

CIP 法による 3 次元弾性体の波動伝播解析

WAVE PROPAGATION ANALYSIS OF

THE THREE DIMENSIONAL ELASTIC BODY BY CIP METHOD

柳川 智隆¹⁾ 松下 周平¹⁾ 吉田 長行²⁾

Tomotaka Yanagawa, Syuhei Matsushita, Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科建築学専攻

²⁾ 法政大学デザイン工学部建築学科

When we calculate the earthquake response of the building, the effect of Dynamic Soil-Structure Interaction is considered. Generally the finite element method (FEM) is used to analyze the dynamic behavior of the soil. This method is well-known to be effective in dealing with the nonlinear behavior. The analytical domain of the FEM has to be closed with the boundaries. But the dissipated wave is propagated over the boundaries and not reflected. Therefore some numerical technique is required to realize the open boundary. The advection equation can decompose the wave of the field into the incoming wave and the out-going one. This property enables us to make the open boundary processing for the FEM analysis. The CIP(Constrained Interpolation Profile Scheme) method is a typical procedure with high precision for the advection equation. This paper investigates the basic characteristics of the CIP method for the transmission of the out-going wave against the three dimensional elastic field.

Keywords : Elastic wave , CIP method, Three dimensional field, Open boundary

1. はじめに

近年、地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている。非線形問題を扱う場合、有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている^[1]。有限要素法によって無限あるいは半無限地盤を離散化するためには開境界処理を必要とする。境界処理法として、境界にダッシュポットを設ける粘性境界が代表的であるが完全な波動透過は実現されていない^{[2],[3]}。

そこで、本論では CIP 法(Constrained Interpolation Profile Scheme)を用いた新しい境界処理法の可能性を検討する。CIP 法は矢部ら^{[4],[5]}によって考案された

移流方程式を解く高精度差分法である。

本論の目的は新しい境界処理法のための基礎研究として CIP 法を用いた 3 次元弾性体波動伝播解析を行い、その特性を把握することにある。

2. 弾性体の移流方程式とその CIP 解法

弾性体の移流方程式は波動方程式から導くことができる。

2.1 弾性体の波動方程式

次のように $n(= 1,2,3)$ 次元弾性体の振動方程式は表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\dot{u}\}_n = \frac{1}{\rho}[\mathcal{S}]_n\{\sigma\}_n, \{\dot{u}\}_n = \frac{\partial}{\partial t}\{u\}_n \quad (1)$$

$$\{\sigma\}_n = [D]_n\{\varepsilon\}_n = [D]_n[\mathcal{S}]_n^T\{u\}_n \quad (2)$$

ここで、変位を $\{u\}$ 、応力を $\{\sigma\}$ 、ひずみを $\{\varepsilon\}$ 、偏微分演算子をマトリクス表記したものを $[\mathcal{S}]$ 、密度を ρ 、時間を t 、ヤング率 E とポアソン比 ν からなる応力ひずみマトリクスを $[D]$ とする。

式(1)に式(2)を代入したものが波動方程式(3)となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\}_n = \frac{1}{\rho}[\mathcal{S}]_n[D]_n[\mathcal{S}]_n^T\{u\}_n \quad (3)$$

2.2 弾性体の移流方程式

式(3)は $[0]$ を任意のゼロマトリクス、 $[I]$ を任意の単位マトリクスとおくと、まとめて次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} [0] & \frac{1}{\rho}[I]_n \\ [D]_n & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{S}]_n^T & [0] \\ [0] & [\mathcal{S}]_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n \quad (4)$$

簡易に表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\} = [A][Q]\{F\} \quad (5)$$

ここで、

$$[Q] = [q_x]\frac{\partial}{\partial x} + [q_y]\frac{\partial}{\partial y} + [q_z]\frac{\partial}{\partial z} \quad (6)$$

これを用いて式(5)を書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\} = [A_x]\frac{\partial}{\partial x}\{F\} + [A_y]\frac{\partial}{\partial y}\{F\} + [A_z]\frac{\partial}{\partial z}\{F\} \quad (7)$$

