

ハイブリッド型ペナルティ法による非定常熱伝導問題の解析法

Numerical Method for Unsteady Heat Transfer Problems

by using Hybrid-type Penalty Method

斉藤 大樹¹⁾ 田尻 康之²⁾ 竹内 則雄³⁾

Hiroki Saito, Yasuki Tajiri, Norio Takeuchi

¹⁾ 法政大学 工学部システムデザイン学科

²⁾ 法政大学大学院 システムデザイン研究科

³⁾ 法政大学 理工学部機械工学科

HPM can apply to not only the analysis of the solid mechanics but also the problem of the scalar field. For example, in the case of heat transfer analysis, a weak continuity of the temperature can be satisfied between subregion by using a penalty function. If this method is used, in the case of steady state problem, a solution of the accuracy that is equivalent to analytical solution is computed. However, like the case of the dynamic problem in the solid mechanics, the influence of the penalty function to the solution is not enough discussed in time integration in the unsteady problem. In this paper, it applied the Crank Nicholson method which is the implicit method to time integration, and verified accuracy of solution. As a result, even if it used the penalty function, the accuracy comparable as analytical solution was obtained.

Keywords : HPM, heat conduction, unsteady, time integration

1. はじめに

熱伝導問題の解析には、有限要素法 (FEM : Finite Element Method) や有限体積法 (FVM : Finite Volume Method) , 差分法 (FDM : Finite Difference Method) が用いられてきた[1][2]. これらの方法は、使い勝手の良い有益な解析法であるが、反応や変態が伴うような、移動境界を扱わなければならない問題では、その取り扱いが複雑になる傾向がある.

一方、著者らは、ハイブリッド型仮想仕事の原理を基に、Lagrange の未定乗数にペナルティ関数を用いるハイブリッド型ペナルティ法 (HPM : Hybrid-type Penalty Method) を開発した[3][4]. HPM は固体力学諸問題の離散化解析のために開発されたが、熱伝導問題や浸透流問題といった場の問題への適用も可能である[5][6]. さらに、HPM では、部分領域と積分領域を別に考えることで、移動境界などのような問題も比較的アルゴリズムが複雑にならず

に解析が可能である[7].

本論文では時間的に境界が移動するような問題の解析を行うための第一歩として、非定常熱伝導問題の解析に HPM を適用する方法を提案する. HPM は、部分領域間の解の弱い連続性をペナルティ関数により確保しているが、一般に、反復法的な解析法では、ペナルティ関数の使用によって収束性が悪くなる傾向にある.

しかし、非定常問題の解析において、反復法的な逐次時間積分であっても、陰解法であれば、収束性の悪化は防げるものと思われる. そこで、本論文では、時間積分にクランク・ニコルソン法を適用し精度の検証を行う.

2. 支配方程式と重み付き残差方程式

Ω を n_{dim} 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($1 \leq n_{\text{dim}} \leq 3$) の有界領域とし、 Γ を Ω の滑らかな

境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする. このとき, Ω 内における非定常熱伝導問題の支配方程式は次式で与えられる.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{L}^t \mathbf{q} + \bar{Q} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{d} \quad (2)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}T \quad (3)$$

ここで, 式(1)は熱伝導方程式で, ρ は密度, c は比熱, T は温度, \mathbf{q} は熱流束, \bar{Q} は単位体積当たりの発熱率で, \mathbf{L} は微分作用素である. また, 式(2)はフーリエの法則で, \mathbf{d} は温度勾配, κ は熱伝導率を表している. 式(3)は, 温度と温度勾配の関係を示している.

