

剛体ばねモデルにおける要素内応力の評価法について

On Estimation for Stress in Element of Rigid Bodies-Spring Model

竹内 則雄¹⁾ 田尻 康之²⁾ 山村 和人³⁾
Norio Takeuchi, Yasuyuki Tajiri, Kazuto Yamamura

¹⁾ 法政大学 理工学部機械工学科

²⁾ 法政大学大学院 システムデザイン研究科

³⁾ 新日本製鐵株式会社 環境・プロセス研究開発センター

The rigid-bodies spring model (RBSM) is a generalized model for discrete limit analysis, and assumes a rigid displacement field. For this reason, it cannot find the value of stress in each element. On the other hand, authors developed the Hybrid-type Penalty Method (HPM) which assumes the linear displacement field using the principle of hybrid type virtual work. In this paper, we proposed the method of finding for the stress in each element in RBSM by applying a rigid displacement field to the displacement field of this HPM, and examined the accuracy of the solution obtained from some examples of numerical computation by present method.

Keyword : RBSM, Stress, Hybrid-type Virtual Work

1. はじめに

川井によって開発された剛体ばねモデル(RBSM: Rigid Bodies-Spring Model) [1] は一般化された離散化極限解析用のモデルで, 要素を剛体と仮定し, 要素境界面上に設けたばねを用いて, 要素内の仕事のかわりに, 表面力のエネルギーを評価する方法である. 当初, 金属材料などの強非線形問題に適用し良好な結果を得ていたが[2], その後, 地盤やコンクリートの離散化極限解析にも適用されている[3][4].

本モデルは内在的に「すべり」の概念が取り入れられており, 効率よく離散化極限解析をおこなうことができるが, 剛体変位場を, すなわち要素を剛体と仮定しているため, 要素内のひずみや応力状況を把握することはできない. 著者らは, RBSMにおける要素分割の是非を判定するため, 最小二乗法を用いて, 近似的に要素内の応力を求める方法を提案し

た[5]. この方法は, 要素境界面の表面力を利用しており, 要素内のひずみを求めることはできない.

一方, 著者らは, ハイブリッド型の仮想仕事の原理をもとに, 線形の変位場を仮定して, 離散化極限解析を行うハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)を開発した[6]. この手法は, Lagrangeの未定乗数が物理的には表面力を意味するということから, RBSMのばねと同様な概念を導入し, ばね定数としてペナルティ関数を用いる方法である. この手法は, その後, 高次の変位場に対しても展開されている[7].

HPMにおける線形変位場では, 剛体変位とひずみをパラメータとして設定しており, これをハイブリッド型の仮想仕事式に適用すると, 剛体変位とひずみが連成した連立方程式が得られる. これを, 剛体変位とひずみの方程式に分離すると, RBSMと同様の離散化方程式と剛体変位を用いたひずみの関係が得られる.

本論文では, 上述の関係を用いて, RBSMによる解析の後, その結果を用いて要素毎に応力を求める方法を提案する. これによって得られる応力は, 反

原稿受付 2009年2月26日

発行 2009年3月31日

法政大学情報メディア教育研究センター

復法的には1次近似と考えることができる。最後に、本手法によって得られる解の精度をいくつかの数値計算例によって検証する。

2. ハイブリッド型仮想仕事式

いま, Fig.1 に示すように, Ω を n_{dim} 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($1 \leq n_{\text{dim}} \leq 3$) の有界領域とし, Γ を Ω の滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする. このとき, Ω 内における平衡方程式は以下のとおりである.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

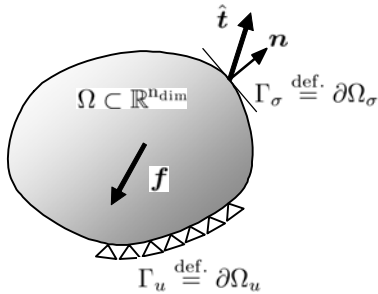


Fig.1 Reference configuration Ω and smooth boundary $\partial\Omega$.

