

波動透過境界の最適化に関する研究

A study on Optimization of Wave Transmitting Boundary

伊野 慎二¹⁾ 古谷 忍¹⁾ 吉田 長行²⁾
Shinji Ino, Shinobu Furuya, Nagayuki Yoshida

¹⁾ 法政大学大学院工学研究科建設工学

²⁾ 法政大学工学部建築学科

When analyzing the wave propagation problem in the infinite or semi-infinite elastic body, the numerical device which can transmit the outgoing waves should be attached to the boundary of the finite analytical region. Several objective functions are proposed to find out the optimal property of boundary coefficients. Optimization is performed by genetic algorithm. By evaluating a lot of numerical results on finite bars, the vibration energy function is chosen as the best.

Keyword : Wave propagation, Transmitting boundary, Genetic algorithm, Semi-infinite bar

1. はじめに

近年、地盤の非線形な挙動^{[6][7][8]}が活発に研究されている。非線形問題を扱う場合には、有限要素法が有効かつ柔軟な手法であることは良く知られている。しかしながら、有限要素法は本来、有限領域を対象とする数値解析手法であるため、無限あるいは半無限弾性体の波動伝播問題に適用する場合には、Fig.1のように内部から外部に逸散する波動が境界領域で反射しないための工夫が必要である。

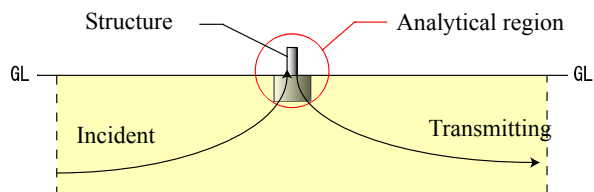


Fig.1 Analytical region

評価関数の設定とその最適化手法の選択が重要である。本研究は有限領域での無反射境界装置の作成を目指した初期研究である。理論確認^{[4][5]}と分析のため、1次元棒材モデル (Table 1) を解析対象とする。

粘性減衰係数 c^* 、ばね係数 k^* によって構成される Lysmer's model (Fig.2) を境界装置として採用し、その性能を評価する関数の最小化、または最大化を図ることで各係数値の最適化を実現する。最適化には利便性に富む遺伝的アルゴリズム (GA) を用いる。

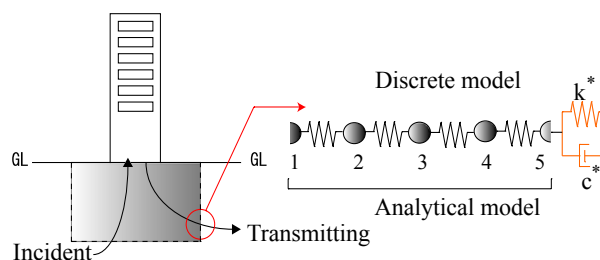


Fig.2 Lysmer's model

このような無反射処理²⁾を行う境界装置の実現には

原稿受付 2008年2月29日

発行 2008年3月31日

法政大学情報メディア教育研究センター

Copyright © 2008 Hosei University

Table 1 Model's data

| | | |
|--------|--------------------|---------------------------|
| E | Young's | 1000 (N/cm ²) |
| ρ | density | 1 (kg/cm ³) |
| As | cross-sectional | 1 (cm ²) |
| TL | length of bar | 10 (cm) |
| n | number of division | 4 |

以下に、本論の解析式に用いる諸量をまとめておく。

Notation

- [M],[C],[K]: lumped mass, damping, stiffness matrices
- c^*, k^* : viscous damping, spring coefficient
- x_0 : observed point
- $\{x\}$: displacement vector in time domain
- $\{X\}$: displacement vector in frequency domain
- $\{A\}$: minimum points of displacement
- $\{B\}$: maximum points of displacement
- $\{\phi\}$: modal matrix of vibration
- $\{\varphi\}$: eigen vector
- $\{f\}$: Impulsive force vector
- $\{U\}$: theoretical solution of displacement
- p_r : eigen value
- N, n : number of eigenvalue, number of division
- i : nodal number
- ω, t : natural circular frequency, time