境界は, $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q$ で構成され, Γ_T は温度が与えられる境界で,

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_T \quad (4)$$

Γ_q は境界を通して熱流速が規定される境界で, 外向き法線方向の熱流束

$$q_n = \mathbf{n} \mathbf{q} \quad (5)$$

に対して, 以下の境界から構成される.

$$(\text{熱流束が流入出する境界}) \quad \bar{q}_n = q_0 \quad \text{on } \Gamma_{q1} \quad (6)$$

$$(\text{熱伝達境界}) \quad \bar{q}_n = \alpha_c (T - T_c) \quad \text{on } \Gamma_{q2} \quad (7)$$

$$(\text{熱放射境界}) \quad \bar{q}_n = \sigma F (T^4 - T_r^4) \quad \text{on } \Gamma_{q3} \quad (8)$$

ただし, \mathbf{n} は外向き法線ベクトル, q_0 は既知の熱流束, α_c は熱伝達係数, T_c は外部温度, σ はステファン・ボルツマン定数, F は修正形態係数, T_r は放射源温度であり, $\Gamma_q = \Gamma_{q1} \cup \Gamma_{q2} \cup \Gamma_{q3}$ なる関係にある. 式 (8) は非線形となっているため,

$$\alpha_r = \sigma F (T + T_r) (T^2 + T_r^2) \quad (9)$$

として, 以下に示す線形形式を用いて表すことがある[8].

$$\bar{q}_n = \alpha_r (T - T_r) \quad (10)$$

いま, Fig.1 に示すように領域 Ω を閉境界 $\Gamma^{(e)}$

で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする. すなわち,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (11)$$

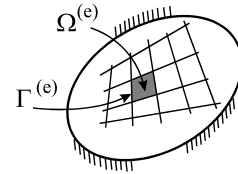


Fig.1 Sub-domain $\Omega^{(e)}$

このとき, 境界条件式(4)を満たす重みを δT として, 式(1)に対する重み付き残差方程式が以下のように表される.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta T \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta T]^t \mathbf{q} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta T \bar{Q} d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta T q_n d\Gamma \right) = 0 \quad (12)$$

ただし, $\delta T = 0$ on Γ_T

鷲津[9]は, 要素境界における変位の連続性を少し弱め, Lagrange の未定乗数を用いて付帯条件を変分原理に導入したモデルをハイブリッド型と呼んでいる. 本論文においても, このハイブリッド型の考えを用いて, 要素境界面において温度の弱い連続性をペナルティ関数を用いて重み付き残差方程式に導入する.

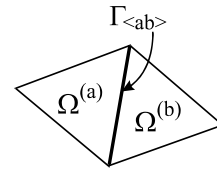


Fig.2 Sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$ with Common boundary $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

いま, Fig.2 に示すような隣接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle} = \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)}$ において, 付帯条件

$$T_{\langle ab \rangle}^{(a)} = T_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (13)$$

を隣接する要素の境界で共通な Lagrange の未定乗数 $\lambda_{\langle ab \rangle}$ を用いて,

$$\begin{aligned} H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle} (T_{\langle ab \rangle}^{(a)} - T_{\langle ab \rangle}^{(b)}) d\Gamma \\ &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda_{\langle ab \rangle} \Theta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

と表し, 重み付き残差方程式(12)に導入すると付帯条件を考慮した重み付き残差方程式が次のように表される.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \delta T \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta T]^t \mathbf{q} d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\Omega^{(e)}} \delta T \bar{Q} d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta T q_n d\Gamma \right) \\ + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda_{\langle s \rangle} \Theta_{\langle s \rangle} d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで, N は部分領域境界辺の数である.

3. 空間に関する離散化方程式

(1) Lagrange の未定乗数

Lagrange の未定乗数は, 物理的には要素境界面における熱流束を意味している. そこで, これを, 境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上において次のように表すことにする.

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = P \cdot \Theta_{\langle ab \rangle} \quad (16)$$

ここで, P はペナルティ関数を表している.

(2) 線形温度場

いま, 温度 $T(\mathbf{x})$ が点 \mathbf{x}_P を含む部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内で n 回連続微分可能であるとし, テーラー展開を行って 1 回の微分までを考慮すると, 温度 $T(\mathbf{x})$ は, 次のように表すことができる.

$$T^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathcal{T}^{(e)} \quad (17)$$

ここで, 上付きの (e) は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する物理量であること意味する. 2次元問題の場合, 以下の関係にある.

$$\mathbf{N}^{(e)} = [1, (x - x_P), (y - y_P)]$$

$$\mathcal{T}^{(e)} = [T_P, d_x, d_y]^t$$

ここで, T_P は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の点 (x_P, y_P) における温度を表している. また, d_x, d_y は部分領域内の温度勾配を表している.

