theta \right) \cos \theta \\ f_{x3} = \frac{1}{2} \left(+\frac{\dot{u}_y}{c_s} + \frac{\tau_{xy}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (+\sin \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ f_{x4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_y}{c_s} + \frac{\tau_{xy}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (-\sin \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ f_{y2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_y}{c_p} + \frac{\sigma_y}{D_1} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_p} \left(-1 - 2 \frac{c_s}{c_p} \cos \theta \right) \sin \theta \\ f_{y4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{u}_x}{c_s} + \frac{\tau_{xy}}{G} \right) = \frac{\dot{f}}{2c_s} (+\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \tag{9}$$

ここで、 $1 - D_2 / D_1 = (D_1 - D_2) / D_1 = 2G / D_1 = 2c_s^2 / c_p^2$

3.3 FEM-CIP 結合解析

2次元問題を取り扱う場合にも、1次元問題と同様な手法を使うことが可能である。半無限モデルの場合は地表面を覆わない形を想定する。つまり Fig.3 のように、コの字型の CIP グリッドで各々開境界処理をする。

しかし CIP 法の特性上、方型メッシュのみ解析が可能であり、一度にコの字型のグリッドの解析を行うことができない。そのため、グリッドをいくつかの CIP メッシュに分割する必要がある。

3.3.1 Open Boundary Side scheme (OBS)

境界面に与える外力（以下、境界力）を Fig.4 のように右面、左面、下面のそれぞれ一組の CIP グリッドで計算する手法である。入射用グリッドには入射波形を記憶し、逸散波用グリッドには FEM データを受渡す。FEM 領域外のグリッドには FEM データを外挿している。計算効率は良いものの、メモリ量は FEM 分割に比例して大きなものとなる。

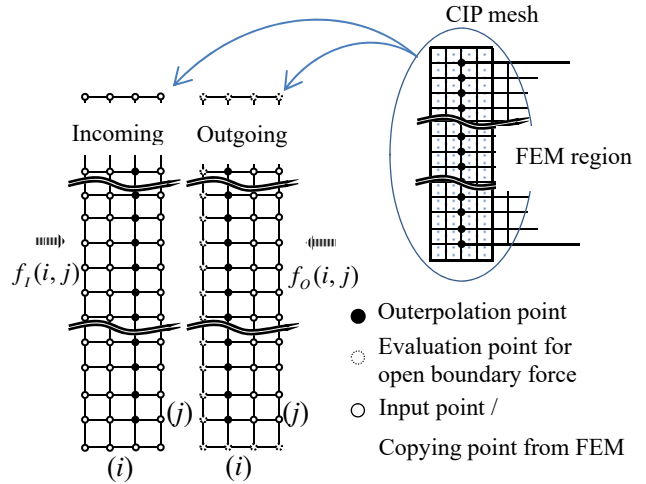


図.4 解析イメージ(OBS)
Fig.4 Analytical image(OBS).

3.3.2 Open Boundary Cell scheme (OBC)

Δt 秒間での移流で、境界点に影響を与える情報量は限られる。そこで、境界点ごとに Fig.5 のような 4×3 の CIP グリッドを用いて、境界力を計算する手法を提案する。境界点の数だけ計算が行われるため、手数は多くなるものの FEM 使用メモリを除き、 4×3 メッシュだけのメモリで計算が可能であり、大きなモデルを対象とした場合メモリの節約に期待できる。基本的な計算過程は OBS と同じである。

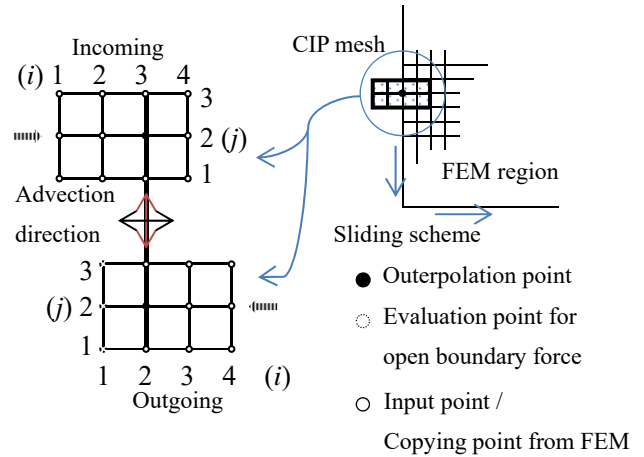


図.5 解析イメージ(OBC)
Fig.5 Analytical image(OBC).

