

ハイブリッド型ペナルティ法によるトラス構造解析

Truss Structural Analysis by using Hybrid-type Penalty Method

阿邊 恒太¹⁾ 竹内 則雄²⁾

Kota Abe, Norio Takeuchi

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科システムデザイン専攻

²⁾ 法政大学デザイン工学部システムデザイン学科

In this paper, the truss element of hybrid-type penalty method is developed. As displacement field, it is assumed that an independent linear displacement field in each element. This model has a two degree of freedom called strain and rigid displacement in element center of gravity. The incidental conditions on the continuity of displacement are considered using a penalty function. The solution obtained by this method is consistent with the exact solution. This element is useful when used in combination with the plane or solid element. In addition, the way to eliminate an inner point is shown using a pin element only with the degree of freedom of the rigid displacements. According to this method, it becomes the data structure that is equal to normal displacement method.

Keywords : HPM, Truss, Linear Displacement Field, Penalty Function

1. はじめに

トラス構造の解析では、変形法(DM : displacement method)^[1]が広く用いられている。この解析方法では、線形の変位場が仮定されており、その解は、線形計算において厳密解と一致する。したがって、骨組構造としてのトラス構造を対象とした微小変形の応力解析を行う場合、DM に変わる新しい解析法を開発しなければならない必要性はほとんどない。

しかし、トラス部材は、骨組構造のモデル化ばかりでなく、地盤中に設置されるアンカーなどの線材をモデル化する場合に対しても用いられることが多い。この場合、アンカーを表現するトラス要素は、地盤を表現する平面要素や立体要素と組み合わせて利用される。有限要素法(FEM : finite element method)による解析において、平面あるいは立体要素の自由度は節点(要素の頂点)に設けられており、トラス部材の自由度も同様に節点(部材端)に設けられている^[2]。このため、両要素を組み合わせる

場合でも、自由度の取扱いは同じである。

一方、斜面のすべりやコンクリートのクラックなどの不連続な現象を伴う問題の場合、節点に自由度を有しない離散化モデルが利用されている。離散化極限解析のための剛体ばねモデル(RBSM : rigid bodies-spring model)はその代表的なモデルである^[3]。RBSM は要素重心に自由度を設定しているが、自由度は剛体変位のみであるため、弾性解の精度がやや劣る^[4]。著者らは、この欠点を克服するため、要素の変形を考慮したハイブリッド型ペナルティ法(HPM : hybrid-type penalty method)を開発した^{[5][6]}。この要素も、自由度は要素重心に設定されており、剛体変位に加えて、ひずみやひずみの勾配も自由度となっている。DM や FEM のトラス要素は節点に自由度があるため、HPM の平面要素や立体要素との組合せは単純ではない。

そこで、本論文では、HPM による進行型破壊の解析にトラス要素を利用できるようにするため、HPM の平面要素や立体要素と同じ考え方の変位場を有し、

同じ手法で離散化する HPM のトラス要素を開発する。さらに、トラス部材を任意の角度をもって配置できるようにするため、長さや質量を持たず、剛体変位の自由度のみを有するピン要素を開発する。そして、簡単な解析例から、本要素を用いても、厳密解が得られることを示す。また、ピン要素で挟まれた部材の自由度を消去することで、変形法と同形式の部材係数行列（変形法では、部材剛性行列）が得られることを示す。

2. 基礎方程式とハイブリッド型仮想仕事式

トラス構造の支配方程式は以下で与えられる。

$$(釣り合い方程式) \quad \frac{dN}{dx} + q = 0 \quad (1)$$

$$(ひずみ-変位関係) \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2)$$

$$(応力-ひずみ関係) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \quad (3)$$

ここで、 N は軸力、 q は軸方向分布荷重、 u は軸方向変位、 ε は軸ひずみ、 E は縦弾性係数、 A は部材断面積、 σ は垂直応力である。

いま、仮想変位 δu を式(1)に掛け、全部材について積分すると以下の仮想仕事式が得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\int_{-l^{(e)}/2}^{l^{(e)}/2} (\delta \varepsilon N) dx - \int_{-l^{(e)}/2}^{l^{(e)}/2} (\delta u q) dx - (\delta u_a \bar{N}_a + \delta u_b \bar{N}_b) |_{\Gamma^{(e)}} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\forall \delta u \in V \quad V \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \delta u : \Omega \rightarrow R^1 \mid \delta u |_{\Gamma_u} = 0 \}$$