ここで, \mathbf{f} は物体力, $\boldsymbol{\sigma}$ はCauchy応力である. いま \mathbf{u} は $\mathbf{x} \in \Omega$ における変位場で, 微小ひずみは次のように定義される.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (3)$$

ここで, ∇ は微分作用素であり, ∇^s は ∇ の対称部分を表している.

一方, 境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ($\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$) において, $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial\Omega$ は変位が与えられる境界, また, $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma \Omega \subset \partial\Omega$ は表面力が与えられる境界であり, それぞれ, 以下の関係にある.

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{given}) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{given}) \quad (5)$$

ただし, 外向き法線ベクトルが \mathbf{n} で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ と定義する. ここで, $\hat{\mathbf{n}}$ は境界 Γ_σ に対する法線ベクトルである.

弾性体に対する構成方程式は弾性テンソル \mathbf{D} を

用いて次のように表される.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

いま, 仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ を式(1)にかけ, 以下のように全領域に対して積分する

$$\delta W = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (7)$$

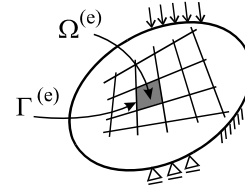


Fig.2 Sub-domain $\Omega^{(e)}$

さらに, Fig.2 に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとし, 以下のように考える.

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (8)$$

式(7)にGaussの発散定理を適用すると, 以下の仮想仕事式が得られる.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (9)$$

一方, ハイブリッド型の仮想仕事の原理では, Fig.3 に示すように, 隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$, すなわち,

$$\Gamma_{\langle ab \rangle} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (10)$$

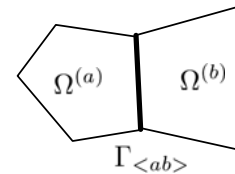


Fig.3 Common boundary $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ of sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$

において、付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (11)$$

をLagrangeの未定乗数 λ を用いて、

$$\delta H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \quad (12)$$

と表し、仮想仕事式に導入する[8]. ただし、 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表している. また、 $\delta(\bullet)$ は (\bullet) の変分量を表している.

このとき、隣接する2つの部分領域境界辺の数をNとすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる.

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \right) - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (13)$$

なお、Lagrangeの未定乗数 λ は、次式のように、 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味している[8].

$$\lambda = \mathbf{t}^{(a)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}) = -\mathbf{t}^{(b)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{t}^{(a)}$ と $\mathbf{t}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力である.

3. HPMの離散化方程式

いま、部分領域毎に独立な変位場を以下のように仮定する.

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_{\varepsilon}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (15)$$

ここで、上付きの (e) は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関するものであること意味する. 式(15)におけるそれぞれの係数は2次元平面問題の場合、以下のとおりである.

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u_p, v_p, \theta_p]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^t$$

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y - y_P) \\ 0 & 1 & (x - x_P) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{\varepsilon}^{(e)} = \begin{bmatrix} x - x_P & 0 & (y - y_P)/2 \\ 0 & y - y_P & (x - x_P)/2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{d}^{(e)}$ は、部分領域内の点 P における剛体変位と剛体回転を表しており、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ は、要素内で一定なひずみを表している.

一方、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ についても同様に、

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_{\varepsilon} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

と仮定する. さらに式(15)(16)を簡単に次のように整理する.

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (17)$$

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (18)$$

ここで、それぞれの係数は以下のとおりである.

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t, \quad \delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}]^t$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_{\varepsilon}^{(e)}]$$

これより、以下の関係が得られる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (19)$$

ここで、 \mathbf{L} は微分作用素である.

