

1次元・2次元弾性体におけるCIP法による波動境界処理

Wave Transmitting Boundary by CIP Method in One and Two Dimensional Elastic Solids

田嶋 慶介¹⁾ 吉田 長行²⁾
Keisuke Tajima, Nagayuki Yoshida

- ¹⁾ 法政大学大学院工学研究科建設工学専攻
²⁾ 法政大学工学部建築学科

When analyzing the wave propagation problem in the infinite or semi-infinite elastic solids, the numerical device which can transmit the outgoing waves should be attached to the boundary of the finite analytical region. Generally the discrete models are installed at the boundary. But, in this research, we propose a new method which combines the CIP method to the finite element method. Its validity is presented by analyzing one dimensional rod model subjected the impulse load, and two dimensional ground model loaded in also analyzed.

Keywords : Soil-Structure-Interaction Analysis, Wave Transmitting Boundary, CIP Method, FEM

1. はじめに

近年、地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている^{[1][2][3]}。非線形問題を扱う場合、有限要素法(FEM)が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている。しかしながら、有限要素法は本来、有限領域を対象とする数値解析手法である。そのため、無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には、Fig.1のように内部から外部に逸散する波動が、境界領域で反射しないための工夫が必要である。このような、有限な狭領域で逸散波を完全透過できる境界処理法は確立されておらず、実現すれば地盤と建物の解析効率を大幅に改善できる^{[4][5]}。

この境界処理法として、境界にダッシュポットを設ける粘性境界が代表的であるが、本研究では、CIP(Constrained Interpolation Profile)法を用いた新しい境界処理法の確立を目指している^{[6][7]}。CIP法は移流方程式を解く解法であり、有限要素法とは異なる分野で用いられている。そこで、如何にして有限要素法とCIP法を組み合わせるかが焦点となる。また、3次元への飛躍を見据えた地盤の解析を目的とし、その足がかりを得るために、1次元棒材モデルと2次元地盤モデルを用いて手法の提案と検討を行っている^[8]。

以下に本論文の解析式に用いる諸量をまとめておく。

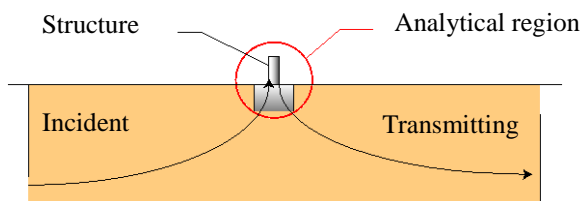


Fig.1 Analytical region

Notation

- $[M]$: mass matrix
 $[C]$: damping matrix
 $[K]$: stiffness matrix
 $\{x\}$: displacement vector
 $\{f\}$: impulsive force vector
 i : nodal number

- $\{u\}_n$: displacement vector in n -dimension
- $\{\sigma\}_n$: stress vector in n -dimension
- $\{\varepsilon\}_n$: strain vector in n -dimension
- $[D]_n$: stress-strain matrix in n -dimension
- $[\partial]_n$: matrix of partial differentiation

2. 研究方法

2.1 解析モデル

2.1.1 1次元棒材モデル

1次元解析におけるモデル図 (Fig.2) と材料特性 (Table 1) を以下に示す。両端を自由端とし、右端を波動透過境界面とする。質点番号 n を左端より 1~100 とする。

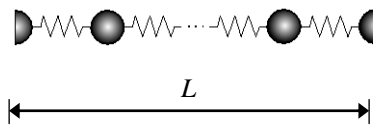


Fig.2 1D analytical model

Table 1 The material property (1D)

L	Length	99m
c_s	S wave velocity	120m / s
ρ	Density	1500kg / m ³
A	Section area	1m ²
ν	Poisson ratio	0.4
N	Number of nod	100

2.1.2 2次元地盤格子モデル

2次元解析におけるモデル図 (Fig.3) と材料特性 (Table 2) を以下に示す。モデル端部全面を自由端とし、波動透過境界面とする。

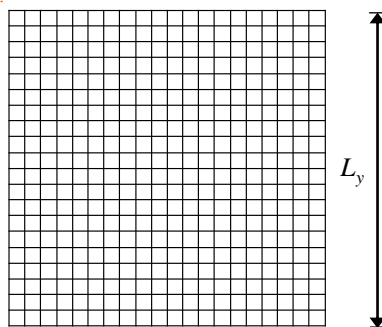


Fig.3 2D analytical model

Table 2 The material property (2D)

