

CIP 法による波動透過境界処理に関する研究

A Study on Wave Transmitting Boundary by CIP Method

田嶋 慶介¹⁾ 吉田 長行²⁾
Keisuke Tajima, Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院工学研究科建設工学

²⁾ 法政大学デザイン工学部建築学科

When analyzing the wave propagation problem in the infinite or semi-infinite elastic body, the numerical device which can transmit the outgoing waves should be attached to the boundary of the finite analytical region. Generally the discrete models are installed at the boundary. But, in this research, we propose a new method which combines the CIP method to the finite element method. Its validity is presented by analyzing one-dimensional rod subjected the impulse load at one end.

Keywords : Soil-Structure-Interaction Analysis, Wave Transmitting boundary, CIP Method, F.E.M.

1. はじめに

近年、地盤の非線形な動的挙動が活発に研究されている[1][2][3]。非線形問題を扱う場合、有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることはよく知られている。しかしながら、有限要素法は本来、有限領域を対象とする数値解析手法である。そのため、無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には、Fig.1 のように内部から外部に逸散する波動が、境界領域で反射しないための工夫が必要である。このような、有限な狭領域で逸散波を完全透過できる境界処理法は確立されておらず、実現すれば地盤と建物の解析効率に有益をもたらせる[4][5]。

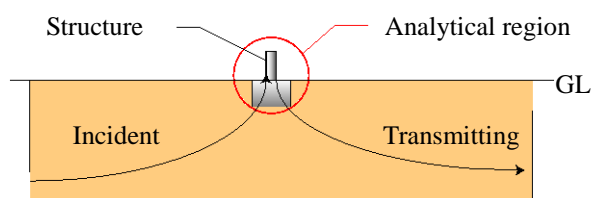


Fig.1 Analytical region

この境界処理法として、境界にダッシュポットを設ける粘性境界が代表的であるが、本研究では、CIP(Constrained Interpolation Profile)法を用いた

新しい境界処理法の確立を目指している[6][7]。CIP法は移流方程式を解く解法であり、有限要素法とは異なる分野で用いられている。そこで、如何にして有限要素法とCIP法を組み合わせるかが焦点となる。また、1次元・3次元への飛躍を見据えた地盤の解析を目的とし、その足がかりを得るために、1次元棒材モデルを用いて手法の提案と検討を行っている。

2. 1次元半無限棒材解析方法

2.1 1次元解析モデル

1次元棒材特性

S波速度 : $c_s = 120 [m/s]$

密度 : $\rho = 1500 [kg/m^3]$

断面積 : $A = 1 [m^2]$

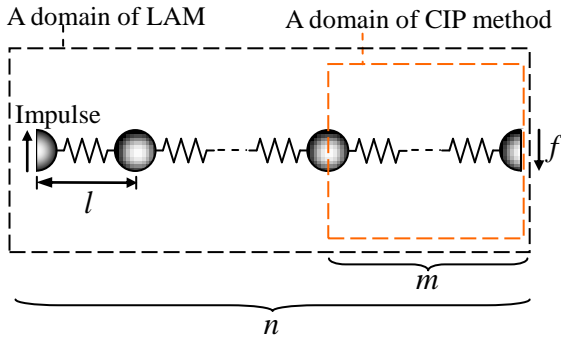


Fig.2 1D analytical model

2.2 マトリクス運動方程式

非比例減衰を扱う棒材の振動方程式は次のように表される.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\} \tag{1}$$

ここに,

質量マトリクス要素 : $m = \rho Al$

剛性マトリクス要素 : $k = \frac{GA}{l}$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & & & \\ & m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m & \\ & & & & \frac{m}{2} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & & & & \\ -k & 2k & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & & 2k & -k \\ & & & & -k & k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\{f\} = [f_0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

$$\left(\begin{array}{l} f_0 = 1 \quad \text{in frequency domain} \\ f_0 = 0 \quad \text{in time domain} \end{array} \right)$$

なお、後の解析では断らない限り、レイリー減衰1%を導入する.

2.3 せん断波定式化

CIP法で地震波(S波・横波)を移流させるため、運動方程式から移流方程式へと展開する.