2. 解析法

2.1 マトリクス振動方程式

非比例減衰を扱う棒材の振動方程式は次のように表される。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

ここに、

質量マトリクス要素 : $m = \rho A s TL$

剛性マトリクス要素 : $k = \frac{EAs}{TL}$

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m/2n & & & \\ & m/n & & \\ & & \ddots & \\ & & & m/2n \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & c^* \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} nk & -nk & & \\ -nk & 2nk & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -nk \\ & & -nk & nk + k^* \end{bmatrix} \\
 \{f\} &= [f_0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \\
 &\left(\begin{array}{l} f_0 = 1 \quad \text{in frequency domain} \\ f_0 = 0 \quad \text{in time domain} \end{array} \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

なお、後の解析では断らない限り、レイリー減衰

3%を導入する。

2.2 周波数応答

振動方程式を Foss の方法^{[1][3]}に従い、変形すると、

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{f^i\} \quad (3)$$

ここに、

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \quad \{f^i\} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

自由振動状態を $\{y\} = \{Y\}e^{pt}$ と置換して変形すると、

$$(p[A] + [B])\{Y\} = \{0\} \quad (6)$$

次に ϕ_1 は p_1 で振動する振動モードである。この第1次から n 次までの固有変位ベクトルから固有ベクトルマトリクスを作成すると、

$$[\phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}] \quad (7)$$

また、固有値 p_r で構成された n 次元固有値対角マトリクスを以下に示す。

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(7)及び、式(8)の共役部を考慮して作成した固有ベクトルマトリクスを以下に示す。

$$\begin{aligned}
 [\Phi] &= [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_{2n}\}] = \begin{bmatrix} [\phi] & [\phi^*] \\ [\varphi] & [\Lambda] & [\varphi^*] & [\Lambda^*] \end{bmatrix} \\
 & \quad (*: \text{complex conjugate})
 \end{aligned} \quad (9)$$

次に式(6)を r 次について考えると、

$$p_r[A]\{\phi_r\} + [B]\{\phi_r\} = 0 \quad (10)$$

式(6)で固有ベクトルの直交性を考慮すると、

$$[\Lambda] = -[a]^{-1}[b] \quad (11)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 a_r &= \{\phi_r\}^T [A] \{\phi_r\} \\
 b_r &= \{\phi_r\}^T [B] \{\phi_r\}
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, [b] = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

次に独立性より n 組の固有ベクトルは線形結合と表記できるので、

$$\begin{aligned} \{Y\} &= z_1 \{\phi_1\} + z_2 \{\phi_2\} + \dots + z_n \{\phi_n\} + z_1^* \{\phi_1^*\} + \dots + z_n^* \{\phi_n^*\} \\ &= \sum_{r=1}^{2n} z_r \{\phi_r\} = [\phi] \{z\} \end{aligned} \quad (14)$$

式(3)を 2n 次の非連成方程式に変換し、振動モードマトリクスを掛け、式(14)を適用すると、

$$[p[a] + [b]]\{z\} = [\phi]^T \{f'\} \quad (15)$$

式(15)を {z} について展開すると、

$$\{z\} = \frac{[\phi]^T \{f'\}}{p[a] + [b]} \quad (16)$$

さらに、式(16)の両辺に後から振動モードマトリクスを掛けると、

$$\{z\}[\phi] = \frac{[\phi]^T \{f'\}[\phi]}{p[a] + [b]} \quad (17)$$

式(17)を変形すると、

$$\{z\}[\phi] = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\{\phi_r\}^T \{f'\} \{\phi_r\}}{b_r + p a_r} \quad (18)$$

最後に式(9)より変位応答部のみについて共役部を考慮して式(18)を変形すると、

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\{\phi_r\}^T \{f\} \{\phi_r\}}{a_r(i\omega - p_r)} + \frac{\{\phi_r^*\}^T \{f\} \{\phi_r^*\}}{a_r^*(i\omega - p_r^*)} \right] \quad (19)$$

式(19)の有効性は周波数応答を振動数の有理関数で解析的に表示できる点にある。

なお、半無限棒の周波数応答解の厳密解は次式となる。

$$\{U\} = \frac{\{f\}}{As} \cdot \frac{i}{\omega p V_p} e^{-ik_p x_0} \left(V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, k_p = \frac{\omega}{V_p} \right) \quad (20)$$