ここで、 M は部材数、 (e) は部材番号で $l^{(e)}$ は (e) 部材の部材長、 u_a, u_b は図.1 に示すように部材端の軸方向変位、 \bar{N}_a, \bar{N}_b は端点で与えられた断面力で、引張を正と考えている。また、 $\Gamma^{(e)}$ は、部材 (e) の部材端を、 Γ_u は変位が与えられる端点、すなわち、節点を意味している。

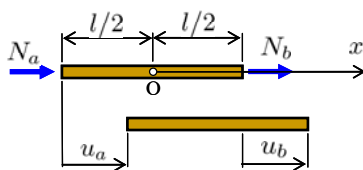


図.1 トラス部材

Fig.1 Truss member

さて、図.2 に示すような隣接する 2 つの部材 $\Omega^{(a)}, \Omega^{(b)}$ について考えてみる。

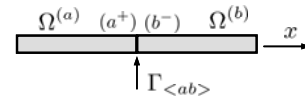


図.2 部材 $\Omega^{(a)}, \Omega^{(b)}$ とその境界 $\Gamma_{<ab>}$

Fig.2 Member $\Omega^{(a)}, \Omega^{(b)}$ and its boundary $\Gamma_{<ab>}$

いま、2 つの部材（領域） $\Omega^{(a)}, \Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ を以下のように定義する。

$$\Gamma_{<ab>} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (5)$$

このとき、この境界上で変位連続性に関する付帯条件は以下のように表される。

$$u^{(a^+)} = u^{(b^-)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (6)$$

ただし、 a^+ は、図.2 に示すように、部材(a)における座標軸 x の正側の端点、 b^- は部材(b)における座標軸 x の負側の端点を表している。

式(6)を、Lagrange の未定乗数 λ を用いて

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \lambda (u^{(a^+)} - u^{(b^-)}) dS \quad (7)$$

とし、式(4)の仮想仕事式に考慮すると、ハイブリッド型の仮想仕事式が以下のように得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\int_{-l^{(e)}/2}^{l^{(e)}/2} (\delta \varepsilon N) dx - \int_{-l^{(e)}/2}^{l^{(e)}/2} (\delta u q) dx - (\delta u_a \bar{N}_a + \delta u_b \bar{N}_b) |_{\Gamma^{(e)}} \right] - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda \cdot (u^{(a^+)} - u^{(b^-)}) dS \right) = 0 \quad (8)$$

ここで、 N は付帯条件を与える箇所の数である。上式の 1 行目が内部仕事の項を、2 行目が外部仕事の項を、3 行目が付帯条件による項を表している。

3. 離散化方程式の誘導

3.1 変位場と Lagrange の未定乗数

トラス部材の場合、線形変位場が正解となるので、

本研究でも、図.3 に示すように、部材中央の剛体変位 u_0 とひずみ ε_{x_0} を用いて以下のような線形の変位場を仮定する。

$$u = u_0 + (x - x_0)\varepsilon_{x_0} \quad (9)$$

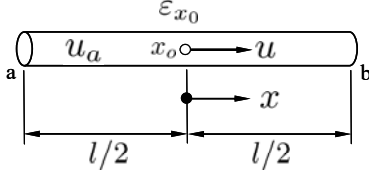


図.3 提案するトラス部材の自由度

Fig.3 Degree of freedom of proposed truss member

このとき、図.4 に示すような、はり端点における軸方向変位が以下のように求められる。

$$u^{(a^+)} = u_0^{(a)} + \frac{l^{(a)}}{2}\varepsilon_{x_0}^{(a)} \quad (10)$$

$$u^{(b^-)} = u_0^{(b)} - \frac{l^{(b)}}{2}\varepsilon_{x_0}^{(b)} \quad (11)$$

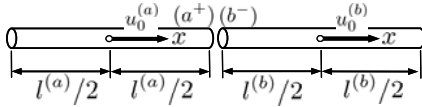


図.4 はり端点の変位

Fig.4 Displacement of the beam on the end point

したがって、はり端点における相対変位 $\delta_{<ab>}$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta_{<ab>} &= -u^{(a^+)} + u^{(b^-)} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -l^{(a)}/2 & 1 & -l^{(b)}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{(a)} \\ \varepsilon_{x_0}^{(a)} \\ u_0^{(b)} \\ \varepsilon_{x_0}^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