2.3.1 波動方程式

断面積を A 、微小幅を dx 、密度を ρ 、せん断応

力を τ とおくと加速度 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ で動かした時の運動方程式は,

$$A\rho dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx \right) - A\tau$$

$$\therefore \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \tag{3}$$

また、せん断ひずみを γ 、せん断弾性係数を G とすると,

$$\tau = G\gamma = G \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

式(3)に式(4)を代入して,

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(\sqrt{\frac{G}{\rho}} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6}$$

ただし、 $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

2.3.2 波動方程式から移流方程式への変換

波動方程式より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ G & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \tau \end{Bmatrix}$$

$$\left(\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad (7)$$

が得られる。

$$\text{ここで } \{F\} = \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \tau \end{Bmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ G & 0 \end{bmatrix} \text{ とすると, 式(7)}$$

は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \{F\} = [A] \frac{\partial}{\partial x} \{F\} \quad (8)$$

と表される。

[A] の固有値, 固有ベクトルから作られる変換行列を ϕ とおくと,

$$\phi = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ G & G \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\phi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{c_s} & \frac{1}{G} \\ -\frac{1}{c_s} & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (10)$$

と求まる。よって次のように対角化できる。

$$[\phi]^{-1}[A][\phi] = \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & -c_s \end{bmatrix} = [\Lambda] \quad (11)$$

また変数変換を行うと,

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ G & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_v \\ f_\tau \end{Bmatrix} = [\phi] \{f\} \quad (12)$$

と求まる。

式(8)に式(12)を代入すると,

$$[\phi] \frac{\partial f}{\partial t} = [A][\phi] \frac{\partial f}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = [\phi]^{-1}[A][\phi] \frac{\partial f}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = [\Lambda] \frac{\partial f}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \begin{bmatrix} c_s & 0 \\ 0 & -c_s \end{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (16)$$

より,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_v}{\partial t} - c_s \frac{\partial f_v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_\tau}{\partial t} + c_s \frac{\partial f_\tau}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

また, 式(12)より速度 \dot{v} , せん断応力 τ は,

$$\dot{v} = c_s(f_v - f_\tau) \quad (18)$$

$$\tau = G(f_v + f_\tau) \quad (19)$$

と表すことができ f_v , f_τ の初期値は,

$$f_v = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{v}}{c_s} + \frac{\tau}{G} \right) \quad (20)$$

$$f_\tau = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{v}}{c_s} + \frac{\tau}{G} \right) \quad (21)$$

と表すことができる。式(17)は移流方程式を表す。

2.4 CIP法

移流方程式を移流させるとき, 値だけでなく各メッシュ間の傾き(微分)も移流させる。

2つのメッシュ i , $i-1$ 間のプロファイルを,

$$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad (22)$$

と3次多項式で表し, 4つの量 f_i , g_i , f_{i-1} , g_{i-1} から未知数 a , b , c , d を決定していく。

$$F_i(x_i) = d_i = f_i \quad (23)$$

$$\frac{dF_i(x_i)}{dx} = c_i = g_i \quad (24)$$

$$F_i(x_{i-1}) = -a_i\Delta x^3 + b_i\Delta x^2 - c_i\Delta x + d_i = f_{i-1} \quad (25)$$

$$\frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} = 3a_i\Delta x^2 - 2b_i\Delta x + c_i = g_{i-1} \quad (26)$$

よって,

$$a_i = \frac{g_i + g_{iup}}{D^2} + \frac{2(f_i - f_{iup})}{D^3} \quad (27)$$

$$b_i = \frac{3(f_{iup} - f_i)}{D^2} - \frac{2g_i + g_{iup}}{D} \quad (28)$$

c_i と d_i については, 式(23), 式(24)で与えられている. 式(27), 式(28)で $iup = i-1$, $D = -\Delta x$ と定義した.

こうして次の時刻 $t+1$ での値は, このプロファイルを $c_s \Delta t$ だけ移動したものの,

$$f^{t+1} = F(x - c_s \Delta t) \quad (29)$$

$$g^{t+1} = \frac{dF(x - c_s \Delta t)}{dx} \quad (30)$$

で与えられ,

$$f_i^{t+1} = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + g_i^t \xi + f_i^t \quad (31)$$

$$g_i^{t+1} = 3a_i \xi^2 + 2b_i \xi + g_i^t \quad (32)$$

の計算をするだけである. ここで $\xi = -c_s \Delta t$ と定義した. 式(31), (32)を繰り返すだけで移流方程式の解が求まる.

2.5 解析手法

CIP 法の「境界条件を考慮する必要はまったくない」という特徴を利用し, FEM 解析の境界で反射してしまうという欠点を補うことを目的とした手法である.

