

ハイブリッド型ペナルティ法による動的応答解析

Dynamic Response Analysis by using Hybrid-type Penalty Method

宍戸 悠人¹⁾ 柴田 朝子²⁾ 竹内 則雄³⁾

Haruhito Shishido, Asako Shibata, Norio Takeuchi

1) 法政大学 工学部システムデザイン学科

2) 法政大学大学院 システムデザイン研究科

3) 法政大学 理工学部機械工学科

A penalty function is used to satisfy a weak continuity of the displacement in HPM. In the iterative method such as the step by step integration for dynamic problems, the influence of the penalty function to numerical solution is not studied enough. In this paper, formulation of HPM for the dynamic problem with the implicit method using Newmark's β method is shown and the accuracy of the solution is verified by numerical example. In the two-dimensional problems, the solution which is the same as FEM is obtained, and a similar result is obtained in a beam theory. According to the implicit method, a solution of same accuracy as FEM is obtained in the dynamic analysis in HPM using a penalty function.

Keywords : HPM, dynamic, discrete analysis, Newmark's β method

1. はじめに

構造物に過大な外力が作用すると、構造物内にすべりやクラックが生じ、やがてメカニズムを形成して崩壊する。このような不連続な現象を解析するため、川井は剛体ばねモデル (RBSM: Rigid Bodies-Spring Model) [1]と呼ばれる、一般化された離散化極限解析用のモデルを開発した。この方法では、剛体を有限な剛性を有するばねで結合する。

一方、著者らは、RBSMの弾性解の精度向上をめざし、ハイブリッド型の仮想仕事の原理[2]を用いて、要素内変形を考慮したハイブリッド型ペナルティ法 (HPM: Hybrid-type Penalty Method) を開発した [3]-[5]。この方法では、要素の変形を要素内の剛性により評価しており、隣接する要素の連続性は要素間に設定したペナルティ関数により表現する。すなわち、不連続 Galerkin 法[6]における interior penalty (IP) FEM[7]と類似の方法で、ペナルティ関数に関する考え方を要素間の変位のジャンプに適用することで、要素間の弱い連続性を満たす方法である。

このような、ペナルティ関数を利用する方法は、

反復的な解析手法を用いると収束生が悪くなるといわれている。しかし、動的問題における逐次積分法のような反復計算の場合に対しては、解の精度への影響や収束生の問題に対して十分な検討がなされていない。

そこで、本論文では、動的問題に対して、Newmarkの β 法を用いた陰解法による HPM の定式化を示し、2次元、3次元の数値計算例によって解の精度を検証する。

2. 動的問題に対するハイブリッド型仮想仕事式

いま、Fig.1 に示すように、 Ω を n_{dim} 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($1 \leq n_{\text{dim}} \leq 3$) の有界領域とし、 Γ を Ω の滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする。このとき、 Ω 内における平衡方程式は以下のとおりである。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_\alpha = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 \boldsymbol{f}_α は慣性力で、 \boldsymbol{u} を $\boldsymbol{x} \in \Omega$ における変位

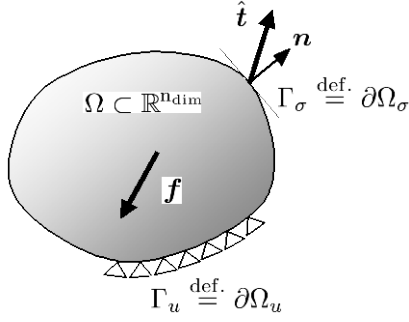


Fig.1 Reference configuration Ω and smooth boundary $\partial\Omega$.

場, ρ を密度として以下のように表される.

$$\mathbf{f}_\alpha = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3)$$

また, \mathbf{f} は物体力, $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力である.
いま, 微小ひずみを

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (4)$$

と定義すれば, 弾性体に対する構成方程式は弾性テンソル \mathbf{D} を用いて次のように表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

式(4)において, ∇ は微分作用素であり, ∇^s は ∇ の対称部分を表している.

一方, 境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ($\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$) において, $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial\Omega$ は変位が与えられる境界, また, $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma \Omega \subset \partial\Omega$ は表面力が与えられる境界であり, それぞれ, 以下の関係にある.

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{given}) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{given}) \quad (7)$$

ただし, 外向き法線ベクトルが \mathbf{n} で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ と定義する. ここで, $\hat{\mathbf{n}}$ は境界 Γ_σ に対する法線ベクトルである.