このように, 本論文で用いる温度場は, 要素内における任意点の温度に加え, 直接, 温度勾配を自由度として扱う. また, 各要素内の任意点におけるパラメータを用いて要素内温度場を表しているため, 従来の FEM とは異なり, 節点において温度を共有しない. すなわち, 本論文における節点は領域形状を認識するために用いるのであって, 従来の FEM のように自由度を設けるための節点ではない. したがって, 要素形状は特に限定されず, 任意の多角形, 多面体, 曲面体を部分領域として用いることが可能になる.

(3) 離散化方程式

離散化方程式は, 式(15)に式(16)および線形変位場の関係式(17)を代入することによって得られる. ただし, 重み $\delta T^{(e)}$ に関しても, 次のように温度場と同じ関係で表されるものとする.

$$\delta T^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathcal{T}^{(e)} \quad (18)$$

いま,

$$\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)} \quad (19)$$

とし, 全要素における自由度を並べた 1次元配列を \mathcal{T} として,

$$\mathcal{T}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathcal{T} \quad (20)$$

と表わす. ここで, $\mathbf{A}^{(e)}$ は, 全要素における自由度と着目要素における自由度を関係付ける行列である. 重みについても同様に考える.

一方, 要素境界面における相対温度を

$$\Theta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathcal{T}_{\langle ab \rangle} \quad (21)$$

とする. ただし,

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{N}^{(a)}, -\mathbf{N}^{(b)}] \quad (22)$$

$$\mathcal{T}_{\langle ab \rangle} = [\mathcal{T}^{(a)}, \mathcal{T}^{(b)}]^t \quad (23)$$

また, 全要素における自由度を並べた 1次元配列 \mathcal{T} に対して, 要素境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $\mathcal{T}_{\langle ab \rangle}$ は, 以下のように関係付けられる.

$$\mathcal{T}_{\langle ab \rangle} = \mathbf{M}_{\langle ab \rangle} \mathcal{T} \quad (24)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は、全要素における自由度と着目要素境界面に関する自由度を関係付ける行列である。重みについても、これと同様に考える。

これまでの関係を式(15)に代入すれば、空間に関して離散化された関係が次のように得られる。

$$\left(\sum_{e=1}^M \mathbf{M}^{(e)} \right) \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) \mathcal{T} - \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{Q}^{(e)} - \sum_{e=1}^M (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t \bar{q}_n d\Gamma \right) = 0 \quad (25)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} \rho c (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{N}^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \\ \mathbf{K}^{(e)} &= (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \boldsymbol{\kappa}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\langle s \rangle} &= \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t P \mathbf{B}_{\langle s \rangle} d\Gamma \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \\ \mathbf{Q}^{(e)} &= -(\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \bar{Q} d\Omega \end{aligned}$$

(4) 熱流束境界条件の処理

式(25)の最終項は、熱流束に関する境界 Γ_q に関する項で、式(6)~(9)で表されるように、熱流束が流入出する境界 Γ_{q1} 、熱伝達境界 Γ_{q2} 、熱放射境界 Γ_{q3} の3つに分けられ、以下のようになる。

(熱流束が流入出する境界： Γ_{q1})

$$\mathbf{Q}_{q1}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t q_0 d\Gamma \quad (26)$$

(熱伝達境界： Γ_{q2})

$$\mathbf{K}_{q2}^{(e)} \mathcal{T} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t \alpha_c \mathbf{N}^{(e)} d\Gamma \mathcal{A}^{(e)} \mathcal{T} \quad (27)$$

$$\mathbf{Q}_{q2}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t \alpha_c T_c d\Gamma \quad (28)$$