2.3 時刻歴応答

振動方程式 (式(1)) の時刻歴応答解 {x} は線形加速度法により求められる。初期条件として単位インパルスをもとに質点 1 に次のように与える。

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{m_1} = \frac{2n}{m} = \frac{2n}{\rho A s T L} \quad (21)$$

2.4 最適化プロセス

以下に本研究の評価関数の GA による最適化プロセスのチャートを Fig.3 に示す。

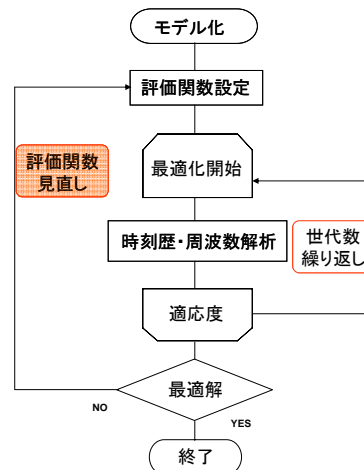


Fig.3 Analytical process

GA の中でもルーレット戦略とエリート戦略を用いる。

$$\text{Minimize or Maximum } f(x) \quad (22)$$

$$\text{Subject to } x \in S \quad (23)$$

f(x) は決定変数ベクトル x の関数で、評価関数と呼ばれ、次節で具体的に示される。S は x が取り得る範囲を形式的に表したものである。また、突然変異率は染色体ビット数に依存して決定する。

$$\frac{2}{\text{bit count of chromosomes}} = 0.25 \quad (24)$$

刻み固有円振動数と刻み時刻及び、GA の解析条件を Table 2 に示す。

Table 2 Analytical condition

| | |
|--------------------------|------------------|
| $\Delta\omega$ | 0.1 (2 π Hz) |
| Δt | 0.01 (sec) |
| generation number | 100~300 |
| number of individuals | 10 |
| bit count of chromosomes | 8 |
| mutation rate | 0.25 |

3. 評価関数の検討

本節では周波数領域と時間領域における5つの評価関数を提示する。各関数はGAによる最小化または最大化を目指した最適化プロセスを経て、その有効性が検討される。

3.1 周波数領域

■ Difference function from theoretical spectrum

理論解近似評価関数：式(19)(20)による周波数変位応答 $\{X\}$ と厳密解 $\{U\}$ との差を最小化したものを Fig.4 に示す。

$$f(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\{X\} - \{U\}|^2 d\omega} \quad (25)$$

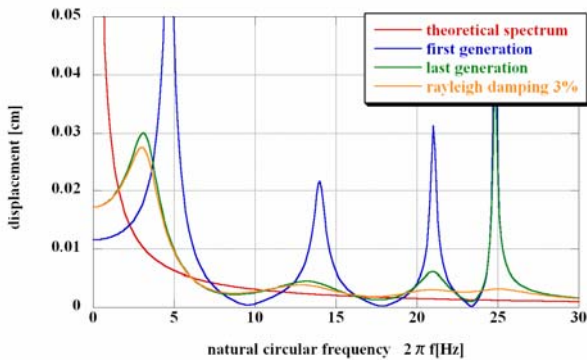


Fig.4 Difference function from theoretical spectrum

■ Areal function of response spectrum

面積評価関数：式(19)の ω に関する無限領域積分を留数定理により解析的に算出し、最小化したものを Fig.5 に示す。

$$g(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\{X\}|^2 d\omega} \quad (26)$$

