

表皮効果削減のための高周波断面形状の最適化

黒田 洪平 齋藤 兆古
法政大学大学院工学研究科

電気電子機器に使用される全ての導体における高周波動作は表皮効果を喚起させてしまう。特に現代の高速なコンピュータ内部の高周波駆動するバスは熱損を引き起こす大きな表皮効果が生じる。

本論文では、我々は多様な断面形状を持つ導体高周波な電流を流した時の表皮効果の可視化を試みる。表皮効果の可視化により、電流分布が均一になるような最適な断面形状を持つ導体の探求を試みる。つまり銅損の可能な限り最小にする導体断面形状の最適化ということの意味する。

表皮効果などの電流分布の可視化することはヘルムホルツ方程式を解くことを本質としている。我々は等価回路を用いることにより変微分方程式を減らす準解析的手法を採用する。等価回路に流れる枝電流を求めることによって電流分布の可視化を行う。

1. はじめに

近年、ノートPCに代表される小型軽量電子機器の普及が目覚ましいものがある。電子機器は信号処理を行なう電子回路と電力を供給する電源部からなり、何れも小型・軽量のために高周波動作が採用されている。それ故、回路素子間を繋ぐワイヤーには必然的に表皮効果(skin effect)が喚起される。この結果として、電流の流れる導体の実効断面積が減少する。いわゆる交流抵抗が増加し、周波数の上昇と共に導体損失の増加が発熱問題を喚起する。また、磁気エネルギーを蓄積する磁気素子は高周波動作を前提とする傾向が強まり、集中定数的な回路定数とする考え方が困難になり、分布定数的な考え方をせざるを得ない。このため、高周波動作を前提とする磁気素子は、媒質や幾何学的形状で決定されるインダクタンスや抵抗を一定値とみなせず、周波数の関数として変化するパラメータとして考えざるを得ない。この意味で、電気・電子機器解析技術者が最終的に必要とする結果は装置や素子のモデリングや離散化法技術などに習熟しなければ期待できる結果が得られない。これは、小型軽量化された電子機器中の微細化されたワイヤー断面の電流分布を解析するまでの道程は未だ遠いといえる。しかし、現実問題として導線に高周波電流を通電する場合、必然的に表皮効果が伴い導線の有効断面積が減少し、結果として発熱や電源効率の低下に繋がっている可能性は否定できない。

本稿は、このような現状に鑑み、高周波電流を通電する導体断面の表皮効果を可視化し、高周波の電流が可能な限り均一に導体断面に分布する最適な導体断面形状を求める研究の第1段階である。

表皮効果はヘルムホルツ型偏微分方程式の解として求めるため何らかの方法でヘルムホルツ型偏微分方程式を解く必要がある。本稿では、解析者が偏微分方程式を意識しなくても表皮効果が可視化可能な準解析的離散化法を解析法として採用する^{1,2)}。

準解析的手法とは、如何なる複雑な形状の導体も微小丸形導体に分割可能と仮定する。そして、微小丸形へ古典的解析法であるノイマンの公式を用いてインダクタンスなどを計算し、最終的には電気回路へ偏微分方程式を変換して解析する手法である。

表皮効果は、導体中に電流が流れることに起因する磁界から生ずる逆起電力の不均一分布に拠る結果である。本論文では、表皮効果を喚起する原因に着目した結果、磁界分布の均一化は逆起電力の均一化を意味し、結果として表皮

効果が削減されると仮定する。本論文では、この仮定に基づいて高周波用導体断面形状の最適化を試みた一例を報告する。

2. 基礎理論

2.1 準解析的電磁界解析法

ここでは、本論文で採用する準解析的電磁界解析法の原理を説明する。

2.1.1 モデリング

任意形状導体の具体例として Fig.1(a)に示す直角二等辺三角形の断面形状を有する導体を考える。この導体をすべて同じサイズの微小丸形導体(円柱状)の集合に置き換える。モデリングは、最初に導体の断面積対長さの比が無視できない場合、すなわち、微小丸形導体そのものの表皮効果が無視できない場合、導体断面をより微小な円形断面の集合へ置き換える。Fig.1(a)の場合、Fig.1(b)のようなモデルで微小導体そのものの表皮効果が無視できると仮定する。ここで、全微小丸形導体の体積の和は供試導体の全体積と等しいとする。これは、丸形導体の分割個数を無限大にした場合、供試導体を再現可能とする条件である。