一方、Lagrange の未定乗数 λ は物理的には境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力、すなわち、トラス要素の場合は軸方向の断面力（軸力）を意味している。そこで、境界上の相対変位 $\delta_{<ab>}$ を用いて

$$\lambda_{<ab>} = p \cdot \delta_{<ab>} \quad (13)$$

と定義する。ここで、 p はペナルティ関数である。

3.2 離散化方程式

式(8)に式(9)~(13)の関係を代入することで離散化

方程式を誘導することができる。いま、式(4)の仮想仕事の式に式(9)を代入すると、該当する離散化結果が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \delta w &= [\delta u \quad \delta \varepsilon_x] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & EA l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \varepsilon_x \end{Bmatrix} \\ &= -[\delta u \quad \delta \varepsilon_x] \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -l/2 & l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_a \\ \bar{N}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l \\ 0 \end{Bmatrix} q \right) \quad (14) \end{aligned}$$

これを簡単に次のようにかく。

$$\delta W = \sum_{e=1}^M \left(\delta U^t K^{(e)} U - \delta U^t P_f^{(e)} - \delta U^t P_M^{(e)} \right) \quad (15)$$

一方、式(7)の付帯条件の式に関しても同様に、式(10)~(13)の関係を代入すると以下の離散化関係が得られる。

$$\begin{aligned} \delta h &= [\delta u^{(a)} \quad \delta \varepsilon_x^{(a)} \mid \delta u^{(b)} \quad \delta \varepsilon_x^{(b)}] \\ &\times p \begin{bmatrix} 1 & l^{(a)}/2 & -1 & l^{(b)}/2 \\ l^{(a)}/2 & l_{(a)}^2/4 & -l^{(a)}/2 & l^{(a)}l^{(b)}/4 \\ -1 & -l^{(a)}/2 & 1 & -l^{(b)}/2 \\ l^{(b)}/2 & l^{(a)}l^{(b)}/4 & -l^{(b)}/2 & l_{(b)}^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(a)} \\ \varepsilon_x^{(a)} \\ u^{(b)} \\ \varepsilon_x^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

これを簡単に次のようにかく。

$$\delta H = \sum_{s=1}^N \left(-\delta U^t K_{<s>} U \right) \quad (17)$$

以上の結果から、

$$\begin{aligned} \delta W + \delta H &= \delta U^t \left[\sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>} \right] U \\ &\quad - \delta U^t \left[\sum_{e=1}^M \left(P_f^{(e)} + P_M^{(e)} \right) \right] = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

となる。したがって、最終的に、以下の離散化方程式が得られる

$$KU = P \quad (19)$$

$$K = \sum_{e=1}^M K^{(e)} + \sum_{s=1}^N K_{<s>}, \quad P = \sum_{e=1}^M \left(P_f^{(e)} + P_M^{(e)} \right)$$

3.3 数値解析例

簡単な問題で精度の検証を行う。図.5 は解析に用いたモデル図と材料定数である。

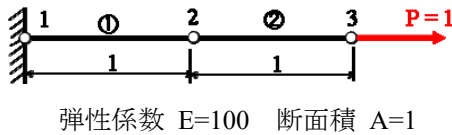


図.5 引張力を受けるトラス部材
Fig.5 Truss member subjecting tensile force

このとき、解析結果は次のようになった。

(変位) $U = \{ 0.00 \quad 0.01 \quad 0.02 \}^t$
 (軸力) $-N_a^{(1)} = N_b^{(1)} = 1.000, -N_a^{(2)} = N_b^{(2)} = 1.000$
 (反力) $R = -1.000$

いずれも、厳密解と一致する結果となった。

4. ピン要素と座標変換

4.1 ピン要素

図.5 の問題のように、部材が一直線につながっている場合は、図.4 の関係により導かれた離散化方程式(19)を解くことで解が得られる。しかし、一般的なトラス構造では、部材が三角形ネットに組み立てられているため、図.4 の状態で求められた離散化方程式を利用することはできない。

そこで、長さも質量も持たず、自由度が剛体変位のみのピン状の要素を考える。

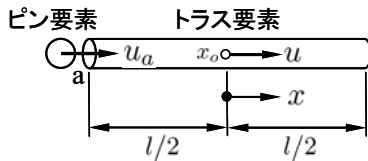


図.6 ピン要素 (a 端)
Fig.6 Pin element (a end)