いま, Fig.2 に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする.

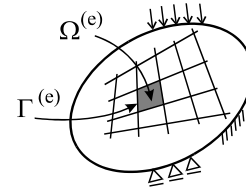


Fig.2 Sub-domain $\Omega^{(e)}$

このとき, 仮想変位を $\delta \mathbf{u}$ として, 式(1)に対する仮想仕事式が以下のように得られる.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (8)$$

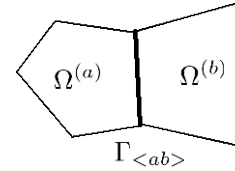


Fig.3 Common boundary $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ of sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$

一方, Fig.3 に示すように, 隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)}$ において, 付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (9)$$

を Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて考慮すると, ハイブリッド型の仮想仕事式が以下のように得られる.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f}_\alpha \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \, dS \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (10)$$

ただし, $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は, それぞれ, 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表している. また, $\boldsymbol{\lambda}$ は, $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味している.

3. 動的問題の離散化方程式

いま、部分領域毎に独立な変位場を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \\ \mathbf{U}^{(e)} &= [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t, \mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}] \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{d}^{(e)}$ は、部分領域(e)内の点 \mathbf{P} における剛体変位と剛体回転を表しており、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ は、部分領域内で一定なひずみを表している。

また、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ についても同様に、以下のように仮定する。

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (12)$$

一方、付帯条件の関係式(9)を離散化するにあたり、Lagrange の未定乗数が物理的には表面力を意味するという点を考慮し、境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の $\boldsymbol{\lambda}$ を以下のように仮定する。

$$\boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{k} はペナルティ関数に対応する係数行列である。また、 $\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}$ は部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の相対変位を表しており、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列を $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ として以下のようになる。

$$\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(e)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(e)} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}]^t$$

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t$$

ハイブリッド型仮想仕事式(10)に式(3)を代入し、さらに式(11)~(14)の関係代入すれば、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U}^t \sum_{e=1}^M \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) \mathbf{U} \\ - \delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \rho^t \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} dV$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{k}_{\langle ab \rangle} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} d\Gamma$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{t} dS$$

であり、 \mathbf{U} は全自由度を並べたベクトルで、上付きの $\cdot \cdot$ は時間に関する2階の微分、すなわち加速度を表している。

いま、仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ が任意であるため、以下のような空間に関して離散化された方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{P} \\ \mathbf{M} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \\ \mathbf{P} &= \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \end{aligned} \quad (16)$$

4. 時間積分

現在の時刻 t の時間ステップを n とし、その時刻から Δt 時間後の時間ステップを $n+1$ とするとき、 $n+1$ ステップにおける式(16)の関係は次のように表される。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} \quad (17)$$

上式において、ペナルティに関係する付帯条件の項は \mathbf{K} に含まれているため、時間積分に関しては、FEMでも用いられている変位を未知数とするNewmarkの β 法を適用できる。

いま、 $n+1$ ステップにおける速度と加速度を以下のように変位と n ステップにおける速度あるいは加速度で表す。

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}^n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}^n \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}^{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{U}}^n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^n \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、上付きの \cdot は時間による 1 階微分，すなわち、速度を表している。 γ と β はパラメータで、通常、 $\gamma = 1/2$ が用いられている。本論文の数値計算例でも $1/2$ を用いた。また、 β の値は $(0 \leq \beta \leq 1/2)$ であるが、通常、 $1/6$ や $1/4$ が用いられている。本論文の数値計算例では、 $\beta = 1/4$ を用いた。これは、いわゆる、平均加速度法と呼ばれる方法に該当する。以上より、以下のような時間ステップ毎の離散化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + [K] \right) \{U^{n+1}\} \\ & = \{P^{n+1}\} \\ & + [M] \left(\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{U}^n\} + \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{U}^n\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \{U^n\} \right) \end{aligned} \tag{20}$$