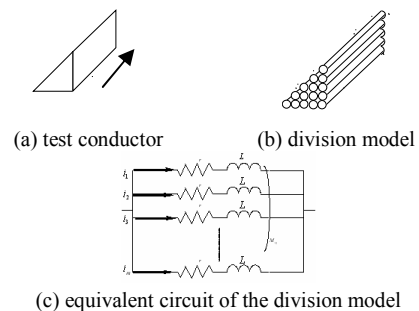


Fig.1 Modeling of a test conductor

個々の微小丸形導体の内部抵抗や自己インダクタンスはそれぞれ解析的に計算でき、式(1a)、(1b)でそれぞれ与えられる。さらに、分割された導体間の相互インダクタンスは式(1c)で与えられる。したがって、Fig.1(b)の個々の導体を内部抵抗と自己インダクタンス、および通電方向を勘案すれば、Fig.1(b)のモデルから Fig.1(c)に示す等価回路が得られる。

$$r = \sigma \frac{l}{S} \quad (1a)$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\log \left(\frac{2l}{r'} \right) - 1 \right) \quad (1b)$$

$$M_{ij} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\log \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d_{ij}}{l} \right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right) \quad (1c)$$

2.1.2 システム方程式

Fig.1(c)の等価回路から正弦波定常状態のインピーダンス行列 \mathbf{Z} は以下のようにあらわされる。

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} r_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & \cdot & \cdot & j\omega M_{1m} \\ j\omega M_{21} & r_2 + j\omega L_2 & \cdot & \cdot & j\omega M_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ j\omega M_{m1} & j\omega M_{m2} & \cdot & \cdot & r_m + j\omega L_m \end{bmatrix} \quad (2a)$$

また、入力電圧ベクトルと出力電流ベクトルをそれぞれ、 \mathbf{V}, \mathbf{I} とすれば、次のシステム方程式を得ることができる。

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

よって、求める電流分布ベクトル \mathbf{I} は次式で与えられる。

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V} \quad (2b)$$

ここで、供試導体の両端の電圧を v とし、断面の分割個数を m とすれば、入力電圧ベクトルと出力電流ベクトルはそれぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{V} = [v \quad v \quad \cdot \quad \cdot \quad v]^T \quad (2c)$$

$$\mathbf{I} = [i_1 \quad i_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad i_m]^T \quad (2d)$$

ここで、 i_n ($n=1,2,\dots,m$) は Fig.1(c)の等価回路中の電流である。また、電流 j が直線状の導体を通っている時の周辺磁界 H は、 c を磁界 H の経路、 dl を c の微小線分として

$$\int_c \mathbf{H} dl = j \quad (2e)$$

で与えられる。

特に、磁界 H の経路を導体の外側で導体の中心から r の円周とすれば、式(2e)から円周方向磁界の大きさは、

$$H = \frac{j}{2\pi r} \quad (2f)$$

で与えられる。

よって、 i 番目の丸型微小導体に鎖交する磁界 H_i は、

$$H_i = \sum_{n=1}^m \frac{I_n}{2\pi r_n}, \quad n \neq i \quad (2g)$$

ここで、 I_n, r_n は、それぞれ n 番目の微小導体に流れる電流と i 番目と n 番目の微小導体間の距離を示す。³⁾

2.2 例題

2.1 節で述べた方法を Fig.1(a)に示す供試導体に適用した結果に関して述べる。

供試導体の材質は銅であり、その抵抗率は $1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$ である。また、大きさは底辺の長さを $0.5[\text{cm}]$ とし、長さ $30[\text{cm}]$

とする。Figs.2,3 は、それぞれ印加電圧の周波数を(a)50[Hz]、(b)1[kHz]、(c)1[MHz]とした場合の定常状態電流分布と磁界の強さ分布である。尚、この例では丸型微小導体の数、すなわち、供試導体の分割個数 m は 1275、印加電圧の実効値は $1[\text{mV}]$ である。