図.6 はトラス部材の a 端にピン要素が配置された場合が示されている。このときの a 端における相対変位は以下のように表される。

$$\delta_{<a>} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

この関係を用いて式(7)で示される付帯条件の関係を求めると以下ようになる。

$$K_{<a>} U_{<a>} = p \begin{bmatrix} 1 & -1 & l/2 \\ -1 & 1 & -l/2 \\ l/2 & -l/2 & l^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

一方、ピン要素の部材剛性行列は 0 となるため、図.6 の状態の部材剛性行列は以下ようになる。

$$K^{(a)} + K^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EAl^{(e)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

ピン要素が a 端側に配置された場合の離散化方程式は、式(21)(22)の関係を用いて式(19)を作成すれば求められる。

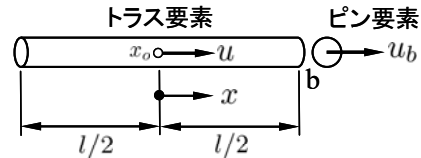


図.7 ピン要素 (b 端)
Fig.7 Pin element (b end)

同様に b 端にピン要素が配置された場合を図.7 に示す。このときの b 端における相対変位は以下のように表される。

$$\delta_{} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -l/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

また、付帯条件の関係は以下ようになる。

$$K_{} U_{} = p \begin{bmatrix} 1 & -1 & -l/2 \\ -1 & 1 & l/2 \\ -l/2 & l/2 & l^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

部材剛性行列も以下ようになる。

$$K^{(b)} + K^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EAl^{(e)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

b 端側にピン要素が配置された場合の離散化方程式も、同様に、式(24)(25)の関係を用いて式(19)を作成すれば求められる。

4.2 座標変換

部材が角度を持って配置されている場合の取扱いについて説明する。図.8は、ピン要素を挟んで、トラス部材が θ_1 と θ_2 の角度を持って配置されている例である。

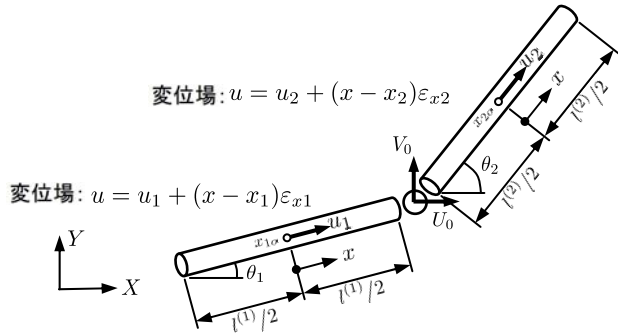


図.8 ピン要素を含む部材の座標変換

Fig.8 Coordinate transformation of the member containing a pin element

図.8 に示すように $X - Y$ 座標系を全体座標系とし、ピン要素の自由度を全体座標系の剛体変位成分(U_0, V_0)で表す。いま、このピン要素の変位を1要素側の u_1 方向の成分 u_{01} に座標変換すると以下のようになる。

$$u_{01} = \cos \theta_1 U_0 + \sin \theta_1 V_0 \quad (26)$$

このとき、ピン要素と1要素の局所座標系(x)の相対変位 δ_{01} は式(23)より次のように表すことができる。

$$\delta_{01} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -l^{(1)}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ u_1 \\ \varepsilon_{x1} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

この関係を用いれば、式(24)に該当する付帯条件の関係が以下のように求まる。

$$K_{<01>U_{<01>}} = p \begin{bmatrix} C_1^2 & C_1 S_1 & -C_1 & -C_1 l^{(1)}/2 \\ C_1 S_1 & S_1^2 & -S_1 & -S_1 l^{(1)}/2 \\ -C_1 & -S_1 & 1 & l^{(1)}/2 \\ -C_1 l^{(1)}/2 & -S_1 l^{(1)}/2 & l^{(1)}/2 & l_{(1)}^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ u_1 \\ \varepsilon_{x1} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

ただし、 $S_1 = \sin \theta_1, C_1 = \cos \theta_1$

同様に、ピン要素の変位を2要素側の u_2 方向の成分 u_{02} に座標変換すると以下ようになる。

$$u_{02} = \cos \theta_2 U_0 + \sin \theta_2 V_0 \quad (29)$$

このとき、ピン要素と2要素の局所座標系(x)の相対変位 δ_{02} は式(20)より次のように表すことができる。

$$\delta_{02} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -l^{(2)}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ u_2 \\ \varepsilon_{x2} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