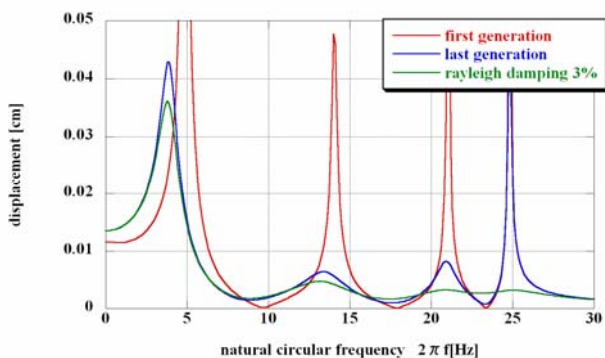


Fig.5 Areal function of response spectrum

■ Smoothness function of response spectrum

凹凸度評価関数：共振部の平滑化 (Fig.6) を目的として、周波数変位応答の凹凸差を最小化したものを Fig.7 に示す。

を Fig.7 に示す。

$$h(X) = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\{A_i\} - \{B_i\}}{\{A_0\}} \right| + \sum_{i=2}^N \left| \frac{\{A_i\} - \{B_{i-1}\}}{\{A_0\}} \right| \right) \quad (27)$$

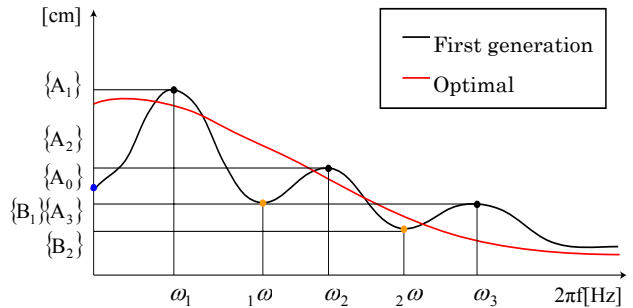


Fig.6 Optimal smoothness function of response spectrum

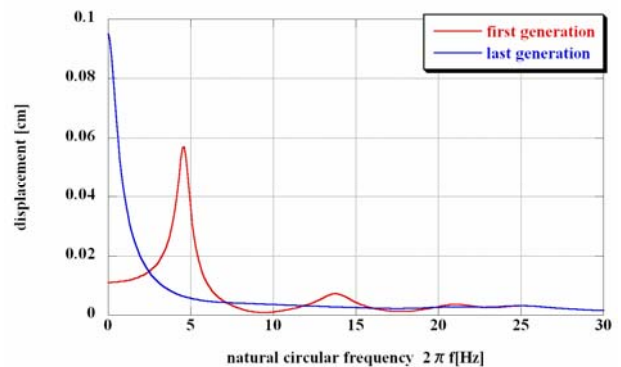


Fig.7 Smoothness function of response spectrum

3つの評価関数による結果を Fig.8 に示す。これより凹凸度評価関数が最も有効であると判断できる。

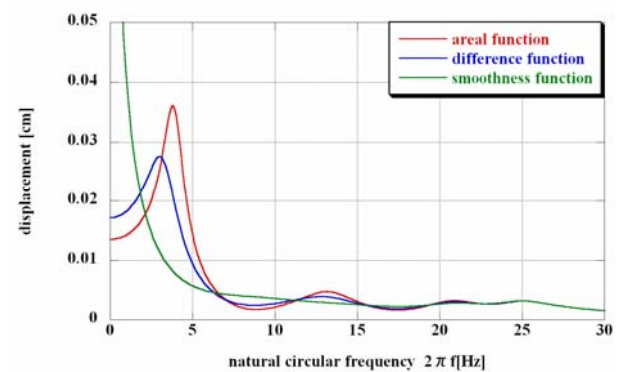


Fig.8 Comparison of objective functions in frequency domain

3.2 時刻歴領域

■ Damping energy function

減衰エネルギー評価関数：解析対象部（境界装置を除く部分）の振動を制御するため、減衰エネルギーを最大化したものを Fig.9 に示す。

$$D(x) = \int_0^t \dot{x}^T [C] \dot{x} dt \quad (28)$$

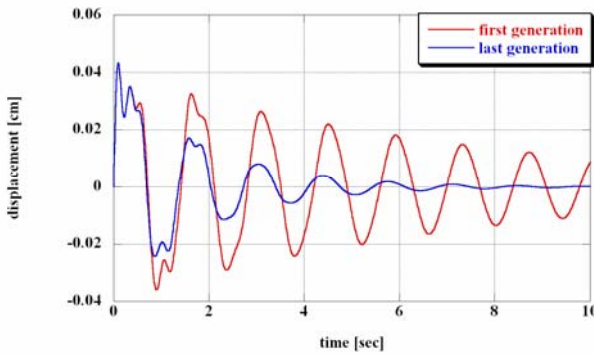


Fig.9 Damping energy function of displacement response

■ Vibration energy function

振動エネルギー評価関数：振動を制御するため、解析対象部の振動エネルギーを最小化したものを Fig.10 に示す。

$$E(x) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{x}^T [M] \dot{x} + \frac{1}{2} x^T [K] x \right) dt \quad (29)$$