ここで、

$$[A_s] = [A][q_s], s = x, y, z \quad (8)$$

方向分離すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F\} = [A_s]\frac{\partial}{\partial s}\{F\}, s = x, y, z \quad (9)$$

このまま移流方程式を解くことは困難であるため、 $[A_s]$ の対角化を行い独立した移流方程式を導く。したがって次の固有値問題を解く。

$$[A_s]\{F\} = \lambda_s\{F\}, s = x, y, z \quad (10)$$

上式より得られる固有値 λ_s を対角にならべたマトリクス $[A_s]$ と、固有ベクトルを並べた固有マトリクス $[\varphi_s]$ を用いると次式が成立する。

$$[\varphi_s]^{-1}[A_s][\varphi_s] = [\Lambda_s], s = x, y, z \quad (11)$$

以上を利用して、 $\{F_s\} = [\varphi_s]\{f_s\}$ とすると、独立した移流方程式を導くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f_s\} = [\Lambda_s]\frac{\partial}{\partial s}\{f_s\}, s = x, y, z \quad (12)$$

2.3 移流方程式のCIP解法

CIP法は、矢部らによって考案された高精度差分法あり、数値拡散が少ない高精度な移流方程式解法である。移流方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + u\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = 0 \quad (13)$$

は移流関数 f が x 軸を速度 u で伝播していることを表す。この式をCIP法で解くことは次式を用いることとなる。 n ステップ時における求める i 点とその隣接点 iup 点の移流値 f とその空間微分値 g の情報から Δt 秒後の $n+1$ ステップでの移流値と空間微分値を導くことができる。

$$f_i^{n+1} = a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i^n\xi + f_i^n \quad (14)$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i^n \quad (15)$$

$$a_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D^2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{D^3} \quad (16)$$

$$b_i = \frac{3(f_{iup} - f_i)}{D^2} - \frac{2g_i + g_{iup}}{D} \quad (17)$$

ここで、 $\xi = -u\Delta t$ である。また、 Δs を節点間距離とすると、 $u \geq 0$ のとき $D = -\Delta s$ 、 $iup = i - 1$ 、 $u \leq 0$ のとき $D = +\Delta s$ 、 $iup = i + 1$ である。

2.4 分離解法

分離解法は、多くの分野において使用される多次元解法であり、1次元問題に落とし込むことで、容易に解くことが可能な手法である。

CIP法の分離解法にはM型CIPとC型CIPの2種類がある。

2.4.1 M型CIP

方向分離解法を用いて、2次元CIP法を解く場合の手順を示す。

$$\text{STEP1: } f^n \xrightarrow{\text{CIP}} f^*, g^n \xrightarrow{\text{CIP}} g^*$$

時刻 n において、まず x 方向の移流から始めたとする。移流値 f^n とその x 方向微分値 g^n がCIP法によって中間値となる値が求まる。

$$\text{STEP2: } f^* \xrightarrow{\text{CIP}} f^{n+1}, h^* \xrightarrow{\text{CIP}} h^{n+1}$$

中間値から y 方向の移流を行い次ステップの移流値 f^{n+1} とその y 方向微分値 h^{n+1} が得られる。しかしSTEP2で必要な f^* はSTEP1で求められていないため、何らかの方法で求めなければならない。

この移流方向と垂直方向の微分値を求める手段として2つの手法があり、その1つがM型CIPと呼ばれる。これは1次元線形補間で中間微分値を求める手法で、

$$\begin{aligned} \partial_y f_{i,j}^* &= \partial_y f_{i,j}^n - u \Delta t \frac{\partial_y f_{i+1,j}^n - \partial_y f_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \quad u > 0 \\ &= \partial_y f_{i,j}^n + u \Delta t \frac{\partial_y f_{i-1,j}^n - \partial_y f_{i+1,j}^n}{2\Delta x}, \quad u < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を用いて計算される。ここで ∂_y は、 $\partial/\partial y$ である。この式は中央差分で解いたことと同じである。