5. 数値計算例

数値解析例として Fig.4 に示すような単純ばりの中央に集中加重が作用する問題を取り上げる。

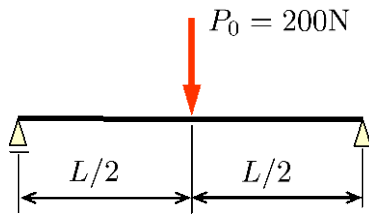


Fig.4 Simple beam with concentrated load

スパンは $L = 2m$ ，はり断面における幅は $b = 0.2m$ ，高さ $h = 0.25m$ で、弾性係数 $E = 206GN/m^2$ ，ポアソン比 $\nu = 0.3$ ，比重 7.85 である。

時間積分における Newmark の β 法のパラメータは、 $\gamma = 1/2$ ， $\beta = 1/4$ とした。また、増分時間は $\Delta t = 0.00001 \text{ sec}$ とし、Fig.5(b) の t_0 は $t_0 = \Delta t/10$ とした。

荷重の作用状態として、Fig.5 に示す一定荷重(a)と、三角形荷重(b)の 2 パターンを考える。

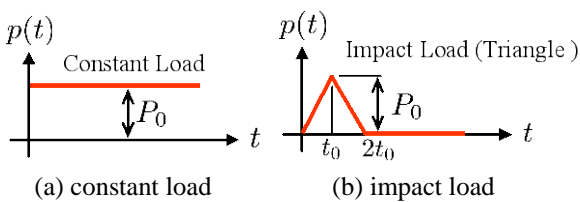


Fig.5 Load type

(1) 2次元解析

Fig.6 は 2次元問題に用いた要素分割である。スパン方向左右対称として、左半分を分割した。はりせい方向に 10 分割，スパン方向に 40 分割し，分割された矩形領域をさらに「たすきがけ」に 4 つの三角形に分割した。要素数は 1600 要素である。

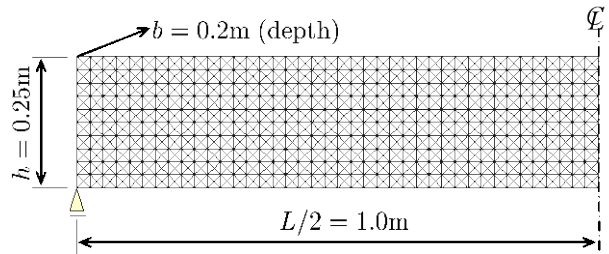


Fig.6 Mesh division (2-dimension)

(a) 一定荷重

Fig.7 は、はり中央下端におけるたわみの応答を描いた図である。横軸が時間，縦軸がたわみを表している。図中の \circ は HPM による結果で、赤実線は、はり理論の解である。なお、三角形 1 次要素による FEM の解と HPM (1 次変位場) の解は同一であったため、図中では、HPM & FEM と記している。はり理論と 2 次元解析結果では、位相に弱化的ずれが生じるが、ほぼ類似の結果となっている。

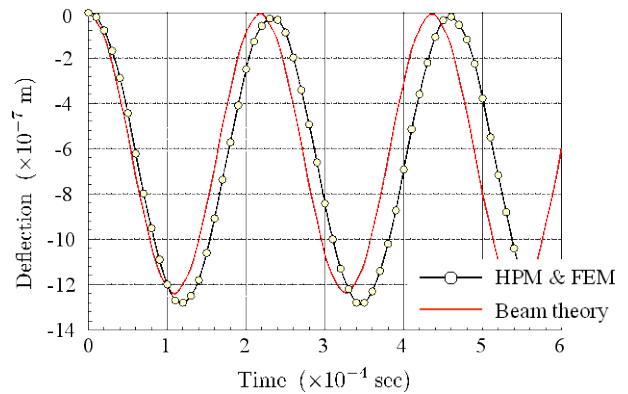


Fig.7 Displacement response

Fig.8 は速度に関する解析結果の図である。変位の場合と同様に FEM と HPM の解は一致しているため、両者を \circ で表している。赤実線ははり理論による解で HPM の解は、位相のずれはあるが、はり理論と類似の結果となっている。

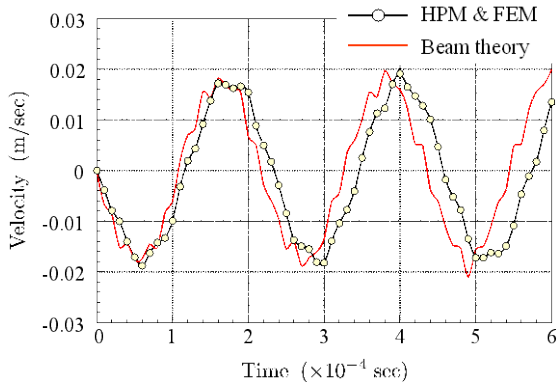


Fig.8 Velocity response

一方, Fig.9 は加速度に関する応答の図である。○が HPM と FEM の解で, 変位や速度と同様, 両者の解は一致している。赤実線は, はり理論における解で, 1 次モードに対する加速度を表している。