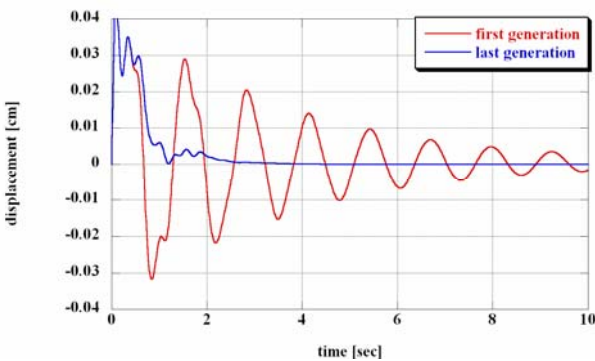


Fig.10 Vibration energy function of displacement response

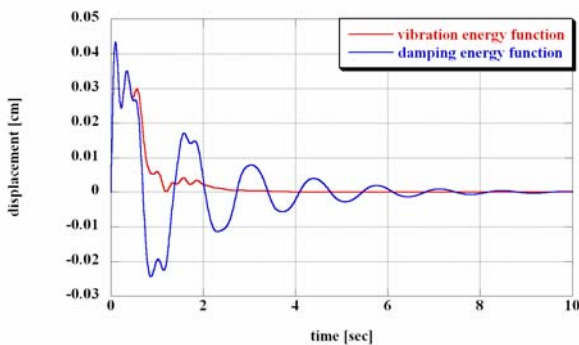


Fig.11 Comparison of objective functions in time domain

2つの評価関数を振動収束の点から比較すると、Fig.11より振動エネルギー評価関数が最も有効と判断できる。

3.3 周波数領域評価と時間領域評価の比較

Fig.12に凹凸度評価関数と振動エネルギー評価関数による最適解の結果を周波数領域と時間領域で比較する。

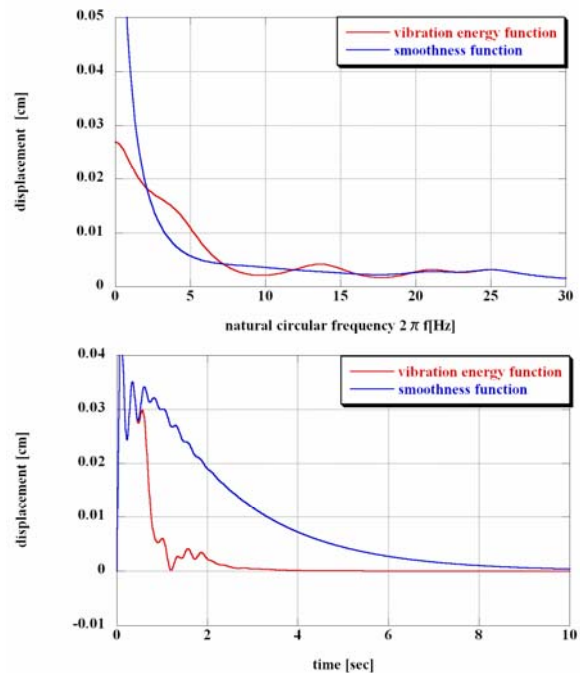


Fig.12 Evaluation in time and frequency domain

図より共振部の凹凸、振動の減衰性をみると振動エネルギー評価関数がより有効であることが分かる。また、解析効率の点でも振動エネルギー評価関数が有利である。

4. 無反射境界の性能評価

有効と判断した振動エネルギー評価関数の最適解として得られる無反射境界の性能評価を分析する。

4.1 振動と波動

質点1から5の応答振動を Fig.13 に示す。

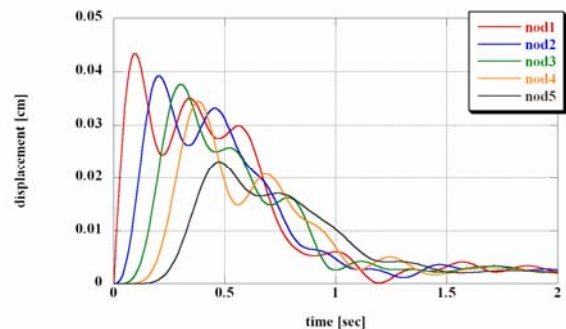


Fig.13 Response of displacement at nodes

一方、インパルスによる波頭が右端の境界で反射して左端に帰ってくる帰還時間はP波が棒材を往復する時間として式(30)により算定できる。

