

# コンデンサー中を流れる変位電流の可視化

星野 賢治 齋藤 兆古  
法政大学大学院工学研究科

電気回路を構成する主要な素子として電界エネルギーを蓄積するコンデンサーがある。コンデンサーは電気的な絶縁体である誘電体を介して電流が流れる素子であり、絶縁物中を電流が流れるため、コンデンサー中を流れる電流を変位電流と呼び、Maxwellが発見し、現代文明の一翼を担う無線通信技術の創始に繋がった。本論文では、このコンデンサー中を流れる電流を可視化し、誘電体の機能やコンデンサーの最適形状などに関して考察する。

## 1. 序論

近年のデジタル計算機の高性能化と小型化、ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし、いわゆる、デジタル計算機がパーソナルコンピュータ(Personal Computer,以下、PCと略記)と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった。このため、有限要素法や境界要素法で代表される電磁界の数値解析は、PCで実行可能な環境になり、この意味で、既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている。<sup>1,2)</sup>

有限要素法の特徴の一つとして、偏微分方程式で記述される物理現象に現れる未知関数を、折れ線や折面に代表される区分的多項式(piecewise polynomial)群で近似的に表そうとすることにある。この考えは、対象とする解析領域を、有限要素(finite element)と呼ばれる単純な形状の部分領域に分割することにより実現される。また、有限差分法のように直接偏微分方程式を近似するのではなく、関連する積分表示式、汎関数、を近似することが特徴となる。いずれにしても、最終的に得られる近似方程式は、有限差分法と同様に未知の格子点(有限要素法では節点と呼ぶ)の関数値に対する線形システム方程式となる。

有限要素法は土木工学や航空機の構造力学で誕生したと言われている。この分野においては、有限要素法の母体となるマトリックス法と呼ばれる手法がすでに存在していたが、有限要素法はマトリックス法の数学的一般化とも見なされる。

本論文では、電磁気学で遭遇する偏微分方程式を数値的に解く代表的な手法である有限要素法の中で最も初歩的な三角形一次要素を採用し、コンデンサー中を流れる変位電流可視化の第一段階を述べる。コンデンサーは電気的絶縁体である誘電体をサンドイッチ状に電極が挟む形状で構成される。電極の端部では電界分布は一様でなく、いわゆる端効果が存在する。このため、流れる変位電流は一様な密度で分布せず、結果として電極の有効断面積が減少する。本研究の究極の目的は、コンデンサー電極の形状を最適化し端効果を削減することでより小型大容量のコンデンサーを実現することである。

## 2. 有限要素法と等価回路

二次元有限要素法は任意形状の二次元問題対象領域を三角形などの任意の形状の平面要素を用いて離散化し、ポテンシャル分布を計算する方法である。

二次元空間を三角形の要素で領域を離散化した場合、一要素内のポテンシャル  $A$  は、一次関数  $A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$  によって近似され、領域内全ての要素を表す一次関数の連立によって全体の領域を表す関数を導く。その結果得られる連立方程式を解くことによって逐次直線近似ポテンシャル分布を得ることができる。

単純に問題対象領域を一次関数で表現しただけでは全領域のポテンシャルを連立するシステム方程式は得られない。このため、問題対象領域のエネルギーに対応する関数、すなわち、汎関数を考える。汎関数はエネルギーを表す関数であり、変分原理は、汎関数で表されるエネルギーの最小値を求める演算に採用される。すなわち、有限要素法は、任意の形状の領域を任意の形状を持つ要素によって離散化し、エネルギーを表す汎関数を変分原理に基づき、場のエネルギーが最小になるようなポテンシャルの分布を求めるエネルギー最小原理を利用した偏微分方程式の解法である。

電界系の汎関数は、 $\phi$  をスカラーポテンシャル、 $\epsilon$  を誘電率、さらに  $\rho$  を電荷密度として、式(1)で与えられる。

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int \{\epsilon(\nabla\phi)^2 - 2\phi\rho\} ds \quad (1)$$

式(1)の第一変分  $\delta F = 0$  を求める。第一変分は式(2)で定義される。

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\nabla\phi + \epsilon v) - F(\phi)}{\epsilon} \right\} \quad (2)$$

ここで  $v$  は任意の関数を示す。

よって、 $\delta F = 0$  は

$$\delta F = \int_S [\epsilon \nabla\phi \cdot \nabla v - v\rho = 0] \quad (3)$$

式(3)を変形するため、Greenの定理を用いる。Greenの定理とは面積分と線積分の関係、または、体積分と面積分

の関係を表す式で Gauss の法則に基づいている。

Green の定理の二次元形は

$$\int_S (v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v) ds = \int_C v \nabla \phi \cdot dl \quad (4)$$