したがって、式(21)に該当する付帯条件の関係が以下のように求まる。

$$K_{<02>U_{<02>}} = p \begin{bmatrix} C_2^2 & C_2 S_2 & -C_2 & C_2 l^{(2)}/2 \\ C_2 S_2 & S_2^2 & -S_2 & S_2 l^{(2)}/2 \\ -C_2 & -S_2 & 1 & -l^{(2)}/2 \\ C_2 l^{(2)}/2 & S_2 l^{(2)}/2 & -l^{(2)}/2 & l_{(2)}^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ u_1 \\ \varepsilon_{x1} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ただし、 $S_2 = \sin \theta_2, C_2 = \cos \theta_2$

以上のように、式(24)(25)の代わりに、式(28)(31)を用いて式(19)を作成すれば、任意の角度に配置されたトラス部材に関する離散化方程式が得られる。

4.3 数値計算例

ピン要素を用いた場合の解の精度を検証するため、図.9に示す、単純トラスの解析を行った。○内の数字が部材番号で、図のように、ピン要素にも部材番号が付けられている。

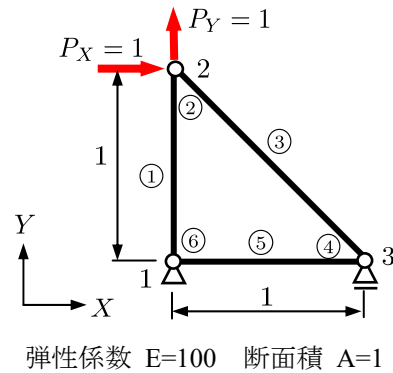


図.9 単純トラス構造の解析モデル
Fig.9 Numerical model for simple truss

解析結果は以下のとおりで、表示した桁数の範囲内において厳密解と一致している。ただし、変位はピン要素の剛体変位、軸力はトラス要素の軸力である。

(変位)

$$U = \left\{ U_{02} \quad V_{06} \quad U_{04} \quad V_{04} \quad U_{06} \quad V_{06} \right\} \\ = \left\{ (0), (0), 5.82844 \times 10^{-2}, 2 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-2}, (0) \right\}^t$$

(軸力)

$$-N_a^{(1)} = N_b^{(1)} = 2.000$$

$$-N_a^{(3)} = N_b^{(3)} = 1.414$$

$$-N_a^{(5)} = N_b^{(5)} = 1.000$$

(反力)

$$\left\{ R_{X1} \quad R_{Y1} \quad R_{Y3} \right\} = \left\{ -1.000 \quad -2.000 \quad 1.000 \right\}$$

5. ピン要素の自由度のみで表されたトラス構造

5.1 内点消去要素

通常、トラス要素を平面要素や立体要素と組み合わせる場合、4章までの展開で求めた関係で済む。ここでは、HPMのトラス要素の特徴をさらに理解するため、変形法と同等の自由度による係数行列を作成し、変形法の剛性行列との相違を検討する。

いま、図.10に示すように、トラス要素の両端にピン要素が配置されている構造について考える。

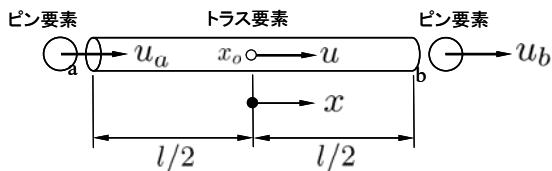


図.10 両端にピン要素を持つトラス要素

Fig.10 Truss element with the pin elements at both ends

このとき、式(21)(22)(24)(25)の関係が成立している。これらをまとめると次のように関係が得られる。

$$p \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & l/2 \\ 0 & 1 & -1 & -l/2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ l/2 & -l/2 & 0 & l^2/2 + EA/p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ N_b \\ N_0 \\ N_{\varepsilon_0} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

ここで、 p はペナルティ関数、 E は弾性係数、 A は断面積、 $N_a, N_b, N_0, N_{\varepsilon_0}$ はそれぞれの要素に働いている

荷重である。

さて、トラス構造の特徴から図.10のトラス要素に接続するのは、隣接するピン要素以外はない。すなわち、式(32)において、トラス要素の自由度 u_0, ε_{x_0} は、隣接するピン要素の自由度 u_a, u_b によって表すことができる。