2.4.2 C型CIP

もう1つの手法がC型CIPである。一次線形補間で値を導いたM型に対して、C型ではCIP法を用いて値を導く。すなわち、更に2階空間微分値も記憶することによって、微分値をCIP法で求めている。

M型とC型を比較すると精度はC型が優位だが、記憶する情報が増える点に短所がある。

2.5 Tマトリクス

s 方向に移流したのち、 r 方向に移流するために s 方向移流方程式を r 方向移流方程式に変換する必要がある。変換にはTマトリクスが用いられる。

Tマトリクスは以下の式で表される。

$$[T_{rs}] = [\varphi_r]^{-1} [\varphi_s] \quad (19)$$

また、Tマトリクスには以下のような性質がある。一般的な関係則を示す。下添え字の数字は空間次元を表す。

$$\begin{cases} [T_x]_1 = [T]_1 \\ [T_{yx}]_2 = [T_{xy}]_2 = [T]_2 \\ [T_{yx}]_3 = [T_{zy}]_3 = [T_{xz}]_3 = [T]_3 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} [T]_1 = [I] \\ [T]_2 \cdot [T]_2 = [I] \\ [T]_3 \cdot [T]_3 \cdot [T]_3 = [I] \end{cases} \quad (21)$$

移流値の変換は

$$\{f_r\} = [T_{rs}] \{f_s\} \quad (22)$$

で計算される。

3. 3次元弾性体波動伝播解析

3.1 計算手順

3次元弾性体の波動伝播解析には先に紹介した、M型CIPを中央差分で解いたCDP(Central Difference Profile)とC型CIP(CTP: C Type CIP)の2種類の手法

で解くこととする。CTPの精度の方がCDPより上である。しかし、小メモリで計算可能なメリットがCDPにはあるので両者を比較検討する。

3.1.1 CDP手順

$$\text{STEP1: } f_x^n \xrightarrow{\text{CIP1D}} f_x^* \xrightarrow{\text{Tmat}} f_y^*,$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial x} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial x} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial y} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_x^*}{\partial y} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial z} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_x^*}{\partial z} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial z},$$

$$\text{STEP2: } f_y^* \xrightarrow{\text{CIP1D}} f_y^{**} \xrightarrow{\text{Tmat}} f_z^{**},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial y} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial y} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial x} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial x} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial z} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial z} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial z},$$

$$\text{STEP3: } f_z^{**} \xrightarrow{\text{CIP1D}} f_z^{***} \xrightarrow{\text{Tmat}} f_x^{n+1},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial z} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial z} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial x} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial x} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial y} \xrightarrow{\text{CDP}} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial y} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial y},$$

ここでCIP1D(CIP 1 Dimension Solution)は1次元CIP解法、CDPは中央差分補間、Tmat(T Matrix Transformation)はTマトリクス変換を表す。

3.1.2 CTP手順

$$\text{STEP1: } f_x^n \xrightarrow{\text{CIP1D}} f_x^* \xrightarrow{\text{Tmat}} f_y^*,$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial x} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial x} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial y} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial y} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial xy} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial xy} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial xy},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial z} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial z} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial zx} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial zx} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial zx},$$

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial yz} \xrightarrow{\text{CIP1D}} \frac{\partial f_x^*}{\partial yz} \xrightarrow{\text{Tmat}} \frac{\partial f_y^*}{\partial yz},$$

このモデルの中央節点に速度を z 方向へ sin 波形で入力した波動伝播解析を行う。計算手法は先に述べた CDP と CTP の 2 種類である。

$$\frac{\partial f_x^n}{\partial xyz} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_x^*}{\partial xyz} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_y^*}{\partial xyz},$$

STEP2 : $f_y^* \xrightarrow{CIP1D} f_y^{**} \xrightarrow{Tmat} f_z^{**},$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial y} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial y} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial x} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial x} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial xy} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial xy} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial xy},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial z} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial z} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial yz} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial yz} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial yz},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial zx} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial zx} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial zx},$$

$$\frac{\partial f_y^*}{\partial xyz} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_y^{**}}{\partial xyz} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_z^{**}}{\partial xyz},$$