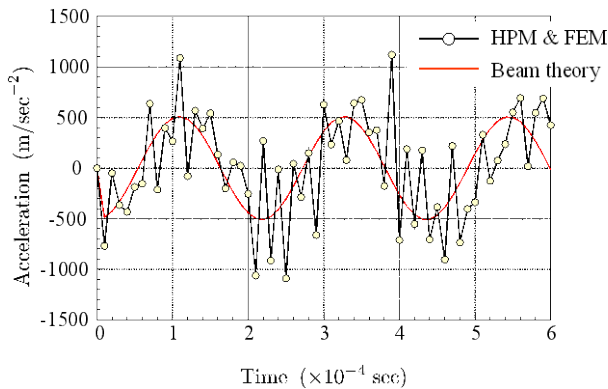


Fig.9 Acceleration response

Fig.10 は変位モードを表した図である。左半分は 0.00035 秒後の状態で, Fig.7 の最大のたわみが発生したときの変位モードを表している。一方, 右半分は, 最小変位に対応したモードで除荷状態となっている。

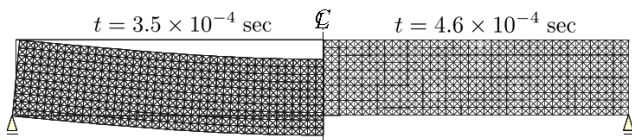


Fig.10 Displacement mode

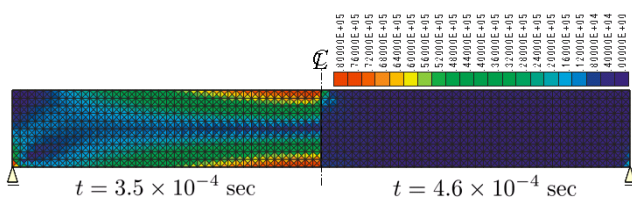


Fig.11 vonMises stress

Fig.11 は同じ時間に対する vonMises の応力の図である。左半分は, 最小応答変位の状態で, この問題の場合, 1 次モードが支配的であるため, 曲げ状態の応力分布になっている。一方, 右半分は除荷状態の応力分布で, ほぼ, 無応力状態となっている。

(b) 衝撃荷重 (三角形)

次に, Fig.5(b)に示す衝撃荷重 (三角形) が作用した場合の応答解析結果を示す。Fig.12 は, 応答変位の図である。○は, HPM の解で, 衝撃荷重が作用した場合も FEM の解と HPM の解は一致する。赤実線ははり理論における 1 次モードの応答変位である。一定荷重の場合と同様, 位相に若干のずれがあるが, 類似の傾向を示している。

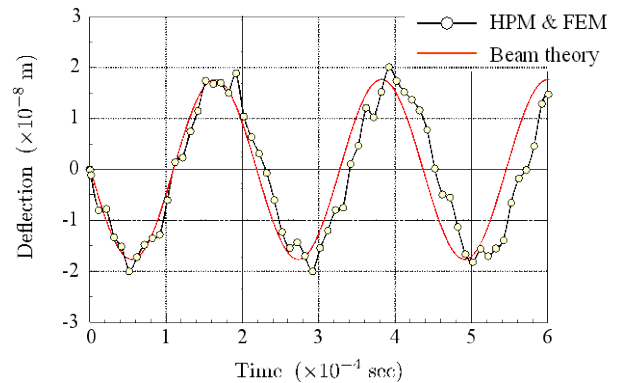


Fig.12 Deflection response with impact load

Fig.13 は, 応答変位が最大, 最小のときの変位モードを, Fig.14 はそのときの von Mises の応力図である。左半分が最大たわみ, 右半分が最小たわみの場合の結果である。高次モードの発生によって, なみをうったような複雑な変位モードを示しており, また応力分布も環状に衝撃波が伝わる傾向を示している。