(熱放射境界： Γ_{q3})

$$\mathbf{K}_{q3}^{(e)} \mathcal{T} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t \alpha_r \mathbf{N}^{(e)} d\Gamma \mathcal{A}^{(e)} \mathcal{T} \quad (29)$$

$$\mathbf{Q}_{q3}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t \alpha_r T_r d\Gamma \quad (30)$$

以上、3つの境界条件を整理すると最終的に以下のようになる。

$$(\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}^{(e)})^t q_n d\Gamma = (\mathbf{K}_{q2}^{(e)} + \mathbf{K}_{q3}^{(e)}) \mathcal{T} - (\mathbf{Q}_{q1}^{(e)} + \mathbf{Q}_{q2}^{(e)} + \mathbf{Q}_{q3}^{(e)}) \quad (31)$$

式(31)の関係を改めて式(25)に代入すれば、熱流束に関する境界を考慮した離散化方程式が以下のよう求められる。

$$\mathbf{M} \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \mathbf{K} \mathcal{T} = \mathbf{Q} \quad (32)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{M}^{(e)} \\ \mathbf{K} &= \sum_{e=1}^M (\mathbf{K}^{(e)} + \mathbf{K}_{q2}^{(e)} + \mathbf{K}_{q3}^{(e)}) + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \\ \mathbf{Q} &= \sum_{e=1}^M (\mathbf{Q}^{(e)} + \mathbf{Q}_{q1}^{(e)} + \mathbf{Q}_{q2}^{(e)} + \mathbf{Q}_{q3}^{(e)}) \end{aligned}$$

このように、本モデルの空間に関して離散化された方程式は、式(32)に示す時間に関する常微分方程式に帰着し、左辺の係数行列 \mathbf{K} は、各要素の係数行列と要素境界面に関する付帯条件の関係、ならびに熱流束に関する境界条件を組み合わせることによって得られる。

4. 時間積分

ここでは、式(32)に示される時間に関する1階の常微分方程式に対する離散化について述べる。なお、本論文では、差分近似を用いて時間に関する離散化を行う。

差分近似として、前進差分法(オイラー法)、後退差分法と中央差分法があるが、これら3つの関係は温度 T を次のように考えることで一般化することができる。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(1-\gamma)T^n + \frac{1}{2}(1+\gamma)T^{n+1} \\ \dot{T} &= \frac{1}{\Delta t}(T^{n+1} - T^n) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで、 γ は最適化パラメータで、 $\gamma = -1$ のとき、前進差分法、 $\gamma = 1$ のとき後退差分法を表しており、 $\gamma = 0$ のときがクランク・ニコルソン法となる。また、上付きの n は時間ステップを表しており、 n が現在の時刻、 $n+1$ が Δt 後の時刻を表している。

式(33)の関係を式(32)に適用し、時間に関する離散化を行うと次式が得られる。

$$\left[\frac{2}{\Delta t} M + (1 + \gamma) K \right] \mathcal{T}^{n+1} = 2Q + \left[\frac{2}{\Delta t} M - (1 - \gamma) K \right] \mathcal{T}^n \quad (34)$$

本論文では、 $\gamma = 0$ とするクランク・ニコルソン法を用いる。

$$\left[\frac{2}{\Delta t} M + K \right] \mathcal{T}^{n+1} = 2Q + \left[\frac{2}{\Delta t} M - K \right] \mathcal{T}^n \quad (35)$$

こように、クランク・ニコルソン法は陰解法であり、ペナルティ関数の影響を受けにくいアルゴリズムとなっている。

5. 数値計算例

数値計算例として、境界条件の影響を定常問題で確認した後、非定常問題の解の精度を検討する。

(1) 境界条件の影響

Fig.3 は左右端に温度境界をもつ矩形領域に対する解析結果である。矩形領域の左端に 1、右端に 0 の温度を与えている。白丸が本手法による解で、実線が解析解である。両者は良い一致を示している。