以上の関係を式(9)の仮想仕事式に代入すると以下のように離散化できる.

$$\delta W = \sum_{e=1}^M \left({}^t \delta \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \right) - \sum_{e=1}^M \left({}^t \delta \mathbf{U}^{(e)} \mathbf{P}^{(e)} \right) \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ 、 $\mathbf{P}^{(e)}$ は以下のとおりである.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} {}^t \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \quad (21)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} {}^t \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} {}^t \mathbf{N}^{(e)} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (22)$$

一方、付帯条件の関係式(12)を離散化するにあたり、Lagrangeの未定乗数が物理的には表面力を意味するという点を考慮し、境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の λ を以下のよう仮定する.

$$\lambda_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} \quad (23)$$

ここで、 $\delta_{\langle ab \rangle}$ は部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の相対変位を表しており、 \mathbf{k} はペナルティ関数に対応する係数行列である。

この相対変位は、次のように求められる。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \quad (24)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列である。

このとき、式(12)は次の用に表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta H_{ab} &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} {}^t \lambda_{\langle ab \rangle} \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} (\mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} - \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)}) d\Gamma \\ &= - \sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} {}^t \lambda_{\langle ab \rangle} \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (25)$$

これに、式(23)(24)の関係を用いると以下が得られる。

$$\delta H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} {}^t \delta_{\langle ab \rangle} \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (26)$$

いま、相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ を

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}]$$

$${}^t \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [{}^t \mathbf{U}^{(a)}, {}^t \mathbf{U}^{(b)}]$$

とすれば、式(26)は次のように表すことができる。

$$\delta H = \sum_{s=1}^N \delta H_s = - \sum_{s=1}^N (\mathbf{K}_{\langle s \rangle} \mathbf{U}_{\langle s \rangle}) \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{\langle s \rangle}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} {}^t \mathbf{B}_{\langle s \rangle} \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} d\Gamma \quad (29)$$

以上より、ハイブリッド型の仮想仕事式(13)に対する離散化方程式は、式(20)(28)より、

$$\delta W + \delta H = 0 \quad (30)$$

とすることで得られる。

4. HPMとRBSM

式(30)で表される離散化方程式をさらに詳細にマトリックスで整理し直す。いま、式(15)の線形変位場の場合、式(19)は

$$\mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{0}, \mathbf{I}] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(e)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

となる。したがって、仮想仕事式 δW は、仮想変位が任意であることより、次のようになる。

$$\delta W = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(e)} \mathbf{D}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(e)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d^{(e)} \\ \mathbf{P}_\varepsilon^{(e)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (32)$$

ここで、 $A^{(e)}$ は部分領域(e)の面積を表しており、 $\mathbf{P}_d^{(e)}$ および $\mathbf{P}_\varepsilon^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{P}_d^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} {}^t \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} {}^t \mathbf{N}_d^{(e)} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} {}^t \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} {}^t \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma$$

同様に、付帯条件の関係 δH に関して、式(27)に示した $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}$ は、式(15)の関係を用い、マトリックスで表現し直すと次のようになる。

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\bar{\mathbf{N}}_d^{(a)}, \bar{\mathbf{N}}_\varepsilon^{(a)}, \bar{\mathbf{N}}_d^{(b)}, \bar{\mathbf{N}}_\varepsilon^{(b)}] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(a)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} \\ \mathbf{d}^{(b)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

ここで

$$\bar{\mathbf{N}}_d^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}_d^{(a)}, \quad \bar{\mathbf{N}}_\varepsilon^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}_\varepsilon^{(a)}$$

$$\bar{\mathbf{N}}_d^{(b)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}_d^{(b)}, \quad \bar{\mathbf{N}}_\varepsilon^{(b)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}_\varepsilon^{(b)}$$

したがって、式(28)で示した δH_{ab} は次のように整理して表すことができる。

$$\delta H_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{dd}^{\langle aa \rangle} & \mathbf{k}_{d\varepsilon}^{\langle aa \rangle} & \mathbf{k}_{dd}^{\langle ab \rangle} & \mathbf{k}_{d\varepsilon}^{\langle ab \rangle} \\ & \mathbf{k}_{\varepsilon\varepsilon}^{\langle aa \rangle} & \mathbf{k}_{\varepsilon d}^{\langle ab \rangle} & \mathbf{k}_{\varepsilon\varepsilon}^{\langle ab \rangle} \\ \text{sym.} & & \mathbf{k}_{dd}^{\langle bb \rangle} & \mathbf{k}_{d\varepsilon}^{\langle bb \rangle} \\ & & & \mathbf{k}_{\varepsilon\varepsilon}^{\langle bb \rangle} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(a)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} \\ \mathbf{d}^{(b)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