同じモデルにおいて FEM 理論と CIP 法を用いて解析を行う. この時 FEM 理論解析領域の右端 (質点 n) から m 個分を CIP 法の解析領域とする. 以下, 解析手法を①~⑥の手順で説明する.

① $t=0$ の時, 初期値 $\dot{v}_{i=1} = 1$ を与え CIP 法解析領域 ($n-m+1 \leq i \leq n$) に \dot{v} , τ' の値を与える. ただし FEM 解析から得られる値は, 変位・速度・加速度に限られるため, CIP 法に用いる \dot{v} (速度) はそのまま用いるとして τ' (せん断力) を求める必要がある. 式(33), 式(34)参照.

$$\tau_i = \frac{k(x_{i+1} - x_i)}{A_{i+1}} \quad (33)$$

$$\tau'_i = \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} \quad (34)$$

FEM 解析領域の τ_i , τ_{i-1} を用いて, CIP 法領域の τ'_i として用いる. ただし,

$$\tau'_n = \tau_{n-1} \quad (35)$$

$$\tau'_{n-m+1} = \tau_{n-m+1} \quad (36)$$

とする.

② \dot{v} , τ' の値より移流方程式を求めて, CIP 法領域 ($n-m+1 \leq i$) において Δt 秒間移流させる. 式(37)~(40)参照.

$$f_\tau(i) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{v}(i)}{c_s} + \frac{\tau(i)}{G} \right) \quad (37)$$

$$g_\tau(i) = \frac{f_\tau(i+1) - f_\tau(i)}{l} \quad (38)$$

$$f_v(i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{v}(i)}{c_s} + \frac{\tau(i)}{G} \right) \quad (39)$$

$$g_v(i) = \frac{f_v(i+1) - f_v(i)}{l} \quad (40)$$

ただし, 後退波である f_v , g_v は半無限棒材モデルにおいては計算に用いない.

③ CIP 法により得た Δt 秒後の $\tau_{i=n}$ を右端 ($i=n$) に外力として与える.

④ FEM 解析領域 ($1 \leq i \leq n$) を線形加速度法により解析.

⑤ ④で得た \dot{v} , τ により τ' を求め, CIP 法解析領域に与える.

⑥ 以降, ②~⑤を Δt 秒間繰り返す.

3. 1次元半無限（仮想）棒材解析

1次元解析モデル（Fig.2 参照）の時刻歴応答解析結果を示す。質点数を 100，質点間距離を 1[m]で、解析を行っている。

3.1 FEM 理論のみによる解析

境界処理を適用しない場合（case1）の，左端（ $n=1$ ）解析結果を Fig.3 に示す。

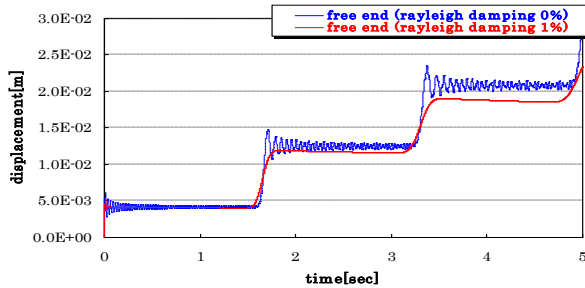


Fig.3 Displacement behavior of nod 1 (case1)

3.2 FEM 理論と CIP 法の併用による解析

境界処理を適用した場合（case2）の，左端（ $n=1$ ），中央（ $n=50$ ），右端（ $n=100$ ）の解析結果を Fig.4～6 に示す。

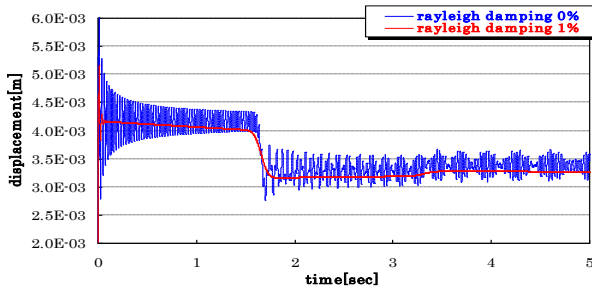


Fig.4 Displacement behavior of nod 1 (case2)