いま、式(32)をベクトル形式で表すと次のようになる。

$$K_{11} \mathbf{u}_{ab} + K_{12} \mathbf{u}_0 = N_{ab} \quad (33)$$

$$K_{21} \mathbf{u}_{ab} + K_{22} \mathbf{u}_0 = N_0 \quad (34)$$

ここで、

$$\mathbf{u}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \varepsilon_{x_0} \end{Bmatrix}$$

$$N_{ab} = \begin{Bmatrix} N_a \\ N_b \end{Bmatrix}, \quad N_0 = \begin{Bmatrix} N_0 \\ N_{\varepsilon_0} \end{Bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} K_{11} & K_{12} & & \\ K_{21} & K_{22} & & \end{array} \right] = p \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & l/2 \\ 0 & 1 & -1 & -l/2 \\ \hline -1 & -1 & 2 & 0 \\ l/2 & -l/2 & 0 & l^2/2 + EA/p \end{array} \right]$$

式(34)から、トラス要素の自由度 \mathbf{u}_0 が、ピン要素の自由度 \mathbf{u}_{ab} によって以下のように表される。

$$\mathbf{u}_0 = K_{22}^{-1} (N_0 - K_{21} \mathbf{u}_{ab}) \quad (35)$$

この結果を式(33)に代入すると、 \mathbf{u}_{ab} に関する方程式が以下のように得られる。

$$(K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) \mathbf{u}_{ab} \\ = N_{ab} - K_{12} K_{22}^{-1} N_0 \quad (36)$$

具体的に式(36)を計算してみると、以下のように表される。

$$\frac{p}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{D} & -1 + \frac{1}{D} \\ -1 + \frac{1}{D} & 1 - \frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} N_a \\ N_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{N_0}{2} - \frac{N_{\varepsilon_0}}{lD} \\ \frac{N_0}{2} + \frac{N_{\varepsilon_0}}{lD} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

$$\text{ただし、} D = \frac{2EA}{pl} + 1$$

5.2 解の精度

いま、左辺の係数行列をさらに詳しく眺めてみる

と以下の関係にあることが分かる。

$$\frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{D} \right) = \frac{EA}{l + \frac{2EA}{p}} \quad (38)$$

HPM では、ペナルティ関数を用いて変位の連続性を確保している。式(38)においてペナルティ関数 p を非常に大きな数字と考えれば、分母の第 2 項は 0 に近づき、変形法の係数と一致することがわかる。

このことから、ペナルティ関数の値を軸剛性の 10^6 程度にとると、有効数字 6 桁程度の精度になることがわかる。HPM では、通常、 $10^6 \sim 10^8$ 程度の値を用いていることが多い。

5.3 数値計算例

5.2 で述べた精度を簡単な計算例で確認する。いま、式(37)を簡単に

$$\mathbf{N} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (39)$$

とする。ここで、 \mathbf{u} は、図.10 に示すように、局所座標系で表されたピン要素の軸方向変位である。

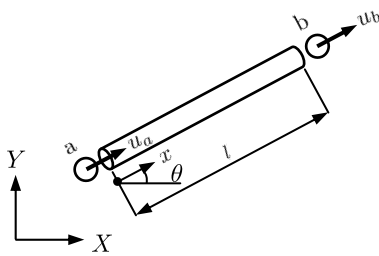


図.11 座標変換

Fig.11 Coordinate transformation

いま、図.11 のように、部材が θ だけ傾斜して配置されている場合について考えてみる。局所座標系における a 端の変位 u_a は、全体座標系の変位 $\mathbf{U} = (U_a, U_b)$ によって、次のように表される。

$$u_a = \cos \theta \cdot U_a + \sin \theta \cdot V_a \quad (40)$$

b 端についても同様な関係が成り立つ。これらを簡単に次のように書く。

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (41)$$

ここで、 \mathbf{R} は座標変換行列である。

同様に、軸方向力についても以下の座標変換の関係がある。

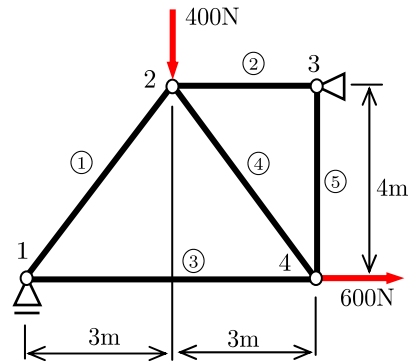
$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^t \mathbf{N} \quad (42)$$