3.4 計算手順

SH 波問題、P・SV 波問題における計算手順をそれぞれ以下に示す。OBS と OBC とでは計算手数が違うだけであり、OBS では境界辺の数だけ、OBC では、境界点の数だけ下記の境界力算定を行うこととなる。

表 2 SH 波計算手順(OBS)

Table.2 SH wave procedure(OBS)

Input wave	$f_I(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N_s$
Copying point from FEM	$f_o(i, j), i = 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N_s$ Here, $j = 1, N_s$ obtained by outerpolation $f_o(i, N_s) = 2f_o(i, N_s - 1) - f_o(i, N_s - 2)$, $f_o(i, 1) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 3)$
	Dotted point obtained by outerpolation $f_o(1, j) = f_o(4, j) - 3(f_o(3, j) - f_o(2, j))$
Gradient calculation	$g_o : i = 2, 3, j = 1, 2, \dots, N_s$ (CDP)
CIP Advection	Dissipation advection $i = 2, j = 1, 2, \dots, N_s$
Boundary force	τ_{zx}, τ_{yz}

表 3 SH 波計算手順(OBC)

Table.3 SH wave procedure(OBC)

Input wave	$f_I(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$
Copying point from FEM	$f_o(i, j), i = 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$ Thinking boundary force of the corner, $j = 1$ or $j = 3$ obtained by outerpolation $f_o(i, 3) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 1)$, $f_o(i, 1) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 3)$
	Dotted point obtained by outerpolation $f_o(1, j) = f_o(4, j) - 3(f_o(3, j) - f_o(2, j))$
Gradient calculation	$g_o : i = 2, 3, j = 1, 2, 3$ (CDP)
CIP Advection	Dissipation advection $i = 2, j = 2$
Boundary force	τ_{zx}, τ_{yz}

表 4 P・SV 波計算手順(OBS)

Table.4 P・SV wave procedure(OBS)

Input wave	$f_I(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N_s$
Copying point from FEM	$f_o(i, j), i = 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N_s$ Here, $j = 1, N_s$ obtained by outerpolation $f_o(i, N_s) = 2f_o(i, N_s - 1) - f_o(i, N_s - 2)$, $f_o(i, 1) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 3)$
	Dotted point obtained by outerpolation $f_o(1, j) = f_o(4, j) - 3(f_o(3, j) - f_o(2, j))$
Gradient calculation	$g_o : i = 2, 3, j = 1, 2, \dots, N_s$ (CDP) $h_o : i = 1, 2, 3, j = 2, \dots, N_s - 1$ (CDP) $h_o : i = 1, 2, 3, j = 1, N_s$ (1DLiner)
CIP Advection	Dissipation advection $i = 2, 3, j = 1, 2, \dots, N_s$ T matrix transform Vertical advection $i = 2, j = 2, \dots, N_s - 1$
Boundary force	σ_x, σ_y

表 5 P・SV 波計算手順(OBC)

Table.5 P・SV wave procedure(OBC)

Input wave	$f_I(i, j), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$
Copying point from FEM	$f_o(i, j), i = 2, 3, 4, j = 1, 2, 3$ Thinking boundary force of the corner, $j = 1$ or $j = 3$ obtained by outerpolation $f_o(i, 3) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 1)$, $f_o(i, 1) = 2f_o(i, 2) - f_o(i, 3)$
	Dotted point obtained by outerpolation $f_o(1, j) = f_o(4, j) - 3(f_o(3, j) - f_o(2, j))$
Gradient calculation	$g_o : i = 2, 3, j = 1, 2, 3$ (CDP) $h_o : i = 1, 2, 3, j = 2$ (CDP) $h_o : i = 1, 2, 3, j = 1, 3$ (1DLiner)
CIP Advection	Dissipation advection $i = 2, 3, j = 1, 2, 3$ T matrix transform Vertical advection $i = 2, j = 2$
Boundary force	σ_x, σ_y