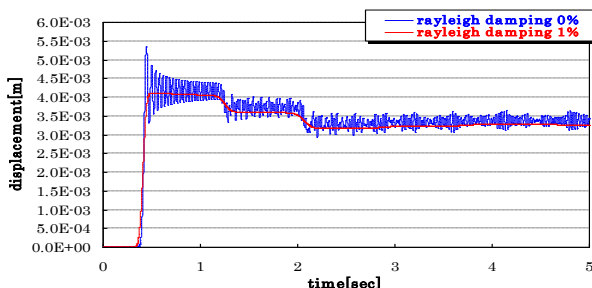


Fig.5 Displacement behavior of nod 50 (case2)

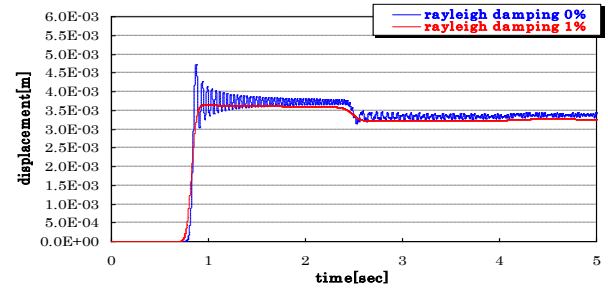


Fig.6 Displacement behavior of nod 100 (case2)

また，FEM 解析に与える外力の大きさを 0.903 倍にした場合（case3）の，左端（ $n=1$ ），中央（ $n=50$ ），右端（ $n=100$ ）の解析結果を Fig.7～9 に示す。

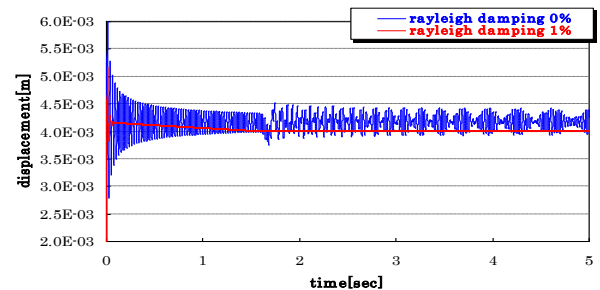


Fig.7 Displacement behavior of nod 1 (case3)

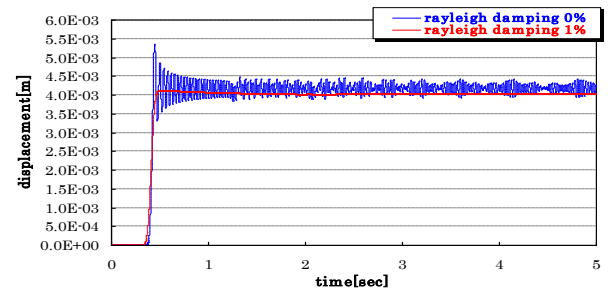


Fig.8 Displacement behavior of nod 50 (case3)

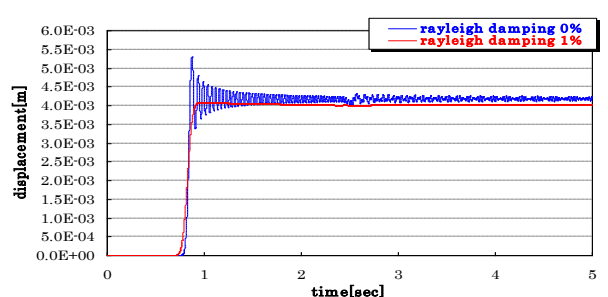


Fig.9 Displacement behavior of nod 100 (case3)

case2 の各時刻における全質点の挙動を示す.