L_x, L_y	Length	20m
c_s	SH wave velocity	120m / s
ρ	Density	1500kg / m ³
t	Thickness	1m
ν	Poisson ratio	0.4
N	Number of nod	421

2.2 マトリクス運動方程式

1次元棒材モデルを例に、有限要素法による運動方程式を以下に示す。なお、2次元地盤モデルは割愛するが、1次元と基本的には同じである。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \tag{1}$$

ここに、

質量マトリクス要素 : $m = \rho AL / (N - 1)$

剛性マトリクス要素 : $k = GAn / L$

$$[M] = \begin{bmatrix} m/2 & & & & \\ & m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m & \\ & & & & m/2 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2k & -k \\ & & & -k & k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\{f\} = [0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0]^T, \quad f_i = m_i \ddot{x}_{i0}$$

尚、後の解析では断らない限り、レイリー減衰 $h = 0.01$ (1%) を導入する。

2.3 時刻歴応答解析

振動方程式 (式(1)) の時刻歴応答解 $\{x\}$ は線形加速度法により求められる。1次元の場合は任意の質点 n に、2次元の場合はモデル中心部に、初期条件として単位インパルスを以下のように与える。

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1 & ; t = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 & ; t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

2.4 CIP法による弾性体の波動方程式

2.4.1 弾性体の波動方程式

$n(=1,2,3)$ 次元の弾性体における振動方程式は、以

下のように表される。

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}_n = \partial [{}_n \sigma] \quad (4)$$

$$\{\sigma\}_n = D [{}_n \varepsilon] \quad \text{も } \mathcal{D} \partial [{}_n^T] \quad (5)$$

また、式(4)を

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}_n = \frac{1}{\rho} \partial [{}_n \sigma] \quad (6)$$

と展開し、式(6)を代入した式を波動方程式と呼ぶ。

2.4.2 波動方程式から移流方程式への変換

式(5)、(6)の振動方程式は、[0]を任意のゼロマトリクス、[I]を任意の単位マトリクスとおくと、まとめて次のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n = \begin{bmatrix} [0] & \frac{1}{\rho} [I] \\ [D]_n & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\partial]_n^T & [0] \\ [0] & [\partial]_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n \quad (7)$$

または、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n = [A]_n [Q]_n \{F\}_n \quad (8)$$

となる。ただし、

$$\{F\}_n = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \sigma \end{Bmatrix}_n, \quad [A]_n = \begin{bmatrix} [0] & \frac{1}{\rho} [I] \\ [D]_n & [0] \end{bmatrix},$$

$$[Q]_n = \begin{bmatrix} [\partial]_n^T & [0] \\ [0] & [\partial]_n \end{bmatrix}$$

とする。また、[Q]_nはx、y、z方向微分に分解して表現することが出来る。

$$\begin{aligned} [Q]_n &= [Q_x]_n + [Q_y]_n + [Q_z]_n \\ &= [q_x]_n \frac{\partial}{\partial x} + [q_y]_n \frac{\partial}{\partial y} + [q_z]_n \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (9)$$

これにより、式(8)は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n &= [A]_n [q_x]_n \frac{\partial}{\partial x} \{F\}_n + [A]_n [q_y]_n \frac{\partial}{\partial y} \{F\}_n \\ &\quad + [A]_n [q_z]_n \frac{\partial}{\partial z} \{F\}_n \end{aligned} \quad (10)$$

最終的には以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n &= [A_x]_n \frac{\partial}{\partial x} \{F\}_n + [A_y]_n \frac{\partial}{\partial y} \{F\}_n \\ &\quad + [A_z]_n \frac{\partial}{\partial z} \{F\}_n \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$[A_i]_n = [A]_n [q_i]_n, \quad i = x, y, z$$

とする。

次に、式(11)の対角化を行うために、次の固有値問題を考える。

$$[A_i]_n \{F\}_n = \lambda_i \{F\}_n, \quad i = x, y, z \quad (12)$$

上式より得られる固有値 λ_i を対角にならべたマトリクス $[\Lambda_i]$ と、固有ベクトルを並べた固有マトリクス $[\varphi_i]$ を用いると次式が成立する。

$$[\varphi_i]^{-1} [A_i]_n [\varphi_i] = [\Lambda_i], \quad i = x, y, z \quad (13)$$

また、式(11)を3つに分解することを考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n = [A_x]_n \frac{\partial}{\partial x} \{F\}_n \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n = [A_y]_n \frac{\partial}{\partial y} \{F\}_n \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\}_n = [A_z]_n \frac{\partial}{\partial z} \{F\}_n \quad (16)$$