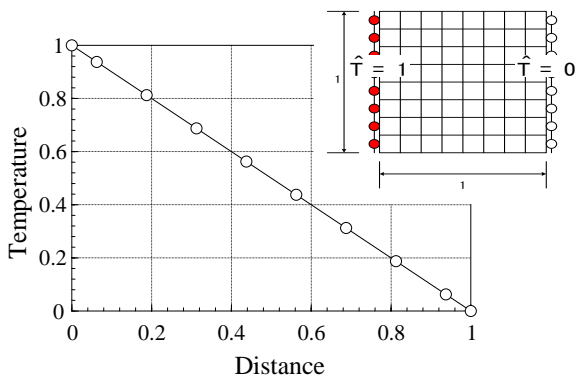


Fig.3 Constraint Temperature

なお、比熱、密度、熱伝導率は全て 1 として計算している。また、図中に示した解析モデルのグリッドが計算に使用した部分領域の形状である。

同様に、Fig.4 は、赤色の要素に内部発熱 1 を与えた場合の結果である。また、Fig.5 は熱流速境界の例で、左端を温度 0 に拘束し、右端に熱流束 1 を与えている。最後の Fig.6 は熱伝達境界の例で、左端を温度 0 に拘束し、右端を熱伝達境界としている。いずれも良好な解が得られている。

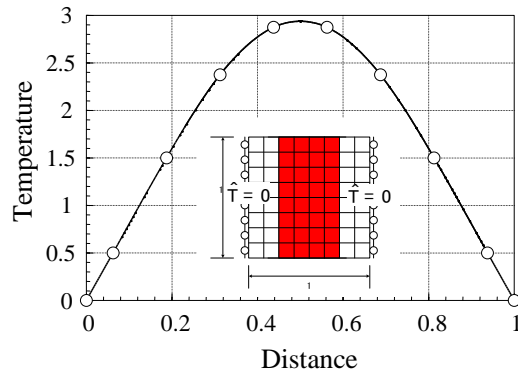


Fig.4 Internal Heat Build-up

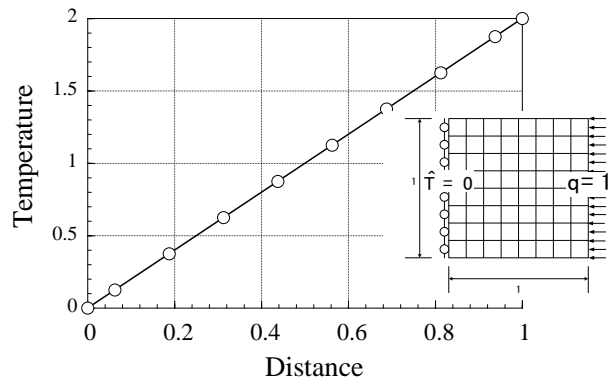


Fig.5 Heat Flux

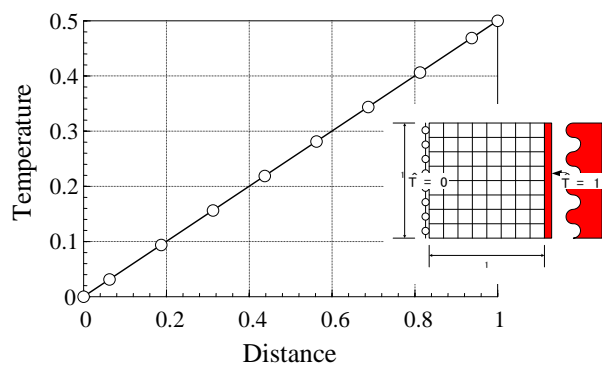


Fig.6 Heat Transfer

(2) 非定常問題の解析

Fig.7 は非定常熱伝導解析に用いたモデルが示されている[10]. 領域は銅を想定し, 熱伝導率 $398 \text{ W/m}^2\text{C}$, 比熱 $386 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$, 密度 8880 kg/m^3 とした. また, 領域の初期温度は 100°C とし, 両端を 0°C に拘束, 上下端を断熱境界とした. 非定常解析における増分時間は 0.01 秒として 10 秒後まで計算し, 解析解と比較した.