4. 解析結果

以下では sin 波 1 波を入射角 30°で下方より斜め入射した場合について、SH 波問題(Fig.6)、P・SV 波問題(Fig.7)それぞれにおける全質点の変位挙動を示す。OBS と OBC で同じ解析値が得られたため、ここでは OBC で得られた解析結果を掲載する。SH 波問題では面外変位描画を、P・SV 波問題では面内変位描画結果を表す。

SH 波問題：

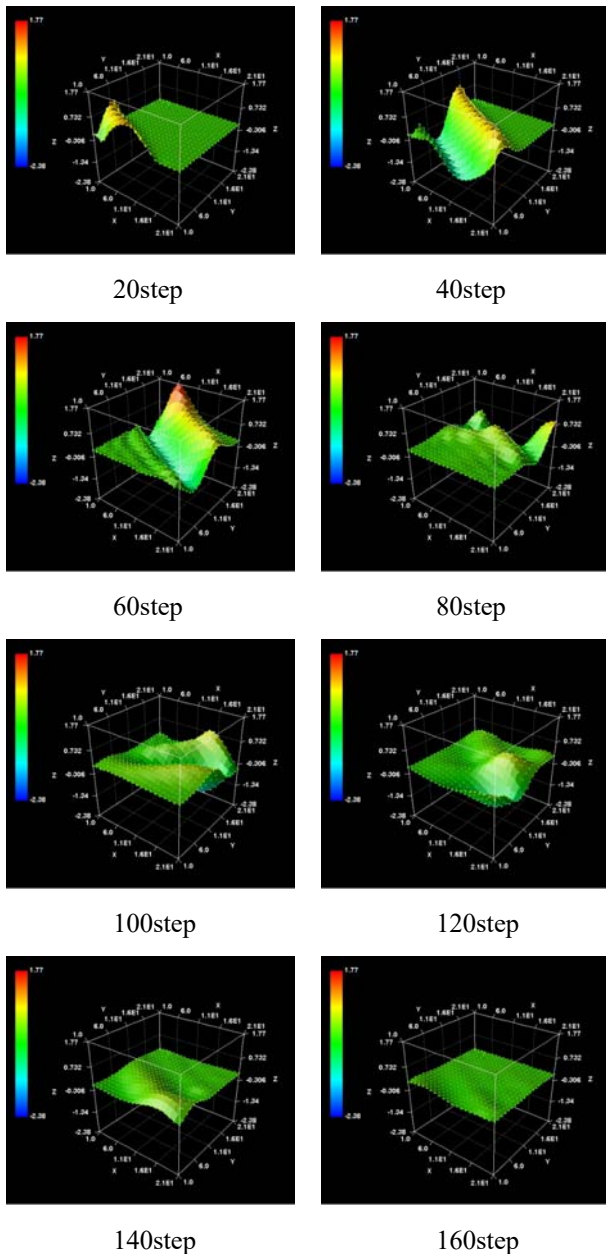


図. 6 半無限モデルにおける SH 波解析結果

Fig.6 The half space model subjected to SH wave with

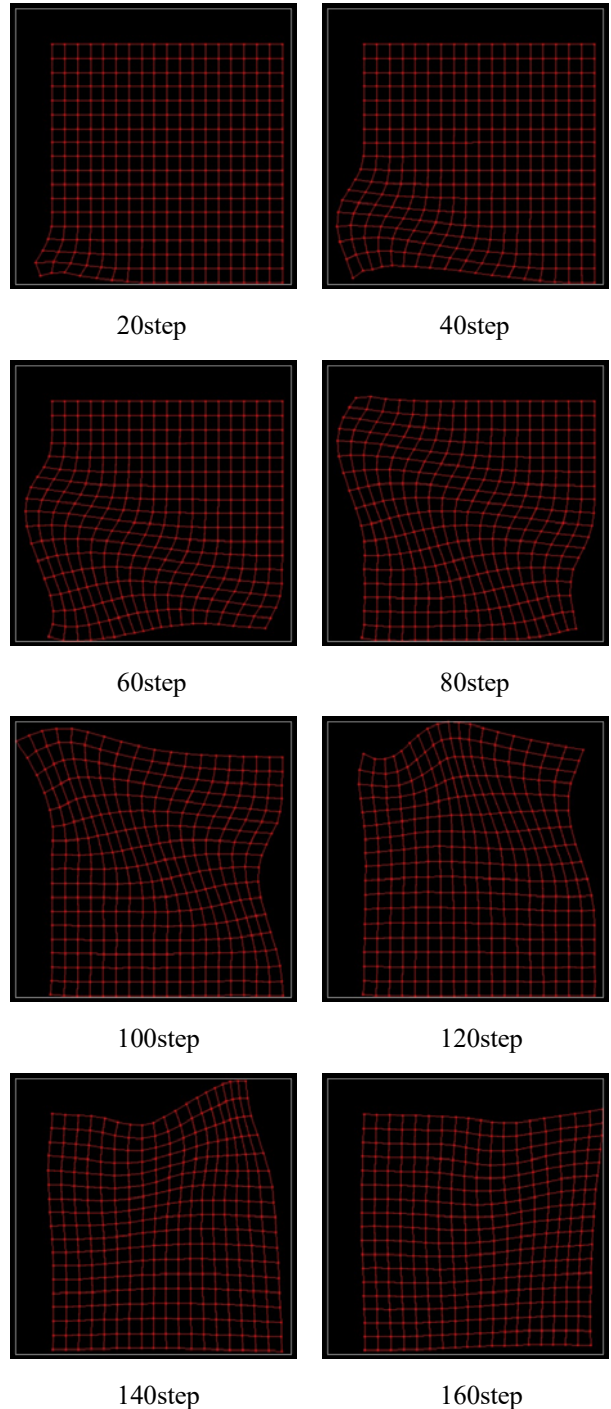


図. 7 半無限モデルにおける P・SV 波解析結果