ここで

$$\mathbf{k}_{dd}^{\langle ab \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} {}^t \bar{\mathbf{N}}_d^{(a)} \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}_d^{(b)} d\Gamma, \quad \mathbf{k}_{d\varepsilon}^{\langle ab \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} {}^t \bar{\mathbf{N}}_d^{(a)} \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}_\varepsilon^{(b)} d\Gamma$$

$$\mathbf{k}_{\varepsilon d}^{<ab>} = \int_{\Gamma_{<ab>}} {}^t\bar{\mathbf{N}}_{\varepsilon}^{(a)} \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}_d^{(b)} d\Gamma, \quad \mathbf{k}_{\varepsilon\varepsilon}^{<ab>} = \int_{\Gamma_{<ab>}} {}^t\bar{\mathbf{N}}_{\varepsilon}^{(a)} \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}_{\varepsilon}^{(b)} d\Gamma$$

以上の関係を用いて式(30)を \mathbf{d} と ε で整理しなおし、全体系で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{d\varepsilon} \\ \mathbf{K}_{\varepsilon d} & \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d \\ \mathbf{P}_{\varepsilon} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

式(35)は、線形変位場を用いたHPMの離散化方程式をマトリックスにより表示したものである。

一方、RBSMでは、式(15)の線形変位場に対して、以下のように剛体変位場を仮定する。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} \quad (36)$$

この関係を、これまで述べてきたHPMの展開に適用すれば、式(35)は、以下のようになる。

$$\mathbf{K}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{P}_d \quad (37)$$

これを詳細に記述すると、以下のようになる。

$$\sum_{s=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{dd}^{<s_a s_a>} & \mathbf{k}_{dd}^{<s_a s_b>} \\ \mathbf{k}_{dd}^{<s_b s_a>} & \mathbf{k}_{dd}^{<s_b s_b>} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{(s_a)} \\ \mathbf{d}^{(s_b)} \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^N \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d^{(s_a)} \\ \mathbf{P}_d^{(s_b)} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ここで、係数行列は以下のとおりである。

$$\mathbf{k}_{dd}^{<ab>} = \int_{\Gamma_{<ab>}} {}^t\bar{\mathbf{N}}_d^{(a)} \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}_d^{(b)} d\Gamma \quad (39)$$

HPMにおいて、式(39)の \mathbf{k} は、式(23)で仮定したようにペナルティ関数を意味している。

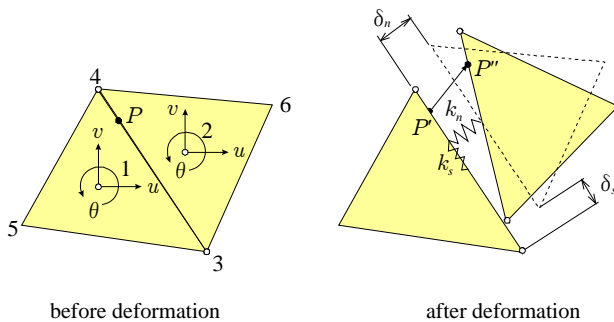


Fig.4 Rigid Bodies-Spring Model

一方、RBSMでは、Fig.4に示すように \mathbf{k} をばね

定数と考え、以下のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (40)$$

ここで、 k_n, k_s は平面ひずみの場合、以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)(h_1+h_2)} \\ k_s &= \frac{E}{(1+\nu)(h_1+h_2)} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

E は弾性係数、 ν はポアソン比、 h_1, h_2 は各要素の図心から、該当境界辺に下した垂線の高さである。このばね定数を用いると、式(37)は、RBSMの離散化方程式と一致する[1]。