STEP3 : $f_z^{**} \xrightarrow{CIP1D} f_z^{***} \xrightarrow{Tmat} f_x^{n+1},$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial z} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial z} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial x} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial x} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial zx} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial zx} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial zx},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial y} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial y} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial yz} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial yz} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial yz},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial xy} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial xy} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial xy},$$

$$\frac{\partial f_z^{**}}{\partial xyz} \xrightarrow{CIP1D} \frac{\partial f_z^{***}}{\partial xyz} \xrightarrow{Tmat} \frac{\partial f_x^{n+1}}{\partial xyz},$$

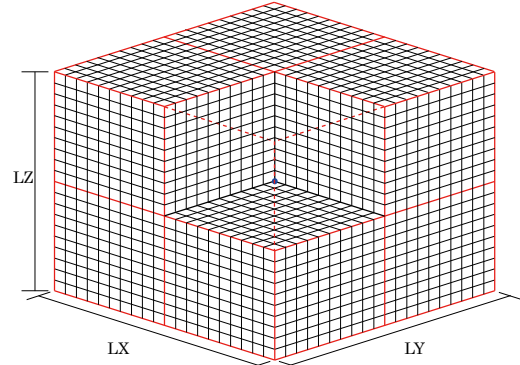


図.1 3次元解析モデル

Fig.1 Three Dimensional Analytical Model

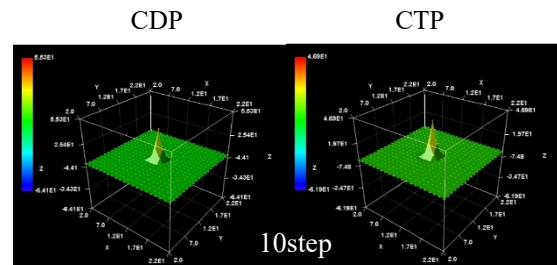
表 1 三次元モデル物性値等諸量

Table 1 Parameters of Analytical Model

$LX = LY = LZ = 20.0m$
$DX = DY = DZ = 1.0m$
$\nu = 0.3$
$\rho = 1.5[10^3 \text{ kg/m}^3]$
$E = 56[MN/m^2]$
$G = 21.54[MN/m^2]$
$Cs = 119.83m/sec$
$Cp = 224.18m/sec$
$\Delta t = 1.0ms$

3.3 解析結果

解析結果は初期入力点を含む xy 平面の面外速度描画結果を示す(Fig.2)。



3.2 3次元弾性体無限地盤モデル

Fig.1 に 3 次元弾性体無限地盤波動伝播解析に用いるモデルを示す。Table 1 は解析に用いた物性値等諸量である。

ここで、LX、LY、LZ は各方向のモデル長さ、DX、DY、DZ は各方向の節点距離、ν はポアソン比、E はヤング率、G はせん断弾性係数、Cs は S 波速度、Cp は P 波速度、Δt は 1 ステップ秒を表す。