Fig.7 The half space model subjected to P・SV wave with 30-degree of incident angle: Analysis by OBC.

以下では Fig.8 に示す質点番号 86、176、186、333 の OBS と OBC の P・SV 波問題での時刻歴変位結果を示す。

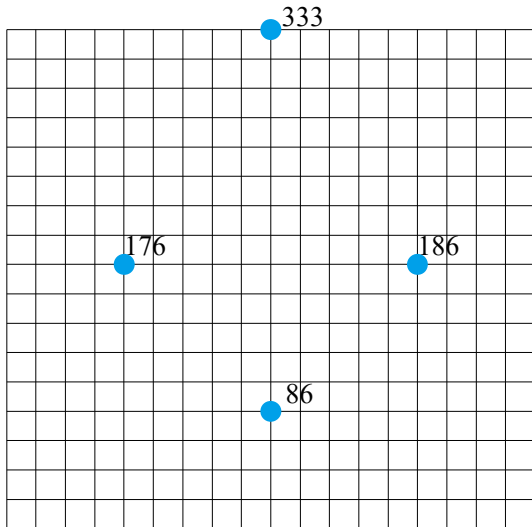


図. 8 半無限モデルの解析点

Fig.8 Observation point in the half space model.

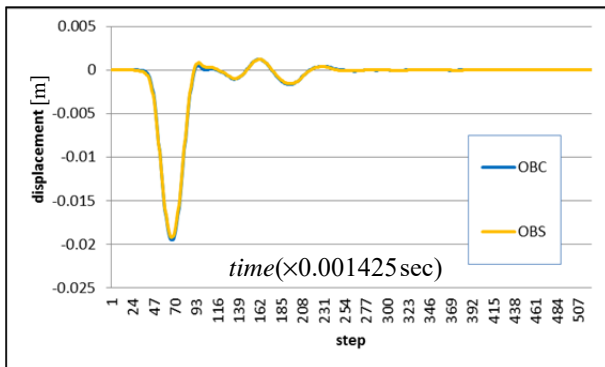


図. 9 質点番号 86 の時刻歴変位挙動

Fig.9 Displacement of node 86 in (Incident angle 30°).