$$t' = \frac{TL}{V_p} = 0.316 \text{ sec} \tag{30}$$

$$t^* = 2t' = 0.632 \text{ sec}$$

この反射波の帰還時間 t^* を 8 等分し、縦軸：変位量[cm]、横軸：質点番号、1step=0.079[sec]として示した解析結果が、Fig.14 である。

4.2 離散モデルの有効性の検証

レイリー減衰 3%導入した振動エネルギー評価関数の最適解とレイリー減衰なしの固定端モデル、レイリー減衰 3%導入した固定端モデルの時刻歴変位応答を比較した結果、Fig.15 より境界装置の導入が有効であることが確認できる。

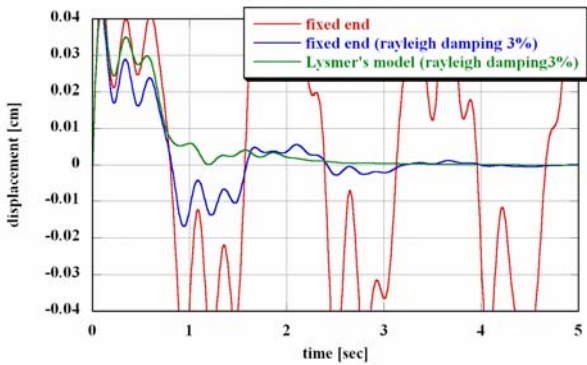


Fig.15 Evaluation of effectiveness of discrete model

4.3 解析領域の大きさに関する検討

解析領域の大きさが境界装置に与える影響を調べるため Fig.16 のように解析モデルの長さを 20cm, 30cm とした場合の時刻歴応答と比較する。Fig.17 に解析モデルにおける最適応答波形と各モデルの反射波の帰還時間（破線）を示す。各モデルの帰還時間までの振動成分を比較すると、ほぼ同一形状を示し、以後は振動性ない減衰過程に移行している。このことは、最適境界装置が境界領域の大きさに拘わらず、帰還時間までに振動エネルギーの全量をレイリー減衰と境界装置で吸収したことを意味する。一方、帰還時間後のコーダ部は境界装置の歪みエネルギーを減衰エネルギーに変換するための原位置への戻り過程であると解釈できる。