式(4)により式(3)を変形すると

$$\begin{aligned} \delta F &= - \int_S v (\epsilon \nabla^2 \phi + \rho) ds + \int_C \epsilon v (\partial \phi / \partial n) \cdot dl \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)から式(6)の Poisson の方程式，および式(7)の対象境界条件 (Symmetrical Boundary condition)が得られる。

$$\lambda \nabla^2 \phi = -\sigma \quad (6)$$

$$\partial \phi / \partial n = 0 \quad (7)$$

Fig.1 に三角形一時要素の例を示す。Fig.1 から求まる補間関数を式(1)の汎関数に代入し変形すると式(8)が得られる。

ここで、 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  は要素間の角度を示し、 $\epsilon$ 、 $\Delta$ 、 $\sigma$  は誘電率、三角形の面積、電荷密度(Source density)をそれぞれ示す。

式(8)の汎関数に対する第一変分  $\delta F=0$  を計算し、システム方程式、式(9)を導く。

問題対象領域は三角形要素で細分化される。このため全体のエネルギーは複数個の要素がそれぞれ有するエネルギーの総和であり、要素間の接合は隣接する節点ポテンシャルが共通であること、および固定境界条件を導入することでなされる。

Fig.2 に示す三角形 1 次要素で、式(8)，(9)の節点間のパラメータ  $(\epsilon/2) \cot \alpha = (\epsilon/2)(OD/DC)$  を考える。二次元の偏微分方程式は無限に厚い 3 次元空間の単位厚さ部分で成り立つと仮定しているから、 $(\epsilon/2)(OD/DC)$  は単位厚さ当たり成り立つパラメータである。一般にコンデンサー C は誘電率  $\epsilon$  と電極面積  $1 \times OD$  に比例し、距離  $DC$  に反比例するから、明らかに  $(\epsilon/2) \cot \alpha$  は節点 B、C 間のコンデンサーとなる。

ある台形に関して三角形一次要素で離散化した場合、式(9)は Fig.3 に示す直並列に接続されたコンデンサーの等価回路を与える。Fig.3 で上端と底辺部は対象境界条件を仮定している。

以上のことから電界系の偏微分方程式は特に有限要素法の知識がなくても等価回路を描くことにより電気回路の知識で解くことが可能である。

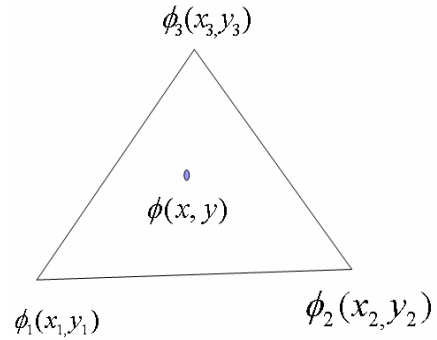


Fig.1 1st order triangular finite element.

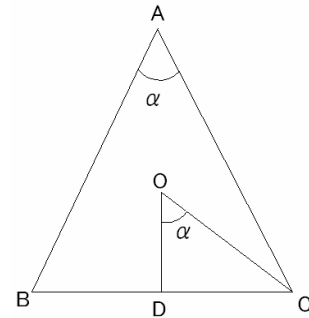


Fig.2 Relationship among the angles and lines.

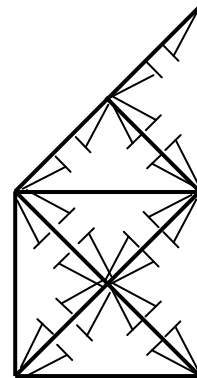


Fig.3 Example of 1st order FEM triangular elements discretization and its equivalent circuit.

$$F(\phi) = \frac{1}{2} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \frac{\epsilon}{2} \begin{bmatrix} \cot \phi_3 + \cot \phi_2 & -\cot \phi_3 & -\cot \phi_2 \\ -\cot \phi_3 & \cot \phi_3 + \cot \phi_1 & -\cot \phi_1 \\ -\cot \phi_2 & -\cot \phi_1 & \cot \phi_1 + \cot \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\epsilon}{4} \begin{bmatrix} \cot \phi_3 + \cot \phi_2 & -\cot \phi_3 & -\cot \phi_2 \\ -\cot \phi_3 & \cot \phi_3 + \cot \phi_1 & -\cot \phi_1 \\ -\cot \phi_2 & -\cot \phi_1 & \cot \phi_1 + \cot \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3. 例題

具体的な変位電流の可視化例として、Fig.4 に示す角型同軸ケーブルにおける外側と内側の導体間に流れる変位電流を可視化する。Fig.4 で、X 軸と K 軸に沿って式(6)の対称境界条件が成り立つから、解くべき領域は Fig.3 と同様な台形領域となる。Fig.3 の計算対象領域で三角形の分割個数は 24 個とする。変位電流密度  $J_D$  は式(9)によって導かれる。