5. RBSMの要素内応力

式(35)の関係は以下のように書くこともできる。

$$\mathbf{K}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{P}_d - \mathbf{K}_{d\varepsilon} \varepsilon \quad (42)$$

$$\mathbf{D} \varepsilon = \mathbf{P}_{\varepsilon} - (\mathbf{K}_{\varepsilon d} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon) \quad (43)$$

RBSMの解式は、式(42)において、 $\varepsilon = 0$ とした場合に一致する。すなわち、線形変位場を仮定したHPMの1次近似ととらえることができる。

一方、式(43)は、本来、式(42)と連立して解くべき式であるが、式(42)で求めた剛体変位を用いて、

$$\mathbf{D} \varepsilon = \mathbf{P}_{\varepsilon} - \mathbf{K}_{\varepsilon d} \mathbf{d} \quad (44)$$

とすることで、近似的に要素内応力を求めることを考える。

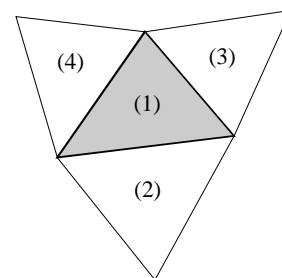


Fig.5 Element (1) and adjoining element

いま, Fig.5のように, 要素(1)とそれに隣接する要素(2)~(4)を例に式(44)を展開してみる. このとき, 着目要素(1)の境界辺に関する積分は(2)~(4)要素のみに関係し, その他の要素とは連立方程式上の関連性はない. この例に対する式(44)の一部を示すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} \dots & & & & & \\ & A^{(1)}D^{(1)} & & & & \\ & & A^{(2)}D^{(2)} & & & \\ & & & A^{(3)}D^{(3)} & & \\ & 0 & & & A^{(4)}D^{(4)} & \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \varepsilon^{(3)} \\ \varepsilon^{(4)} \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ P_{\varepsilon}^{(1)} \\ P_{\varepsilon}^{(2)} \\ P_{\varepsilon}^{(3)} \\ P_{\varepsilon}^{(4)} \\ \dots \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \dots & & & & & \\ & 0 & 3k_{\varepsilon d}^{(1,1)} & k_{\varepsilon d}^{(1,2)} & k_{\varepsilon d}^{(1,3)} & k_{\varepsilon d}^{(1,4)} & 0 \\ & & k_{\varepsilon d}^{(1,2)} & k_{\varepsilon d}^{(2,2)} & & & \\ & & k_{\varepsilon d}^{(1,3)} & & k_{\varepsilon d}^{(3,3)} & & \\ & & k_{\varepsilon d}^{(1,4)} & & & k_{\varepsilon d}^{(4,4)} & \\ & & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ d^{(1)} \\ d^{(2)} \\ d^{(3)} \\ d^{(4)} \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (45)$$

ここで, $A^{(e)}$ はe番目の要素の面積を表している. 上式において, $A^{(e)}D^{(e)}$ は要素毎に独立であり, e番目の要素に着目すると, 以下の関係が得られる.

$$A^{(1)}D^{(1)}\varepsilon^{(1)} = P_{\varepsilon}^{(1)} - \left(3k_{\varepsilon d}^{(1,1)}d^{(1)} + k_{\varepsilon d}^{(1,2)}d^{(2)} + k_{\varepsilon d}^{(1,3)}d^{(3)} + k_{\varepsilon d}^{(1,4)}d^{(4)} \right) \quad (46)$$

右辺は, 要素内応力に要素面積をかけた値(力)であり, 左辺は要素境界の表面力による要素内の力を意味しており, これが釣り合うということから, 要素内の応力を近似的に求めていることになる.

以上のことから, 本論文では, RBSMの結果(剛体変位もしくは表面力)を利用して, 式(46)から, 近似的に要素内応力を求める方法を提案する.

6. 数値計算例

ここでは, 本手法によって得られる応力の精度をいくつかの数値計算例によって検証する.

(1) 内圧を受ける厚肉円筒

Fig.6は, 内圧を受ける圧肉円筒の解析モデルで, 材料定数, 境界条件, 荷重条件は図に示すとおりである. また要素分割は, 半径方向20分割, 円周方向36分割で, 格子内を4つの三角形から構成されるようにクロスに分割している.