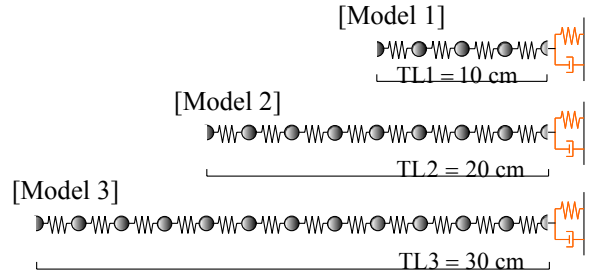


Fig.16 Three models with different lengths

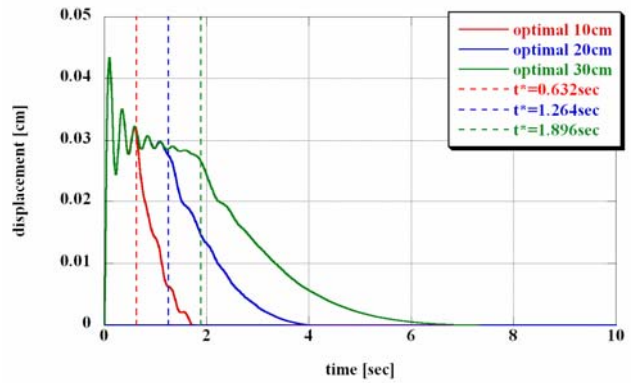


Fig.17 Comparison of three models

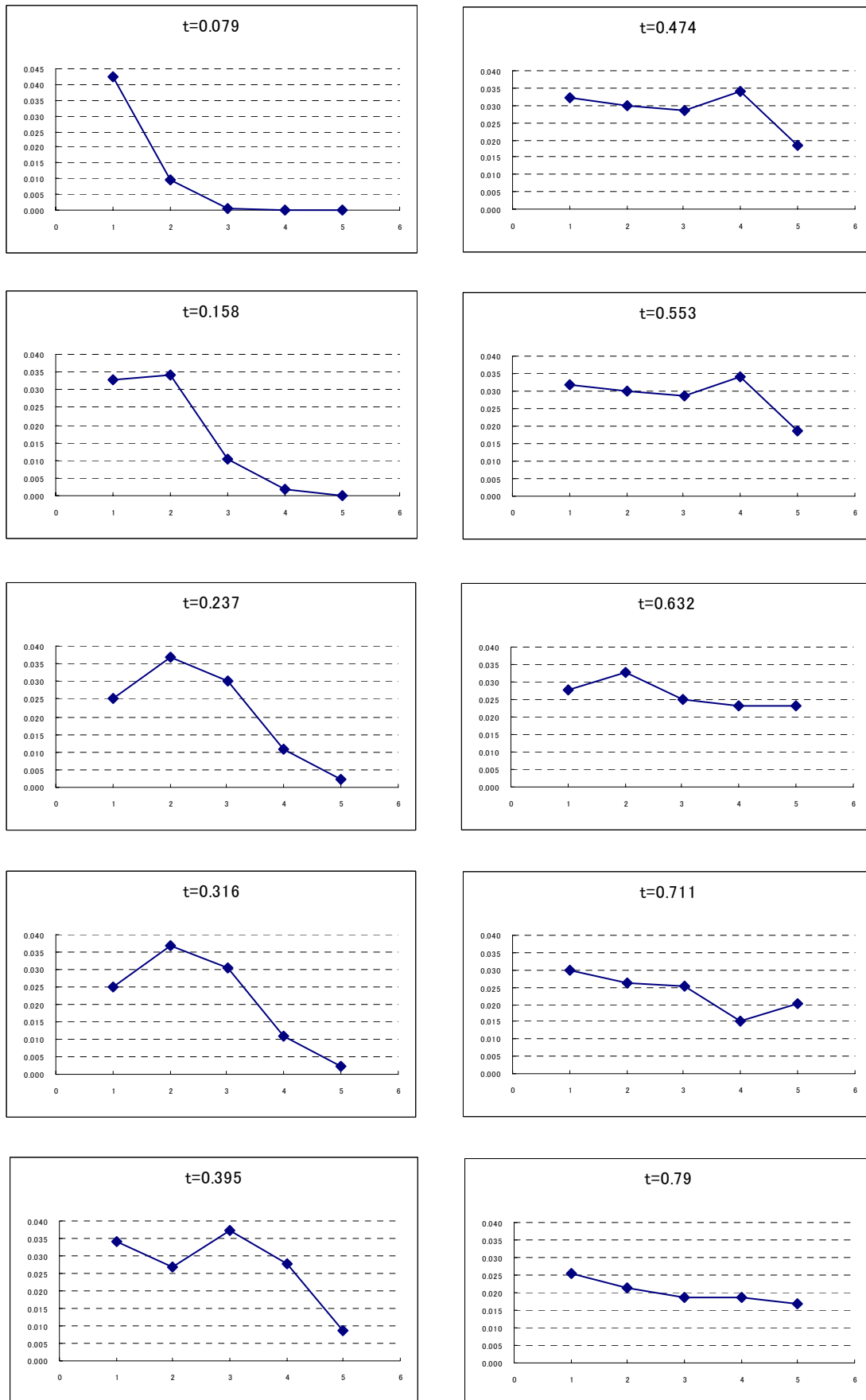


Fig.14 Characteristics of behavior of nodal points

4.5 大規模解析との比較

Fig.18 の大規模モデルの解析長さを 750cm, 3000cm としそれぞれ反射波の帰還時間による影響を検証する。Fig.19 では 750cm モデルにおける帰還時間に反射波の影響が認められる。3000cm モデルでは反射波のない半無限棒の場合と同一の結果を解析時間内において実現している。よって大規模解析 3000cm モデルの解を半無限棒の時刻歴厳密解として本研究の最適解と比較することができる。Fig.20 によれば、ほぼ同一形状の振動部分を実現しており、解析領域の大きさにほとんど影響されない結果が得られている。

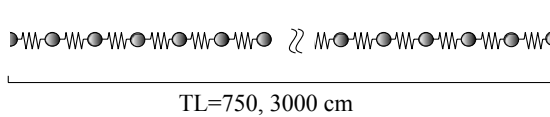


Fig.18 Large-scale model

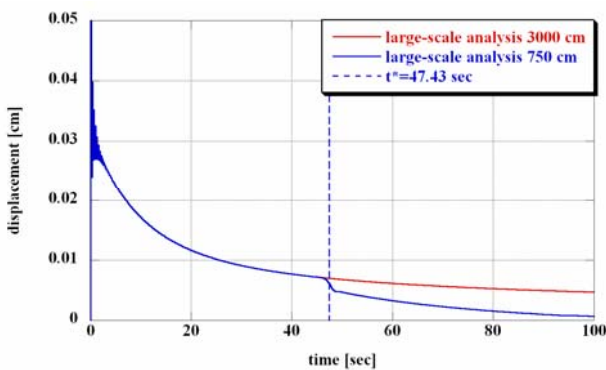


Fig.19 Comparison of Large-scale 750 and 3000cm model

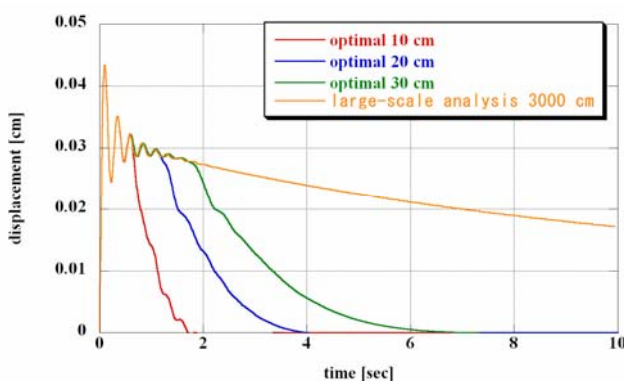