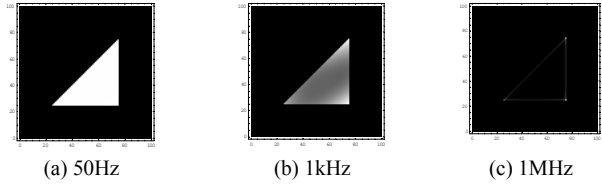


Fig.2 Current distributions.
White: High, Dark: Low

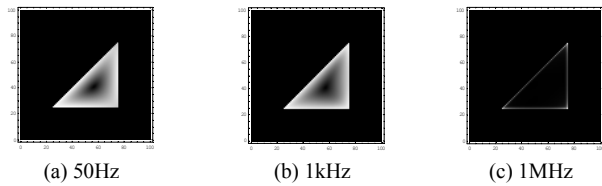


Fig.3 Magnetic field intensity distributions.
White: High, Dark: Low

Figs.2,3 で、白色部が電流と磁界の振幅が大きく、黒色に近いほど電流と磁界の振幅が小さいことを示す。したがって、Figs.2,3 は、低周波では電流が均一に分布し、周波数が増加するほど導体表面部分へ電流が集中し、いわゆる表皮効果を可視化している。特に、三角形の各頂点に電流が集まるのが興味深い。これは三角形の頂点を取り囲む磁界が最も少なく、その結果、磁界による逆起電力が小さいためである。

3. 電流分布と磁界分布の関係

2 章で扱った供試導体とそれに対称な導体を用いて、Fig.4 の様に並べた場合の電流分布と磁界分布をそれぞれ Figs.5,6 に示す。Fig.5 では印加電圧の周波数をそれぞれ (a)50[Hz]、(b)1[kHz]、(c)1[MHz]とした。

Fig.6(a),(b),(c)は Fig.5 に示す電流分布に伴う磁界分布である。また、分割個数 m は 1260、印加電圧は $1[\text{mV}]$ とした。

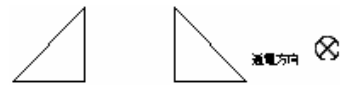


Fig.4 Two tested conductors.

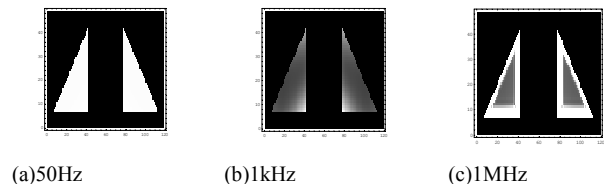


Fig.5 Current distributions.
White: High, Dark: Low

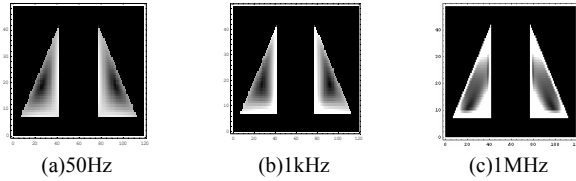


Fig.6 Magnetic field intensity distributions

White: High, Dark: Low.

Fig.3 と Fig.5 を比較すれば、明らかに 1 個の導体よりも 2 個の導体の並列とすれば、電流分布は均一となることが判る。磁界と電流の関係はアンペアの法則式(2e)で与えられるから、Figs3,6 で、電流を中心として右ねじ方向へ磁界が取り囲んでいる。導体を 2 個へ分離することで電流を取り囲む磁界が互いに中心部で打ち消すため、結果として電流も磁界も均一に分布する傾向を取る。個々の導体としては、電流分布は表皮効果が低減され、電流が均一に分布する。しかし、導体が分布する空間の広がり増加する。

Fig.3 の結果をふまえ、完全に導体が分離しない形で電流分布を均一化する。Fig.7 に示す導体断面形状を考える。Fig.7 の導体で、横幅を 2[cm]、高さ 0.5[cm]、長さ 30[cm]とする。

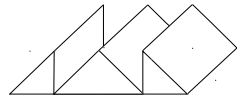


Fig.7 Deformed trial conductor.

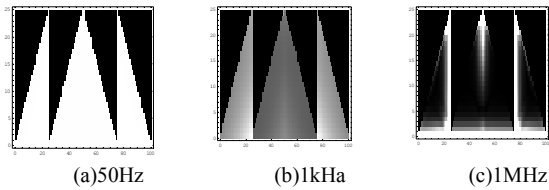


Fig.8 Current distributions

White: High, Dark: Low.

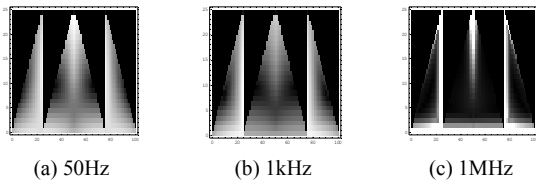


Fig9 Magnetic field intensity distributions.