ここで、 \mathbf{X} は、軸方向力 \mathbf{N} を X, Y 方向に力の分解をした成分を表している。

以上から、式(39)に対応する傾斜した部材の係数行列は、以下ようになる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^t \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (43)$$

以上の内点を消去した関係を用いて、図.12 に示すトラス構造の解析を行う。寸法、材料定数は図に示すとおりである。



弾性係数 $E=1000\text{N/m}^2$

断面積 $A=10\text{m}^2$

図.12 内点を消去した解析モデル

Fig.12 Numerical model without inner point

表.1 は変位に関する解析結果を示した表である。ペナルティ関数を軸剛性の 10^4 倍と 10^6 倍した時の結果と変形法による結果を比較している。 u が x 方向変位、 v が y 方向変位を表している。

表.1 解析結果 (変位 : m)

Table.1 Numerical result (displacement : m)

節点	$p = EA \times 10^4$		$p = EA \times 10^6$		変形法	
	u	v	u	v	u	v
1	0.515027	0	0.515	0	0.515	0
2	0.180012	-0.21751	0.18	-0.2175	0.18	-0.2175
3	0	0	0	0	0	0
4	0.785036	0.080004	0.785	0.08	0.785	0.08

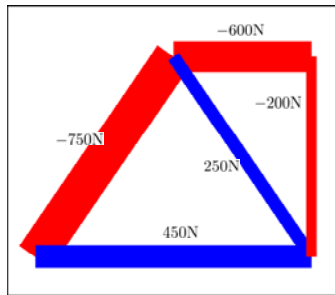


図.13 解析結果 (軸力)

Fig.13 Numerical result (Axial force)

ペナルティ関数が 10^4 倍の場合は、有効数字 5 桁目あたりに誤差が生じているが、 10^6 倍の場合は、変形法による解と一致した。なお、計算は倍精度計算を行っている。

図.13 は断面力 (軸力) の解析結果である。軸力はどの解析においても、図に示す値となり、違いは見られない。図.14 は、変位モードを表した図である。破線がもとの構造、実線が変形後の構造を表している。

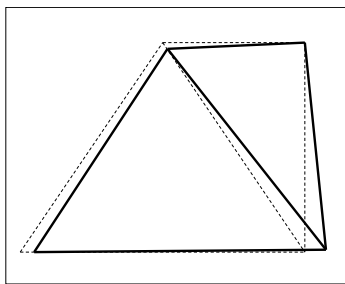


図.14 変位モード

Fig.14 Displacement mode

6. まとめ

本論文では、HPM の平面要素や立体要素と同じ形式の変位場を有し、同じ手法で離散化する HPM のトラス要素を開発した。変位場として、線形の変位場を用いるため、自由度数は、従来の変形法による

解析と同じになる。さらに、トラス部材が任意の角度を持って配置された場合に対応するため、剛体自由度のみ有するピン要素を開発した。

続いて、トラス部材の両端にピン要素を配置し、内部のトラス部材の自由度を消去する方法を示し、変形法の剛性行列との違いを調べた。その結果、ペナルティ関数の値が十分大きければ、変形法と同等の剛性行列が得られることが示された。具体的な数値計算例でも、ペナルティ関数を軸剛性の 10^4 倍とすると 5 桁目あたりから誤差が生じたが、 10^6 倍とすると変形法による解と一致した。

以上のように、本モデルは変形法のトラス要素と同等の精度で利用可能である。

参考文献

- [1]例えば H.,C.,Martin : Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGRAW-Hill Book , 1966.
- [2]例えば、竹内則雄、樫山和男、寺田賢二郎：計算力学 (第 2 版)、森北出版株式会社、2012.
- [3]T.,Kawai : New element models in discrete structural analysis, *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, No.141, pp.187-193, 1977.
- [4]N.,Takeuchi,Y.,Tajiri and H.,Hamasaki : Development of modified RBSM for rock mechanics using principle of hybrid-type virtual work, *Analysis of Discontinuous Deformation : New Developments and Applications*, Research Publishing Service, pp.395-403, 2009.
- [5]竹内則雄、草深守人、武田洋、佐藤一雄、川井忠彦：ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析、土木学会構造工学論文集、Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- [6]竹内則雄、大木裕久、上林厚志、草深守人：ハイブリッド型変位モデルによる材料非線形解析、日本計算工学会論文集、(Transactions of JSCES Paper No.20010002), pp.53-62, 2001.