Fig.7は, 半径方向の応力を解析解と比較した結果

である. 横軸は中心からの位置, 縦軸は内圧で無次元化した半径方向の応力である. 中央部付近で, 本手法による応力は, 若干大きめの値を示すが, 全体的には, 良好な近似となっている.

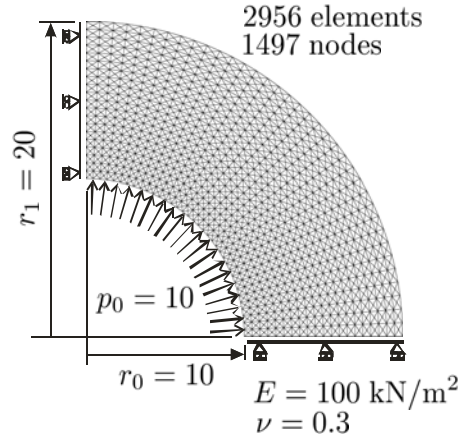


Fig.6 Thick cylinder applied internal pressure

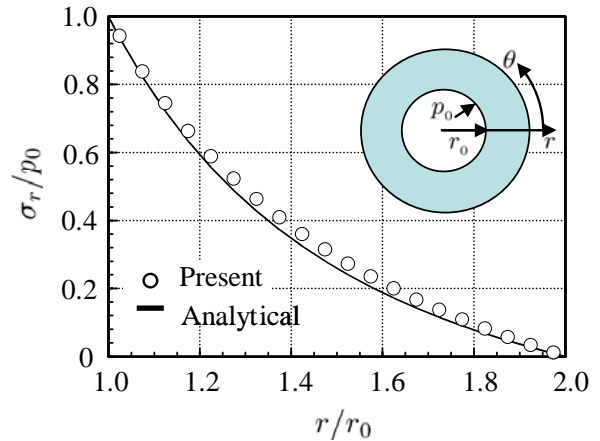


Fig.7 Radial stress

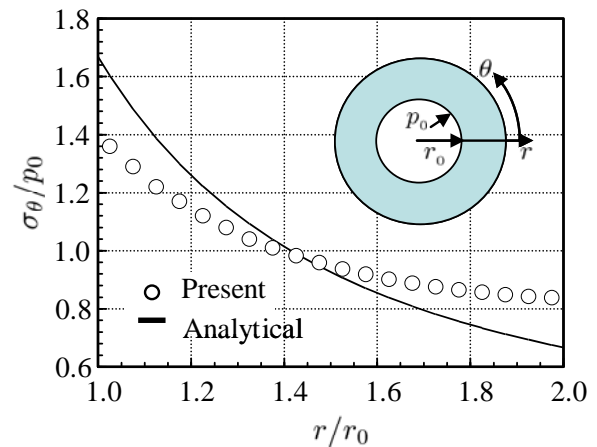


Fig.8 Circumferential stress

一方, Fig.8は, 半径方向の応力で, 横軸は中心からの距離, 縦軸は無次元化された半径方向の応力である. 内側, 外側で厳密解からはずれる結果となっている. これは, RBSMによる変位解の誤差が反映されたためと思われる.

Fig.9は, vonMisesの応力をカラーコンターで表示したものである. 若干, まだらな分布となっており, RBSMの解の影響が現れる.