ここで、 $\{F\}_n = [\varphi_x]_n \{f_x\}_n$ とおくと、x方向移流方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f_x\}_n = [\Lambda_x] \frac{\partial}{\partial x} \{f_x\}_n \quad (17)$$

同様に、 $\{F\}_n = [\varphi_y]_n \{f_y\}_n$ とおくと、y方向移流方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f_y\}_n = [\Lambda_y] \frac{\partial}{\partial y} \{f_y\}_n \quad (18)$$

同様に、 $\{F\}_n = [\varphi_z]_n \{f_z\}_n$ とおくと、z方向移流方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f_z\}_n = [\Lambda_z] \frac{\partial}{\partial z} \{f_z\}_n \quad (19)$$

2.5 解析手法 (CIP法の利用法)

CIP法の「無反射境界条件を考慮する必要はまったくない」という特徴を利用し、有限要素法解析の境界面において反射が生じるという欠点を補う手法の提案を行う。

具体的には、無限地盤を任意の位置で区切り境界を設けると、本来ならば波動が通過する際に、そこに作用するのであろう力が働かなくなる。本手法は、その力をCIP法によって導き出し、作用させることで、波動が境界面を透過する効果を得ようとするものである。

本研究では、有限要素法、CIP法、線形加速度法

を用いている。以下、解析手法を①～⑥の手順で説明する。

- ① $t=0$ の時、初期外力 $\{f\}$ を与え、F.E.Mにより得られる $\{u\}_n$ 、 $\{\sigma\}_n$ より、CIP法に用いる移流方程式(式(17), (18), (19))を求める。
- ② CIP法により Δt 秒間移流させ、データの保存。
- ③ 移流後のCIP法においてモデル境界部にあたる箇所に作用している $\{\sigma\}_n$ を、モデル境界部に透過処理外力として与える。
- ④ 線形加速度法により Δt 秒間解析を行う。
- ⑤ ④で更新された $\{u\}_n$ 、 $\{\sigma\}_n$ を、②のデータに上書きする。
- ⑥ 以降、②～⑤を t 秒間繰り返す。

3. 解析結果

3.1 1次元棒材モデル - S波問題 -

1次元S波問題における、1次元棒材モデル(Fig.2参照)の時刻歴応答解析結果を示す。質点数を100、質点間距離を1[m]とし、解析を行っている。

3.1.1 境界処理を行っていない場合の解析結果

質点1に初期外力を与え、境界処理を適用しない場合における、質点1の時刻歴変位挙動をFig.4に示す。右端からの反射波第1波、第2波の影響が見られる。CIP法を利用して、この反射をなくすことが本研究の目的である。

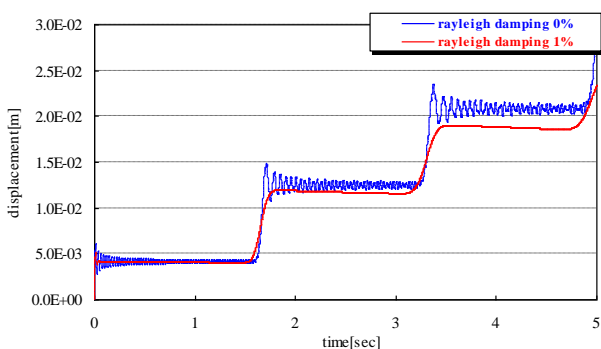


Fig.4 Displacement behavior of nod 1 (1D)

3.1.2 境界処理を行った場合の解析結果

□放射波問題

質点1に初期外力を与え、境界処理を適用した場合における、質点1の時刻歴変位挙動をFig.5に、全質点の挙動を次頁のFig.7に示す。

Fig.5,7は、有限要素法領域から外部に向けて、ほぼ完全な波動透過が実現していることを示す。

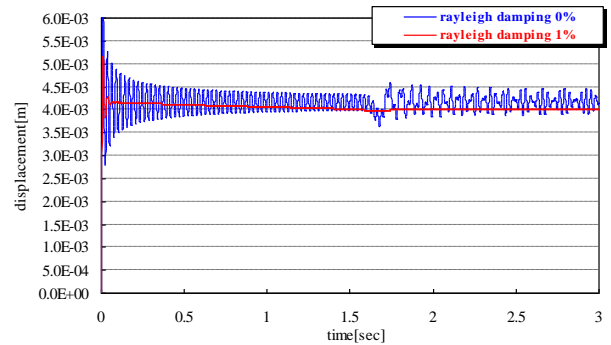


Fig.5 Displacement behavior of nod 1 (1D with CIP)