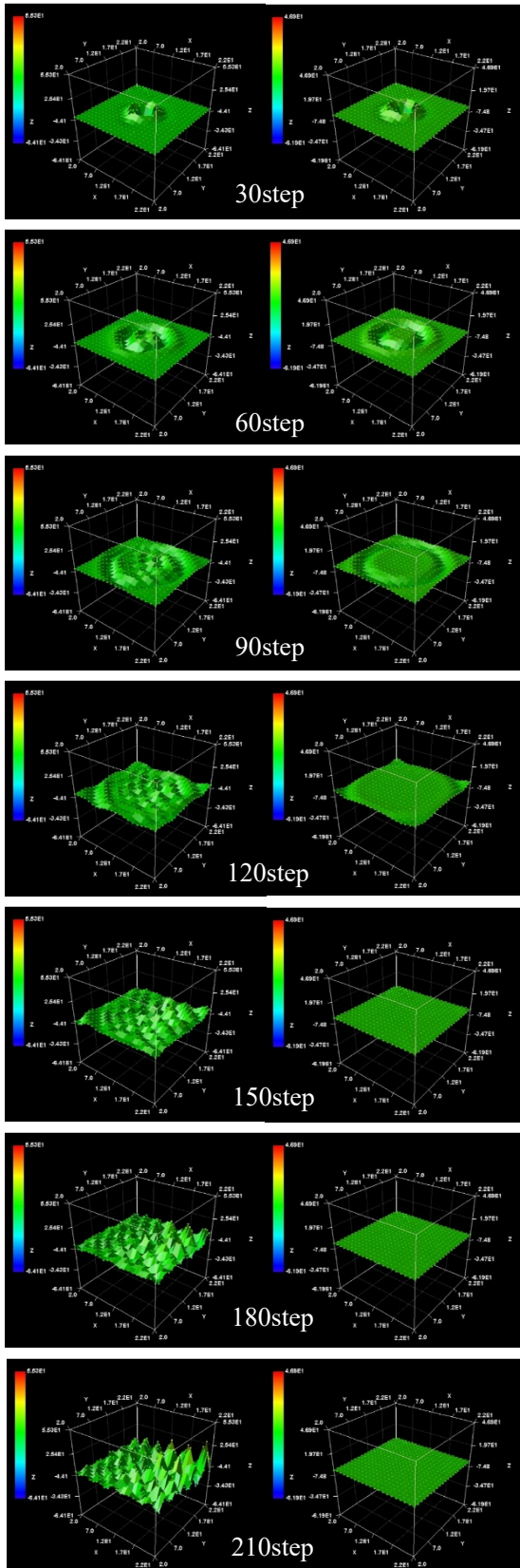


図.2 3次元無限モデルにおけるz速度結果
Fig.2 z Velocity Result of 3D Infinite Space Model

3.4 考察

両描画結果を比較して分かるように、CTP は安定

した伝播を見せているが、CDP はざわめきが大きく、最後には数値拡散を起こしている。CTP は描画を見る限り、対称的に伝播していることがわかる。

3.5 3次元弾性体半無限地盤モデル

CTP による解析の精度を検討するために、半無限体の表面波伝播理論解である Lamb の解と比較する。3次元弾性体半無限地盤モデルは無限モデルに自由端を表現する境界条件を入れることによって実現される。

解析モデルは、無限地盤解析時と同様な諸量を持つ、 $21 \times 21 \times 22$ のモデルでz正方向境界面に自由表面処理を行うための節点面を設ける。地表面の中央節点へ応力 σ_z を負の方向へインパルスで与えた波動伝播解析を行う。

3.6 地表面境界条件

CIP は移流方向に対して独立して計算できることから、逸散波の移流値を入射移流値として代入することで、逸散波が地表面で反射しそれが入射波となって入射する現象を表現することができる。

面Z-1を地表面と考えた場合、その下の面Z-2の逸散移流量 F_o を面zの入射移流量 F_i として代入する。具体的には、x、y方向のCIP計算後

$$-F_o(Z-2) \rightarrow F_i(Z), \quad \partial F_o(Z-2) \rightarrow \partial F_i(Z) \quad (23)$$

とした後、z方向の移流計算を行う。

3.7 Lamb の解

この解^[6]は地表面へインパルス力を加え、その点から距離r離れた地点で観測されるz方向変位を表す。

3.8 解析結果

Fig.4 は、地表面を表す図(Fig.3)の節点番号1~4における、z方向時刻歴変位応答と、その節点に対応するLambの解を同じグラフに示したものである。Fig.5は、x、y方向時刻歴変位応答をグラフにしたものである。