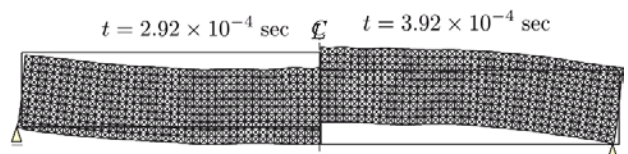


Fig.13 Displacement mode with impact load

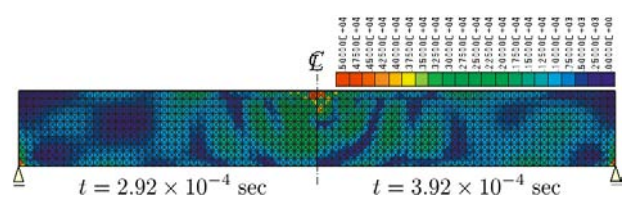


Fig.14 von Mises stress with impact load

(2) 3次元解析

(1) に示した2次元解析に対して、ここでは3次元解析で同じ問題の解析を行う。Fig.15 は3次元解析に用いた要素分割である。スパン方向左右対称として、左半分を分割した。また、奥行き方向についても対称性を利用して半分の領域とした。分割方法は、2次元問題の場合と同様に、はりせい方向に10分割、スパン方向に40分割し、分割された矩形領域をさらに「たすきがけ」に4つの三角形に分割したプリズム状の要素を作成した。要素数は2次元解析と同じ1600要素である。

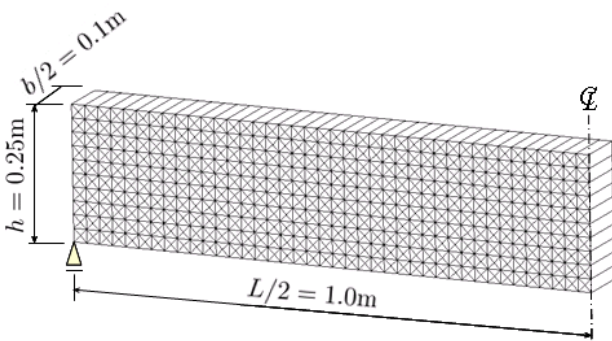


Fig.15 Mesh division with prism element

(a) 一定荷重

はじめに、一定荷重が作用する場合の結果について検討する。Fig.16 ははり中央最下端の応答変位の図である。○が HPM の結果を、青●が2次元 HPM(FEM)の結果、赤実線がはり理論の結果である。3次元解析の解は、周期、振幅ともはり理論の解に近い結果となった。

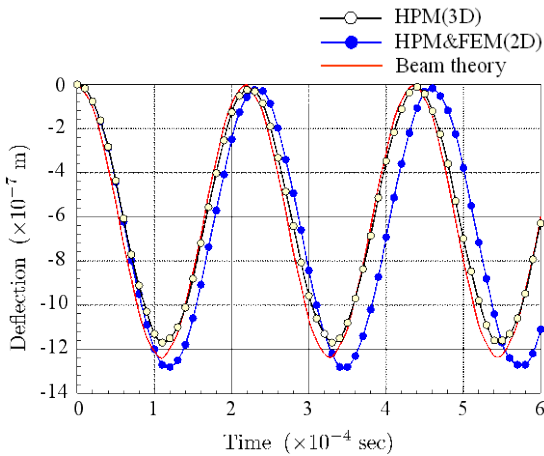


Fig.16 Displacement response (3D)

Fig.17 は、Fig.16 において最大変位と最小変位を示したときの変位モードである。左半分が最大変位、

右半分が最小変位の際のモードである、2次元の場合と類似の結果となっている。

Fig.18 は、vonMises の応力の図で2次元の場合と同様に、左半分が1次モードが支配的な曲げモードの応力状態、右半分が除荷状態の応力分布で無応力状態となっている。

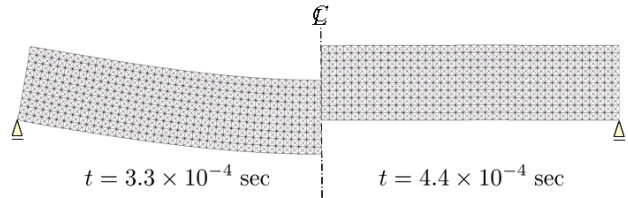


Fig.17 Displacement mode (3D)