White: High, Dark: Low

Figs.8,9 は Fig.7 の導体を分割個数 m は 1300, 印加電圧は 1[mV]とし、それぞれ電流と磁界分布を示す。

Fig.8 の結果は、類似した形状に変形した導体断面でも通常の導体と同様に中心部で最も表皮効果が大きく、電流密度が低下することが判る。これは、導体が分離していないため導体全体を取りか囲む磁界が存在し、この磁界の逆起電力が中心部で最も大きいためである。

比較のため、Fig.10 に示すように Fig.9 と同一断体積の正方形断面を持つ導体について電流分布と磁界分布を計算した。

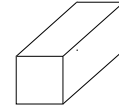


Fig.10 Square conductor.

この導体を分割個数 $m=1225$, 印加電圧 1[mV]とし、電流分布と磁界分布を以下の Figs.11, 12 に示す。

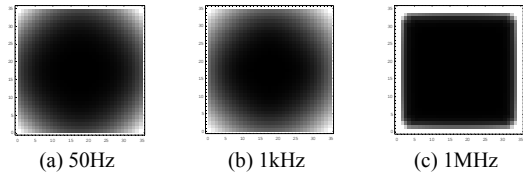


Fig.11 Current distributions.

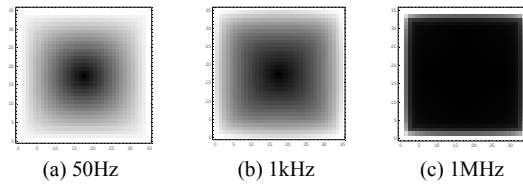


Fig.12 Magnetic field distributions

Figs.11,12 の結果は、明らかに単純な角形導体では表皮効果が分散されない、このため全体としての表皮効果が顕著となり、結果として導体の有効断面積が減少する。他方、導体断面を可能な限り導体全体を取り囲む磁界を削減する導体断面形状は表皮効果を削減し、導体の有効断面積を増加する。

4. まとめ

本論文では、まず簡単な形状を持つ任意の導体を例として取り上げ、準解析的電磁界解析法による導体断面上の電流分布と磁界分布についての基礎理論について述べた。その結果、準解析的法による等価回路化法はヘルムホルツ型偏微分方程式を意識することなく表皮効果の可視化を可能とすることを述べた。

以上の原理検証結果をふまえ、単純な断面形状の導体と導体断面全体を取り囲む磁界を削減する形状の導体の表皮効果を比較し、単純な角形導体では表皮効果が分散されないため全体としての表皮効果は顕著となり、結果として導体の有効断面積が減少した。他方、導体断面を可能な限り導体全体を取り囲む磁界を削減する導体断面形状は表皮効果を削減し、導体の有効断面積を増加する可能性を明らかにした。

参考文献

- [1] T.Takano, S.Hayano, and Y.Saito: Coil impedance computation having arbitrary geometrical shape, IEEE PESC'98, Vol.2, (May.1998), pp. 1991-1996
- [2] Yasuyuki Watazawa, Seiji Hayano and Yoshifuru Saito : Semi-analytical electromagnetic field Computation, Int. J. Appl. Electromagn. Mater. Vol.15, Nos.1-4, pp. 353-357, IOS Press (April.2002)
- [3] 齋藤兆古、早野誠治: 応用電磁工学入門, 産図テキスト, 2000年, pp28-33

キーワード.

準解析的手法、表皮効果、最適形状化

Summary.

Shape Optimization of High Frequency Current Carrying Conductor by Skin Effect Visualization

Kohei Kuroda Yoshifuru Saito
Graduate School of Engineering, Hosei University

High frequency operation of all conductors used in electrical/electronic devices causes the skin effect in the current carrying conductors. In particular, employing high frequency system bus in modern high speed computer leads to the serious skin effect, which is one of the causes of thermal loss.

In the present paper, we try to visualize the skin effect in various frequencies when flowing high frequency current in the conductors with various cross sectional shapes. Referring to the visualization of skin effect, we try to searching for the optimal cross sectional shape of conductor distributing the currents uniformly. This means that the conductor having optimal cross section is capable of flowing high current without high thermal copper loss. To visualize the current distribution, i.e., skin effect, it is essential to solve one kind of Helmholtz equations. We employ a semi-analytical method which reduces the partial differential equation into a set of equivalent electric circuits. Evaluation of each of the branch currents of the equivalent electric circuits visualizes the current distribution reflecting the skin effect.

Keywords.

Shape optimization, Skin effect, Semi-analytical approach