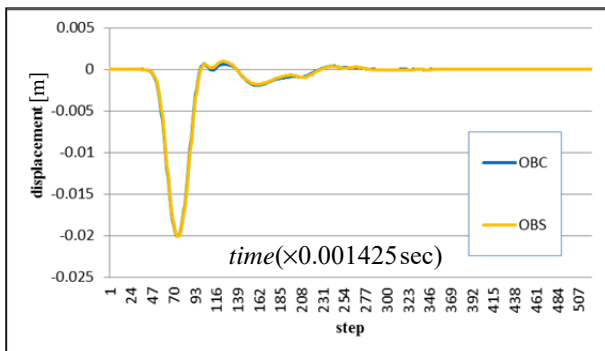


図. 10 質点番号 176 の時刻歴変位挙動

Fig.10 Displacement of node 176 in (Incident angle 30°).

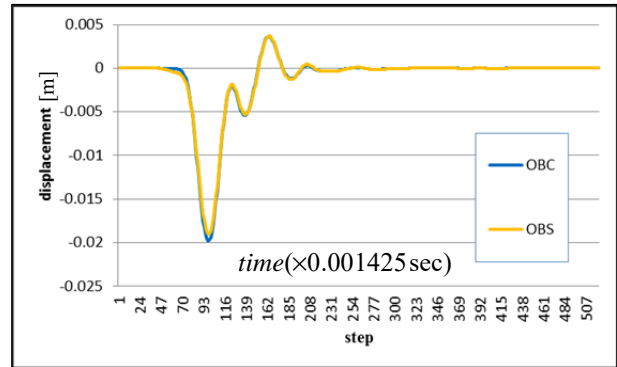


図. 11 質点番号 186 の時刻歴変位挙動

Fig.11 Displacement of node 186 in (Incident angle 30°).

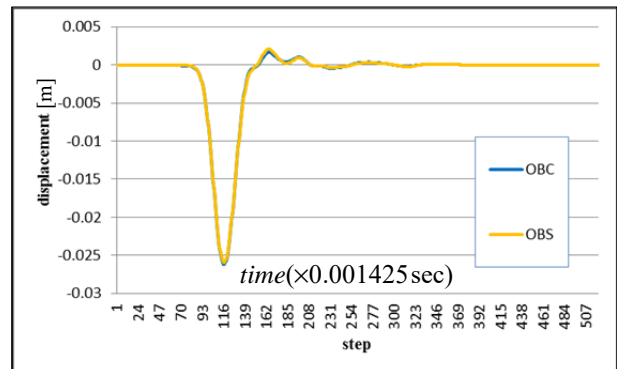


図. 12 質点番号 333 の時刻歴変位挙動

Fig.12 Displacement of node 333 in (Incident angle 30°).

5. 結論・考察

本研究の結論として以下のものが挙げられる。

- OBC と OBS とで SH 波、P・SV 波伝播が共にほぼ同一の結果が得られた。
- 多次元においても CIP 法による境界処理の有効性が確認できた。

OBC と OBS のそれぞれの解析結果を見るとほぼ同一の結果であると判断できる。これにより OBC の解析の有効性が確認できる。CIP 法では Δt 後の微小時間での波動データしか扱わないため、CIP 法メッシュを制限しても CIP 移流されるこの手法は 3 次元問題にでも扱えると考えられる。また、斜め入射や鉛直入射等の入射角度を変えても同様な結果を得られた。

参考文献

- [1] 日本建築学会、入門・建物と地盤との動的相互作用、日本建築学会、1996
- [2] 伊野慎二, 吉田長行、"波動透過境界の最適化に関する研究"、法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21、pp.101-108、2008
- [3] 古谷忍, 吉田長行、"最適化手法による波動透過境界処理に関する研究"、法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22、pp.55-61、2009
- [4] 矢部, 尾形, 滝沢、CIP 法ー原子から宇宙までを解くマルチスケール解法ー、森北出版、2003
- [5] 矢部, 尾形, 滝沢、CIP 法と JAVA による CG シミュレーション、森北出版、2007
- [6] 神崎壮一郎, 吉田長行、"FEM-CIP による 1 次元入射場解析"、法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.27、pp.68-72、2013