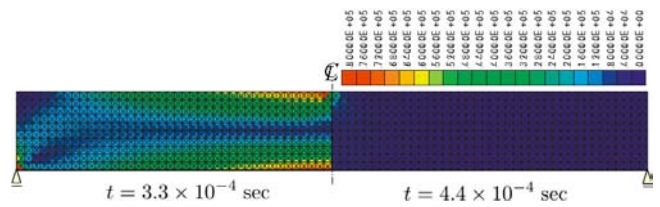


Fig.18 von Mises stress (3D)

(b) 衝撃荷重 (三角形)

最後に、Fig.5(b)に示す衝撃荷重 (三角形) が作用した場合の3次元応答解析結果を示す。Fig.19 は、応答変位の図である。○は、3次元 HPM の解、青●は2次元 HPM の解、赤実線ははり理論における1次モードの応答変位である。3次元解析の解は、一定荷重の場合と同様に、はり理論の解に近い周期と振幅となった。

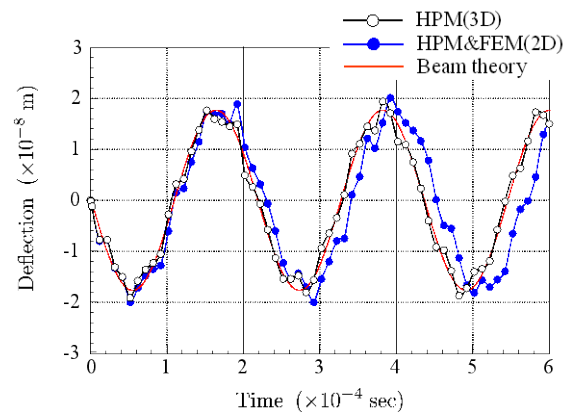


Fig.19 Deflection response with impact load (3D)

Fig.20 は、応答変位が最大、最小のときの変位モードを、Fig.21 はそのときの von Mises の応力の図で

ある。左半分が最大たわみ、右半分が最小たわみの場合の結果である。2次元の場合と同様に、高次モードの発生によって、なみをうったような複雑な変位モードを示しており、また応力分布も環状に衝撃波が伝わる傾向を示している。

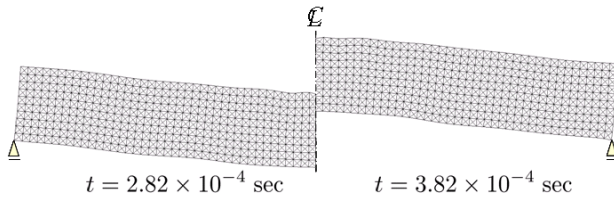


Fig.20 Displacement mode with impact load (3D)

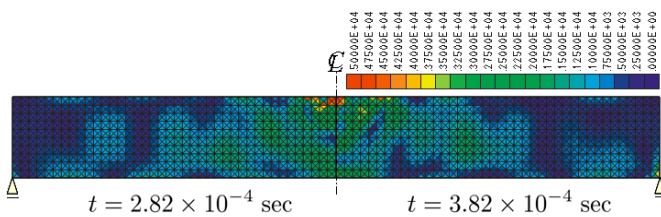


Fig.21 von Mises stress (3D)

6. まとめ

本論文では、Newmark の β 法を用いた HPM による動的問題の解析法を示し、2次元、3次元の数値計算例によって解の精度を検証した。

2次元問題では、変位、速度、加速度とも、FEM の三角形1次要素と HPM の1次変位場の解は一致した。また、3次元解析の方が、2次元解析よりは理論の解に近い結果が得られた。

このように、HPM ではペナルティ関数を用いているが、陰解法を用いれば、通常の FEM と同じ時間積分を適用しても精度の劣化は生じない。

参考文献

- [1] T.Kawai, "New element models in discrete structural analysis", J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.114, pp.1867-193,1997.
- [2] 鷲津久一郎, "弾性学の変分原理概論", 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972.
- [3] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦, "ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析", 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- [4] 見原理一, 竹内則雄, 草深守人, "2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発", 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp.249-257, 2005.
- [5] 大木裕久, 竹内則雄, "ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20060020), 2006.
- [6] Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D.: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM journal on numerical analysis, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002.
- [7] Arnold, D.N. : An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM journal on numerical analysis, Vol.19, No.4: pp.742-760, 1982.