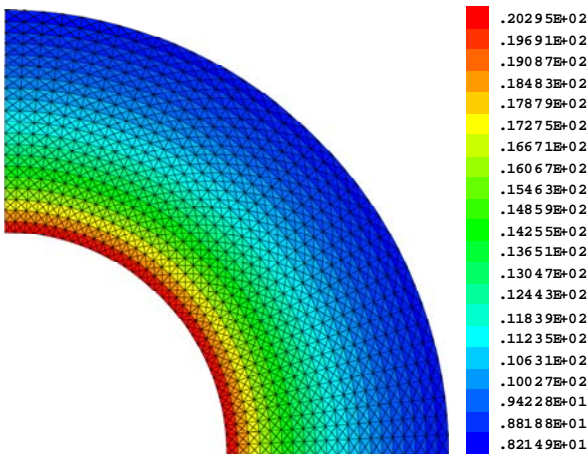
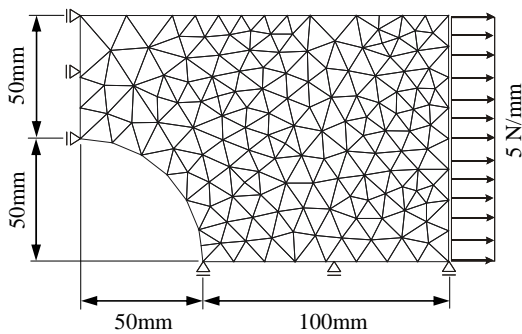


Fig.9 distribution of vonMises stress

(2) 円孔を有する平板の引っ張り

Fig.10は円孔を有する平板の引っ張り解析のモデルである. 寸法, および, 材料定数, 要素分割は図に示すとおりである.



$$E = 2.1 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Fig.10 Plate subjected tensile load with circle hole

Fig.11は, vonMisesの応力分布を示したもので, (a)が本手法による解, (b)が線形変位場を仮定したHPMによる解である. HPMの解は, FEMにおける定ひず

み要素による解と一致している. 最大応力は, 円孔上部の要素 (赤い部分) で生じており, 本手法の値が 171.66N/m^2 , HPMによる値が 177.84N/m^2 で, 約 3.5%の相対誤差であった. 応力の分布状況も, 本手法とHPMとで, ほぼ類似の傾向を示しており, 良好な近似が得られている.

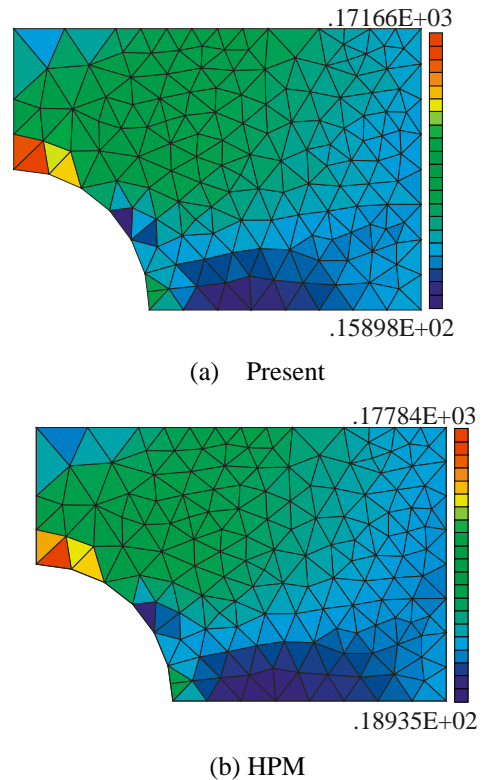
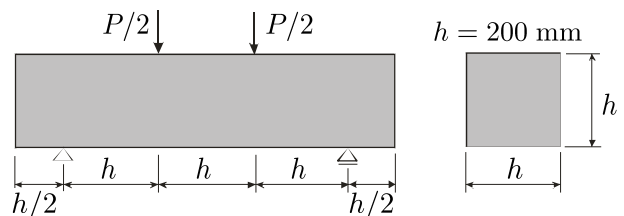


Fig.11 Distribution of vonMises stress

(3) 梁の曲げ

Fig.12は, 2点荷重を受けるはりの解析モデルを示している. 寸法, 材料定数, 境界条件, 荷重条件は図に示すとおりである.