□入射波問題

質点100に初期外力を与え、境界処理を適用した場合における、質点100の時刻歴変位挙動をFig.6に示す。図より、左端での自由端反射波が右端において波動透過していることが分かる。

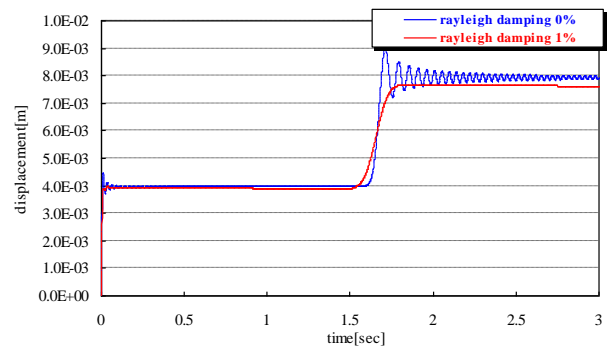


Fig.6 Displacement behavior of nod 100 (1D with CIP)

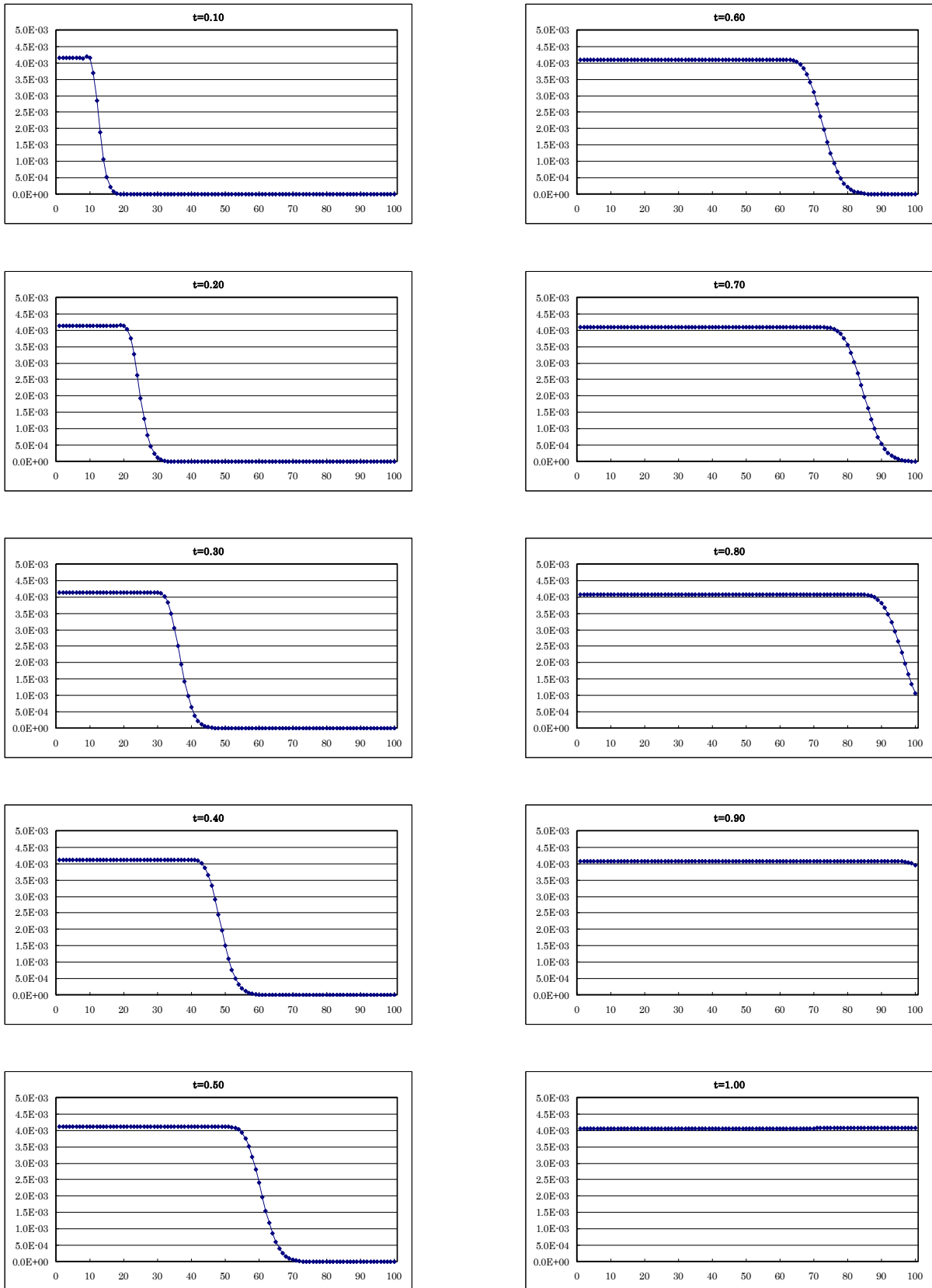


Fig.7 Displacement behavior of all nod (1D with CIP)

□初期外力入力点別比較

境界処理を適用した場合において、初期外力入力点別（質点 $n=1\sim 100$ ）の、質点 100 の時刻歴変位挙動を Fig.8 に示す。

無限遠から質点 $n=100$ を通過して $n=1$ の自由端に入射してくる波動の入力位置は、 $n=98$ 以下の内部質点が適切である。最右端の 2 質点を入力点に選ぶと、右端遠方への波動透過を邪魔して大きな誤差を生むので注意が必要である。

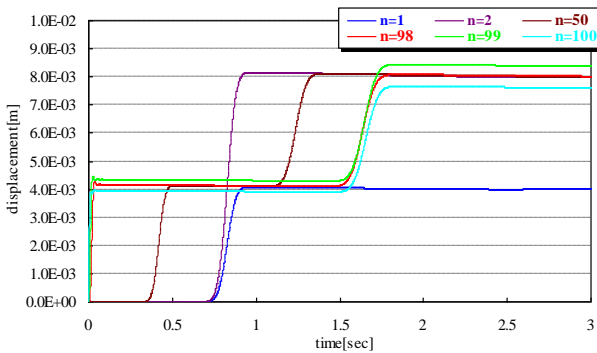


Fig.8 Displacement behavior of nod 100 (1D with CIP, input nod: $n = 1 \sim 100$)