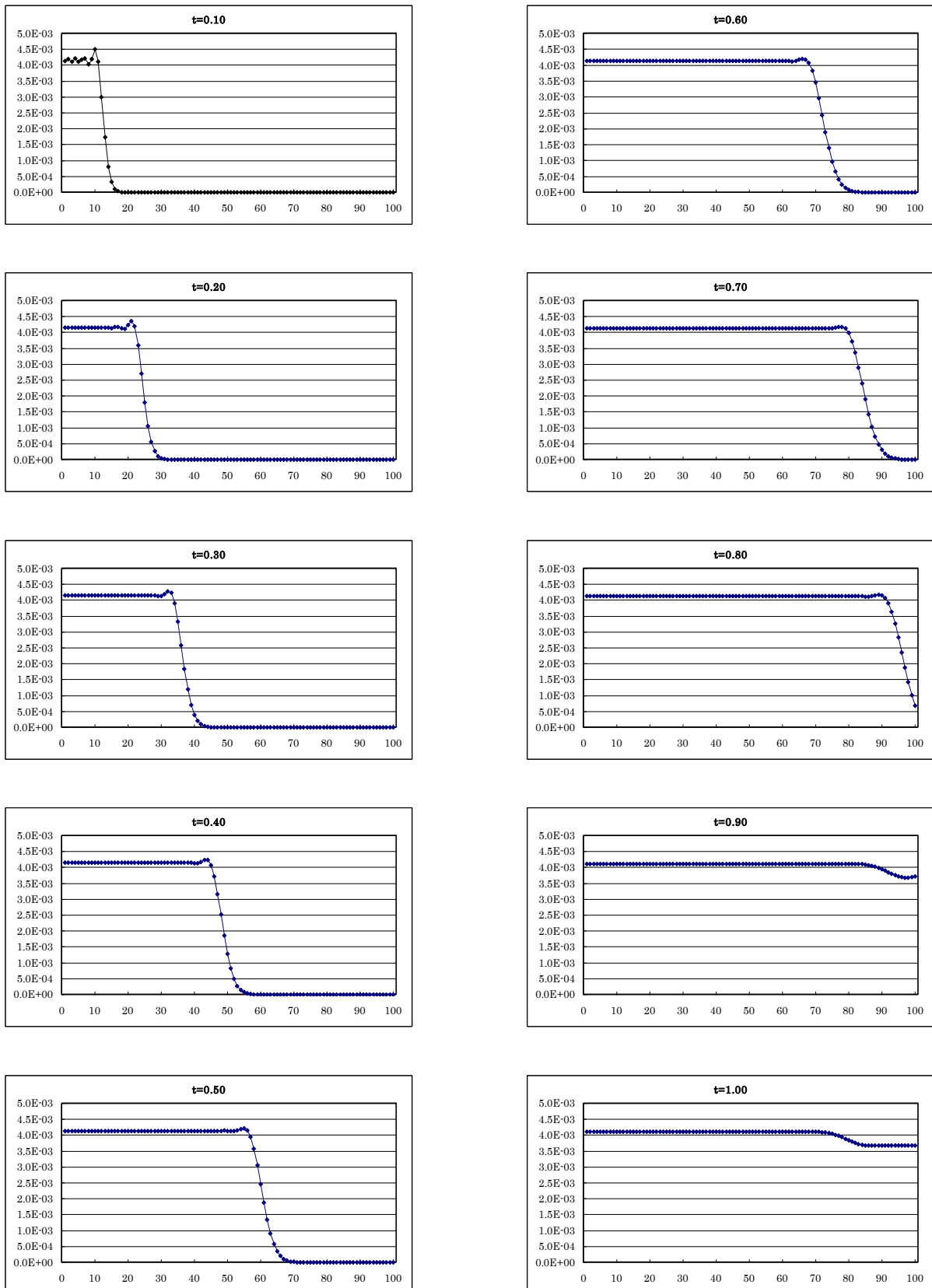


Fig.10 Displacement behavior of all nod (case2)

case3 の各時刻においての全質点の挙動を示す.