$$E = 27.5 \text{ GPa} \quad P = 30 \text{ kN}$$

$$\nu = 0.2$$

Fig.12 Beam

Fig.13は, VonMisesの応力を示した図で, 上段が

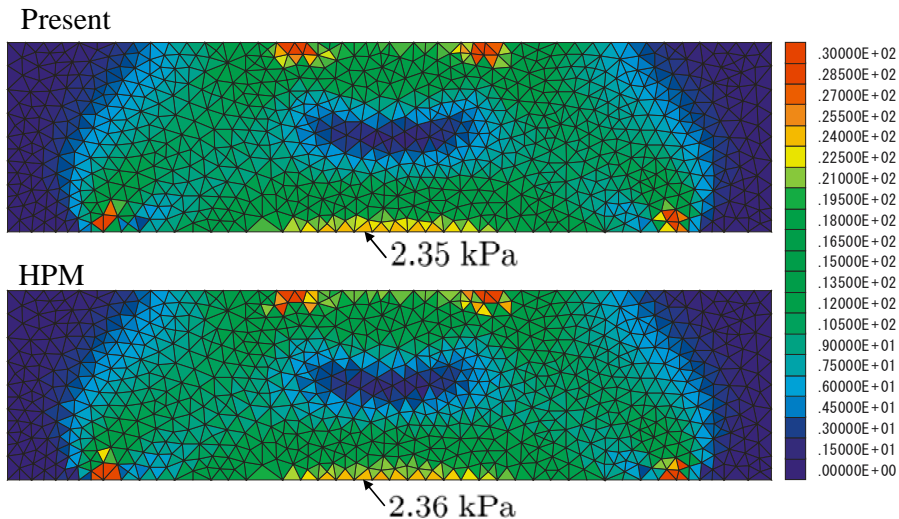


Fig.13 Distribution of vonMises Stress

本手法による解，下段がHPMによる解である．カラーコンターのレベルは両者で統一している．荷重点と支持点近傍で若干異なるのは，RBSMとHPMで拘束条件や荷重条件の処理の方法が異なるからであり，両者の応力の分布状況はほぼ一致する．ちなみに，やはり中央部下端における応力は，本手法が2.35kPa，HPMが2.36kPaで，約0.4%の相違であった．

7. まとめ

これまで，RBSMの定式化にあたっては，物理的な意味合いを持たせ，境界辺上に設けたばねの力学によって展開してきたが，ハイブリッド型仮想仕事の原理を元にしたHPMの展開において剛体変位場を適用することで，これまでのRBSMの離散化方程式と全く同様な離散化方程式が得られることを示した．すなわち，RBSMは，剛体変位場を有するHPMの特殊なケースと考えることができる．

一方，この展開において，1次近似として，要素内のひずみと該当要素および，隣接する要素の剛体変位の関係が得られる．次に，この関係を用いて，要素内の応力を求める方法を提案し，簡単な数値計算例から，得られる解の精度を検証したところ，若干誤差が含まれるケースもあったが，おおむね，良好な近似値を求めることができた．

このようにして得られた応力を用いることで，文献[5]に示したような，要素分割の是非の検討がより効果的に行えるものと考えられる．また，要素内の応力を参考に，その要素における降伏強度に対する安全率を近似的に求めることも可能となり，RBSMの解

析結果を用いた安全性の議論において，より多くの情報が提供できるものと考えられる．

なお，本手法は，RBSMの離散化極限解析によって得られた結果を利用しており，例えば，荷重増分法における最終ステップのみ計算するといった，好きなステップのみ，応力を求めることが可能である．

参考文献

- [1]T.Kawai, "New element models in discrete structural analysis", J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.114, pp.1867-193,1997.
- [2]都井裕, "鋼構造の離散化極限解析", 培風館, 1990.
- [3]竹内則雄, "地盤力学における離散化極限解析", 培風館, 1991.
- [4]竹内則雄, 上田真穂ほか, "鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析", 丸善, 2005.
- [5]竹内則雄, 川井忠彦, "新離散化極限解析の誤差評価に関する一方法について", 生産研究, Vol.33, No.2, pp.32-35, 1981.
- [6]竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦, "ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析", 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- [7]見原理一, 竹内則雄, 草深守人, "2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発", 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp.249-257, 2005.
- [8]鷺津久一郎, "弾性学の変分原理概論", 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972.