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (9)$$

ここで D は等価回路のコンデンサーの電極を通過する電束密度を示す<sup>3,4)</sup>。

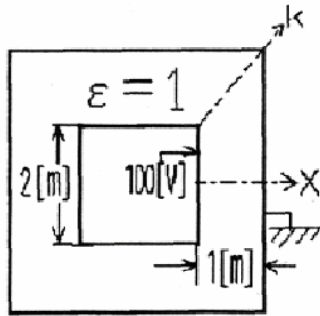
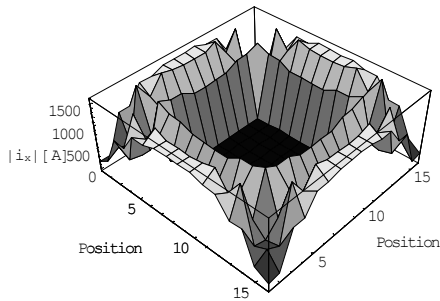
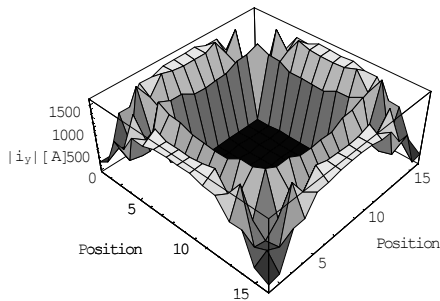


Fig.4 Demonstrative example of the displacement currents distributions.



(a) Magnitude of x components



(b) Magnitude of y components

Fig. 5 x- and y components of displacement currents.

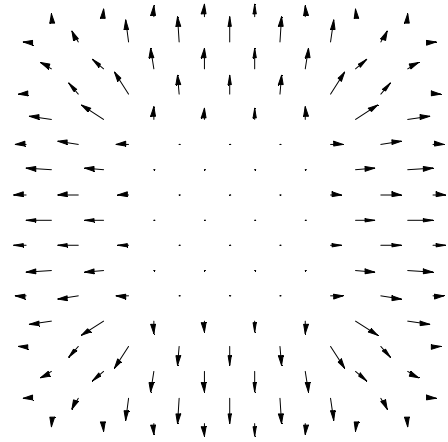


Fig.6 Visualization of the displacements vectors between the outer and inner conductors in a square co-axial cable.

Fig.5 は角型導体上に流れる変位電流の x 成分, y 成分それぞれを示す。Fig.6 は Fig.5 の離散化された三角形の各辺のコンデンサーに流れる変位電流を合成し, 三角形の外心で表現して得られる変位電流のベクトル分布の可視化例を示す。

Fig.6 から Fig.4 の角型導体を有限要素法によって離散化し等価的にキャパシタンスを設定すると, 角型導体の頂点に向かう変位電流が他の変位電流に比べ異なることがわかる。これは, 同軸四角形導体の頂点が不連続な変曲点であるため, 他の部分に比較して簡単な関数でポテンシャルが近似出来ないことを意味する。

本論文中的変位電流は有限要素法により離散化し三角形内で解が一次関数で表現できると仮定しポテンシャルを近似的に求めているため, 厳密な解ではない。すなわち, 三角形の各辺に等価的に存在するキャパシタンスに流れる電流も厳密な解ではなく, 近似解の電流であるため, 三角形内で合成し近似変位電流として表示している。

### 4. まとめ

本研究の究極の目的は, コンデンサー電極の形状を最適化し端効果を削減することにより小型大容量のコンデンサーを実現することである。

本論文では, その段階として, 有限要素法による電界系の等価回路表現と同軸角形導体間を流れる変位電流可視化した。その結果, 同軸ケーブルであるため変位電流は特殊な分布をしないと想定していたが, 角形であるため, 幾何学的に不連続な変曲点が存在し, 単純な変位電流分布とならないことが判明した。

### 参考文献

- [1] P.P Silvester and Ferrari, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press(1990).
- [2] 齋藤 兆古, 応用電磁気学入門, 法政大学大学院工学
- [3] 山田 直平, "電気学会大学講座 電気磁気学(第三改訂版)", オーム社, pp.348-352.
- [4] 後藤 憲一, 山崎 修一郎, "電磁気学演習", 共立出版, pp.299-301.

キーワード.

可視化、変位電流、誘電体

-----

Summary.

## **Visualization of Displacement Currents Flowing in the Capacitors**

Kenji Hoshino      Yoshifuru Saitou  
Graduate School of Engineering, Hosei University

One of the most important elements composing the electric circuits is the capacitors storing the electric energy in terms of electrical fields. Even though the capacitors are composed of the non-electrical conducting medium so called dielectric materials, the most distinguished electrical scientist Maxwell discovered that alternating current is possible to flow the capacitors. This leads to find the displacement current and to predict the electromagnetic wave propagation. As is well known, this electromagnetic wave makes it possible to commutate wireless electrical signal so that it may be regarded one of the major discoveries to construct the current modern high technology human world.

In this paper, we try to visualize the aspect of displacement current distribution between the two electrodes of capacitor in order to optimize the electrode shape of capacitors based on the first order finite elements along with the equivalent electrical circuits.

Keywords.

Visualization, Displacement current, Capacitor