3.2 2次地盤格子モデル - SH 波問題 -

2次元 SH 波問題における、2次元地盤モデル (Fig.3 参照) の時刻歴応答解析結果を示す。分割数 20×20 、質点間距離を 1[m]とした格子モデルを用い、解析を行っている。

3.2.1 境界処理を行っていない場合の解析結果

中央質点 A に初期外力を与え、境界処理を適用しない場合における、質点 A の時刻歴変位挙動を Fig.9 に示す。周辺自由端の有限領域であるため、振動しながら等速剛体運動に遷移していく様子が示されている。

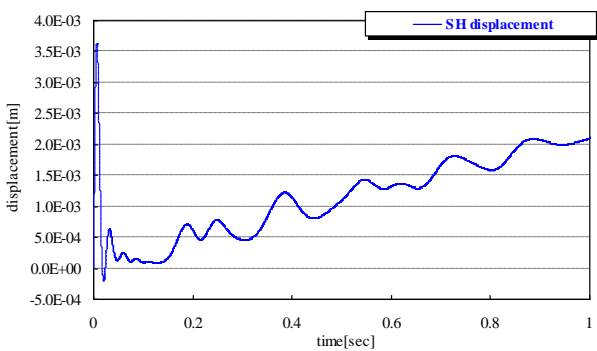


Fig.9 Displacement behavior of nod A (2D)

3.2.2 境界処理を行った場合の解析結果

モデル中央の質点 A に初期外力を与え、境界処理を適用した場合における、質点 A の時刻歴変位挙動を Fig.10 に示す。ここでは、境界処理の効果により、振動しながらも、速やかに運動の停止が実現している。

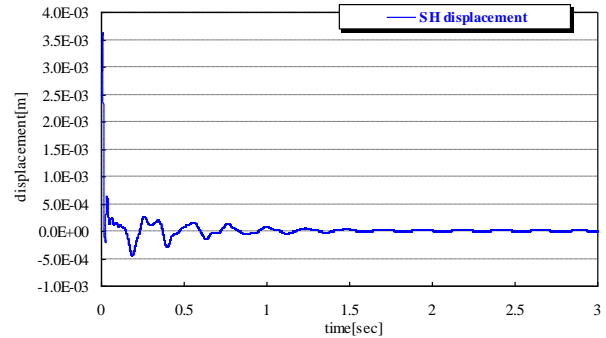


Fig.10 Displacement behavior of nod A (2D with CIP)