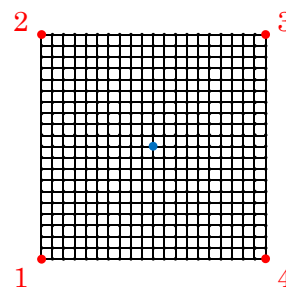


図.3 半無限地表面上の観測点

Fig.3 Observation Point on Surface of Half Space

各グラフにある3本の縦線は左から順に理論解におけるP波、S波、Rayleigh波の到達を意味する。

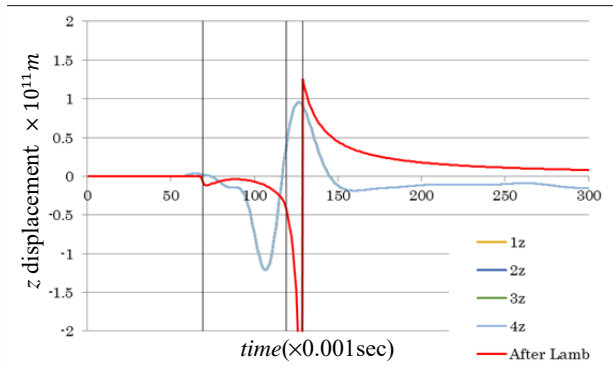


図.4 インパルス応力を受ける3次元半無限モデルの1-4点z方向変位解析結果とLamb解析

Fig.4 z Displacement Result of 3D Half Space Model Subjected to Impulse at 1-4 and After Lamb

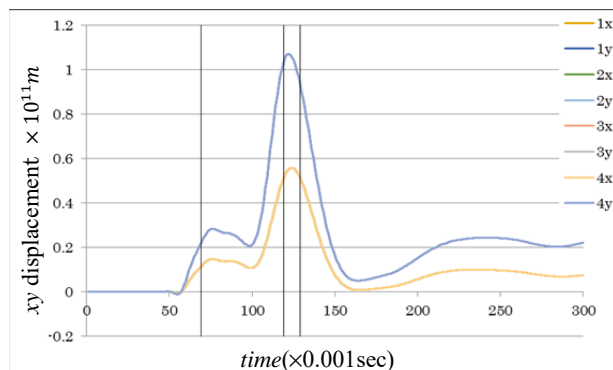


図.5 インパルス応力を受ける3次元半無限モデルの1-4点xy方向変位解析結果

Fig.5 xy Displacement Result of 3D Half Space model Subjected to Impulse at 1-4

3.9 考察

z方向変位結果ではRayleigh波の到達がはっきりと表れ、Lambの解と同時期に到達していることから、本解析法は妥当だと言える。しかし、波通過後に残留変位が残ってしまっている。sin波速度入力など、最終的に変位を0に抑え込む解析では残留変位が残らないことから、インパルス入力特有の問題と考えられる。

x、y方向変位結果ではP波とS波の到達で、ピークが現れるがこれも、Lambと同時期に到達を確認できる。やはりこの結果でも残留変位がみられる。

無限地盤モデルでは目立たなかったが、x方向とy方向とで大きく対称性がくずれている。C型でも方向分離解法を行っている以上は、完全な対称性を保持することは難しい。

本解析を通して、CTPによる3次元無限あるいは半無限地盤解析のプロファイル精度の基本的な特性を確認することができた。

4. 結論

- M型CIPでは短時間解析については満足なプロファイルを得る。
- C型CIPは無限、半無限に関わらず安定した解析値を得ることができる。
- 方向分離解法の特長上一部の対称性が崩れて、総合的には十分な対称性を保持する。

参考文献

- [1]日本建築学会，“入門・建物と地盤との動的相互作用”，日本建築学会，1996
- [2]伊野慎二，吉田長行，“波動透過境界の最適化に関する研究”，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21，pp.101-108，2008
- [3]古谷忍，吉田長行，“最適化手法による波動透過境界処理に関する研究”，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22，pp.55-61，2009
- [4]矢部，尾形，滝沢，“CIP法—原子から宇宙までを解くマルチスケール解法—”，森北出版，2003
- [5]矢部，尾形，滝沢，“CIP法とJAVAによるCGシミュレーション”，森北出版，2007
- [6]Karl F. Graff，“Wave Motion in Elastic Solids”，Dover，1991