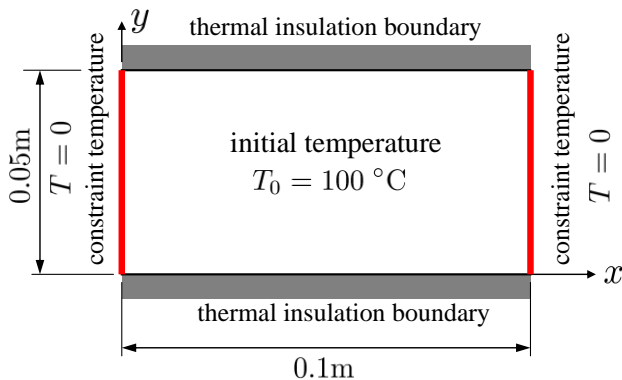


Fig.7 Numerical Model

Fig.8 は $1, 5, 10$ 秒後の本手法による解析結果を白丸で, 解析解を実線で示した図である. 図に示すように両者の解はほぼ一致している. 解析解と本手法による解の相対誤差は, 1 秒後で 0.6% 程度, 5 秒後, 10 秒後の相対誤差は 0.1% 程度であった.

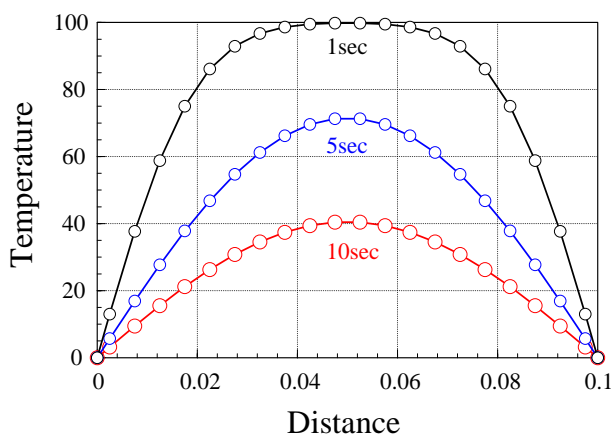


Fig.8 Temperature of Unsteady Analysis

6. まとめ

本論文では, クランク・ニコルソン法を用いた HPM による非定常熱伝導問題の解析法を示し, 簡単な数値計算例によって解の精度を検証した.

はじめに, 定常問題で, 境界条件の影響を確認したところ, ペナルティ関数による影響はほとんど生じず, 十分な精度の解が得られた.

次に非定常問題の解析を試みたところ, クランク・ニコルソン法のような陰解法を用いることで, ペナルティ関数の影響をほとんど受けずに, 十分な精度の解が得られることが分かった.

本研究の解析例は, 精度検証の簡単なものであり, 今後, より複雑な問題での検証が必要である.

参考文献

- [1]矢川元基, "流れと熱伝導の有限要素法入門", 培風館, 1983
- [2]Patanker, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Pub. Co. USA, 1980
- [3]竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦, "ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析", 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- [4]大木裕久, 竹内則雄, "ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20060020), 2006.
- [5]竹内則雄, 矢田敬, 草深守人, 武田洋, "ペナルティを用いた浸透流問題の解析手法の開発", 日本計算工学会論文集(Transaction of JSCES, Paper No.20000023), 第2巻, pp.179-185, 2000
- [6]佐藤一雄, 竹内則雄, 武田洋, "ハイブリッド型ペナルティ法による熱伝導問題の解析法", 日本計算工学会計算工学講演会論文集, Vol.6, No.1, pp.95-98, 2001
- [7]竹内則雄, 大木裕久, 草深守人, 武田洋, "ペナルティ関数を用いた浸潤面を有する浸透流問題の解析手法の開発", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010019), Vol.3, pp.163-170, 2001
- [8]矢川元基, 宮崎則幸, "有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析", サイエンス社, 1985
- [9]鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972
- [10]<http://computation.cside.com>