4. 考察

4.1 1次元解析について

4.1.1 解析手法について

両端自由端振動の振動応答は Fig.4 のように階段状に推移していく。CIP 法により得られた応力をモデル右端 (波動透過境界面) に透過処理外力として与えることにより、この階段状に上っていく推移を抑える効果が得られた。すなわち、波動を透過させることと同等の効果が得られたと言える。

4.1.2 理論解との比較

解析解と理論解とを比較検証する。下図 (Fig.11) に見られるように、解析解が理論解に一致していることから、本手法が境界処理法として有効な手法であることが言える。

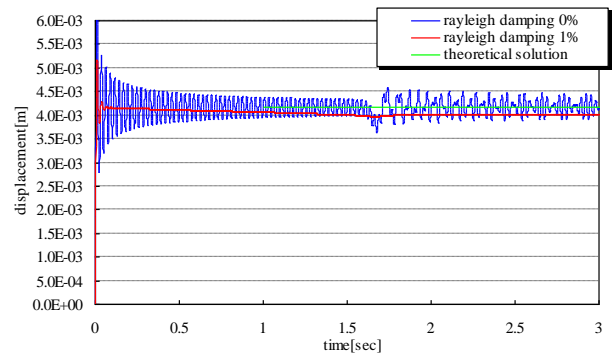


Fig.11 Displacement behavior of nod 1 (1D comparison)

4.2 2次元解析について

4.2.1 解析手法について

2次元地盤格子モデルにおいても、波動境界処理が有効に行われていると言える。

4.2.2 理論解との比較

2次元地盤格子モデルにおいて、解析解と理論解[9]とを比較検証する。下図（Fig.12）に見られるように、解析解が理論解に近い挙動を示している。しかし、境界面（モデル端部）において、多少の反射が見られる。

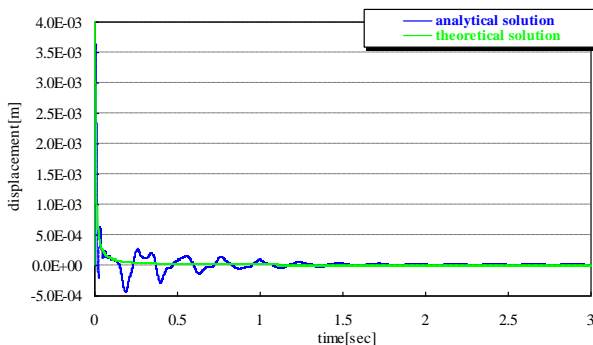


Fig.12 Displacement behavior of nod A (2D comparison)

5. 結論

1次元棒材モデルで手法を検討した結果、有限要素法解析において、波動境界処理としてCIP法を用いることの有効性を確認できた。また、1次元解析においては、本研究の目的を果たしたと言える。

2次元地盤格子モデルにおいては、本手法による波動境界処理を完全なものと言えない。しかし、CIP法を用いることの有効性は十分確認できた。この結果は、格子モデルを用いることで、1次元解析における応力値の算出方法と同様な方法を用いたことに起因すると考えられる。

今後は、SH波問題における2次元地盤格子モデルの精度の改善と、有限要素モデルとCIP法処理の結合法の確立、更にP・SV波問題に対する拡張などが重要な課題である。

参考文献

- [1]日本建築学会，“地盤振動-現象と理論-”，日本建築学会，pp.180-295，2005。
 [2]日本建築学会，“建築と地盤の動的相互作用を考慮した応答結果と耐震設計”，日本建築学会，pp.11-55，2006。

- [3]日本建築学会，“入門・建物と地盤との動的相互作用”，日本建築学会，pp.1-111，1996。
 [4]伊野慎二,吉田長行，“波動透過境界の最適化に関する研究”，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集，Vol.21，pp.101-108，2008。
 [5]古谷忍,吉田長行，“最適化手法による波動透過境界処理に関する研究”，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集，Vol. 22，pp.55-61，2009。
 [6]矢部孝,内海隆行,尾形陽一，“CIP法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法 -”，森北出版，2003。
 [7]矢部孝,尾形陽一,滝沢研二，“CIP法とJAVAによるCGシミュレーション”，森北出版，2007年
 [8]田嶋慶介,吉田長行，“CIP法による波動透過境界処理に関する研究”，法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol. 23，pp.73-80，2010。
 [9]Karl F. Graff，“Wave Motion in Elastic Solids,” 1991。