Fig.20 Comparison of optimal solutions and large-scale analysis

5. 結論・結果

無反射境界を実現するため、様々な評価関数による境界装置の最適化を試みた。その結果、周波数領

域での凹凸度評価関数と時間領域における振動エネルギー評価関数が有効であることを示した。中でも、解析時間の点からは振動エネルギー評価関数がより優れていると言える。

提案された境界装置は領域の大きさに依存しない振動成分を実現し、帰還時間以後のコーダ部は速やかな剛体変位の戻り過程を示しており、反射波は完全に抑制されていた。今後は 2 次元モデルへの応用を検討する必要がある。

参考文献

- [1] Sondipon Adhikari : Derivative of Eigensolutions of Nonviscously Damped Linear Systems, University of Cambridge, 2002 年
- [2] 吉田長行：無反射境界の制御，第 5 回構造物と地盤の動的相互作用シンポジウム，pp.121-124, 1998 年
- [3] 大久保信行：機械のモーダル・アナリシス，中央大学出版部，pp.7-28, 1982 年
- [4] 大崎順彦：建築振動理論，彰国社, 1996 年
- [5] 田治見宏：建築振動学，コロナ社, 1965 年
- [6] 日本建築学会：地盤振動-現象と理論-, 日本建築学会，pp.180-295, 2005 年
- [7] 日本建築学会：建築と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計，日本建築学会，pp.11-55, 2006 年
- [8] 日本建築学会：入門・建物と地盤との動的相互作用，日本建築学会，pp.1-111, 1996 年