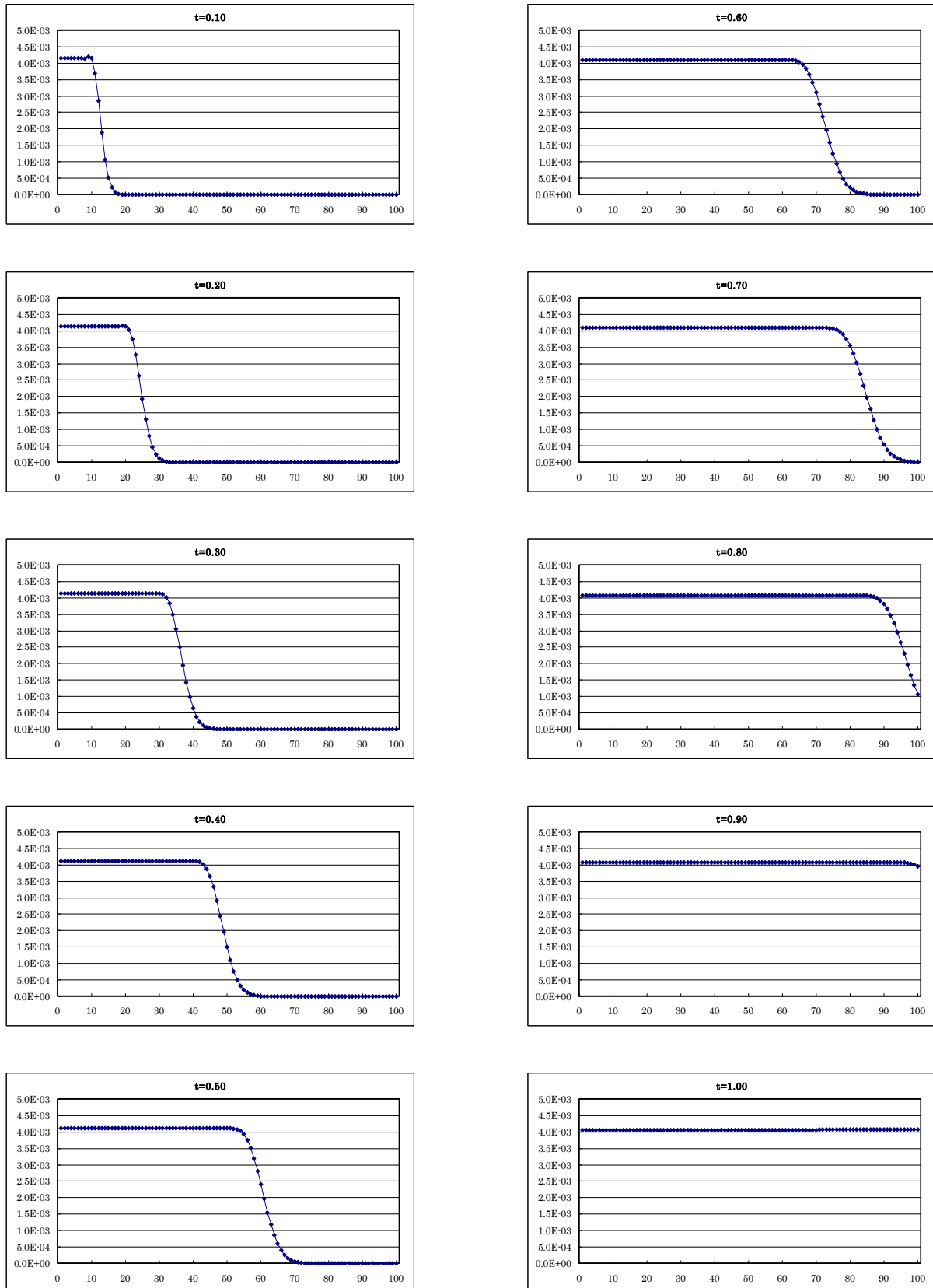


Fig.11 Displacement behavior of all nod (case3)

4. 結論・考察

本手法を適用 (case3) することで境界面における反射は起こらず、反射によって階段状に推移するような応答 (case1) を抑制している。これは、波動が境界面を完全透過することを、再現することに成功しているとも言え、本手法が境界処理法として有効な手段であることが確認できる。しかし、case3 の結果は、 τ' の値を 0.903 倍することによって得られたものであり、本来ならば、case2 において case3 に相当する結果が得られることが望ましい。その点に関しては、CIP 法の用い方に更なる工夫を凝らすことで、改善する必要がある。

参考文献

- [1]日本建築学会, "地盤振動-現象と理論", 日本建築学会, pp.180-295, 2005 年.
- [2]日本建築学会, "建築と地盤の動的相互作用を考慮した応答結果と耐震設計", 日本建築学会, pp.11-55, 2006 年
- [3]日本建築学会, "入門・建物と地盤との動的相互作用", 日本建築学会, pp.1-111, 1996 年
- [4]伊野慎二,吉田長行, "波動透過境界の最適化に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.21, 2008 年
- [5]古谷忍,吉田長行, "最適化手法による波動透過境界処理に関する研究", 法政大学情報メディア情報教育センター研究報告集 Vol.22, 2009 年
- [6]矢部孝,内海隆行,尾形陽一, "CIP 法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法 - ", 森北出版, 2003 年
- [7]矢部孝,尾形陽一,滝沢研二, "CIP 法と JAVA による CG シミュレーション", 森北出版, 2007 年