

# HPMによるひずみエネルギーを指標とした要素細分割法の提案

見原 理一

法政大学大学院システムデザイン研究科

竹内 則雄

法政大学工学部システムデザイン学科

著者らは、ハイブリッド型の仮想仕事の原理[1]を基礎にペナルティ法を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)と称する新しい離散化手法を提案した[2]。HPMでは、全体領域を部分領域に分割し、それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される。このとき、領域の節点は領域形状を認識するためだけに用いられ、FEMのように自由度は持たない。したがって、局所的に強い強非線形性が現れるような問題の場合、要素の部分的な細分化を行うことでより精度の向上を図ることが可能である。本研究ではひずみエネルギーを指標とした要素細分割法を紹介する。

## 1. はじめに

川井[3]によって提案された剛体ばねモデル(RBSM: Rigid Bodies-Spring Model)は、要素を剛体と仮定し、要素境界辺上に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを基に剛性行列を誘導し、そのばねの表面力を扱う。このため、構造物や地盤などの進行型破壊解析を容易に行うことができ、離散化極限解析を効率的に行えるという利点を有している[4]。また、剛体変位場を用いているため、要素形状は任意であり、例えば、乱数を母点とするVoronoi多角形を要素に用いれば、人為性を排除したクラックの進展解析が行える[5]。しかし、一方で、剛体要素の仮定のため、弾性解の精度は有限要素法(FEM: Finite Element Method)と比較して劣る。

著者らは、離散化極限解析を効率よく行えるというRBSMの利点を引き継ぎ、かつ、欠点である弾性解の精度の向上を目指して、ハイブリッド型の仮想仕事の原理[1]を基礎にペナルティ法を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM: Hybrid-type Penalty Method)と称する新しい離散化手法を提案した[2]。ハイブリッド型変位モデルでは、変位の連続性を若干緩め、付帯条件としてLagrangeの未定乗数を用いて変分表示を導入しているが[6]、HPMでは、Lagrangeの未定乗数にばねの考え方を導入し、ばね定数としてペナルティ関数を用いて付帯条件を満足させている。このため、HPMでは部分領域毎に独立な変位場を仮定することができる。したがって、HPMではFEMのように節点において自由度を共有することはなく、節点は部分領域の形状を認識するためにだけ用いられるという特徴を有している。

著者らは、部分領域内の任意点における剛体変位（並行変位と剛体回転）とひずみを用いた線形の変位場により離散化極限解析を行い、弾性変位についてはFEMの定ひずみ要素、崩壊荷重についてはRBSMによる極限荷重と同程度の精度を有することを示した[7]。

HPMは部分領域毎に独立な変位場をペナルティ関数を用いて領域境界の適合条件を確保しているため、基本的には部分領域の形状に関係なく変位場を仮定することが可能である。しかし、実際には、線形変位場の場合、三角形以外の部分領域の形状を適用すると良い精度の解が得られず、RBSMの利点であるVoronoi多角形などの任意形状の分割が実質的には行えなかった。

そこで、領域分割に制約があるというこのような問題を解決するため、剛体変位とひずみに加え、ひずみの勾配を考慮した2次の変位場をHPMに適用する方法を提案した[8]。

本論文では、2次の変位場を仮定したHPMを用いてひずみエネルギーを指標とした要素細分割法を提案する。

## 2. 支配方程式とハイブリッド型仮想仕事式

### 2-1. 支配方程式

いま、図1に示すように、 $\Omega$ を $\text{ndim}$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{\text{ndim}}$ の有界領域とし、 $\Gamma$ を $\Omega$ のなめらかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする。また、 $\Omega$ に境界を加えてできる閉包を $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ とする。このとき、 $\Omega$ 内における平衡方程式は次のように与えられる。

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

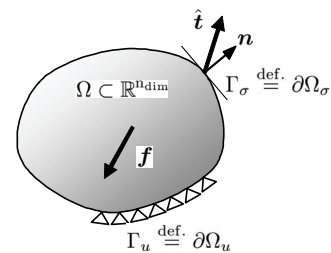


図1 有界領域 $\Omega$ と境界 $\partial\Omega$

ここで、 $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}}$ は物体力、 $\boldsymbol{\sigma}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}$ はCauchy応力である。ただし、 $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{(\text{ndim}+1) \cdot \text{ndim}/2}$ であり、 $\text{ndim}$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{\text{ndim}}$ の基底ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とするとき、 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ である。 $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}}$ は、 $\mathbf{x} \in \Omega$ における変位場で、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を簡単に $u$ とする。このとき、微小ひずみは次のように定義される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (3)$$

ここで、 $\nabla := (\partial/\partial x_i)\mathbf{e}_i$ は微分作用素であり、 $\nabla^s$ は $\nabla$ の対称部分を表している。

一方、境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ は以下の関係にある。

$$\bar{\Gamma} = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma}, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \quad (4)$$

ここで、 $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial \Omega$ は変位が与えられる境界であり、

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{given}) \quad (5)$$

を満たしている。また、 $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma \Omega \subset \partial \Omega$ は表面力が与えられる境界であり、外向き法線ベクトルが $\mathbf{n}$ で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} := \sigma \mathbf{n}$ と定義するとき

$$\sigma|_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{given}) \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{n}}$ は境界 $\Gamma_\sigma$ に対する法線ベクトルである。

弾性体に対する構成方程式は弾性テンソル $\mathbf{C}$ を用いて次のように表される。

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad (7)$$

## 2-2. 仮想仕事式 (弱形式)

変位 $\mathbf{u}$ と仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ に果たせられる許容関数空間を

$$\mathbb{U} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \} \quad (8)$$

$$\mathbb{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \delta \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \delta \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \} \quad (9)$$

とする。このとき、仮想仕事の原理では、式(1)に関する全領域に対する積分

$$\delta W = \int_{\Omega} (\text{div } \sigma + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (10)$$

より、

$$\text{div}(\sigma \delta \mathbf{u}) = (\text{div } \sigma) \cdot \delta \mathbf{u} + \sigma : \text{grad } \delta \mathbf{u} \quad (11)$$

なる関係と Gauss の発散定理を用いると、変位 $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ に関する仮想仕事式が以下のように得られる。

$$\int_{\Omega} \sigma : \text{grad } \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (12)$$

これは、 $\mathbf{u}$ を重み関数とすれば、一般的な弱形式である。このとき、 $\mathbb{H}^1(\Omega)$ を Sobolev 空間として、 $\mathbb{U} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ 、 $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ である。

## 2-3. ハイブリッド型仮想仕事式

いま、図2に示すように領域 $\Omega$ が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial \Omega^{(e)}$ で囲まれた $M$ 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする。

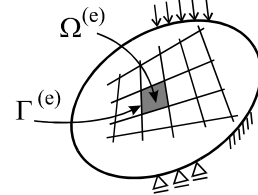


図2 部分領域 $\Omega^{(e)}$

すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \text{ ただし } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (13)$$

また、 $\bar{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial \Omega^{(e)}$ を $\Omega^{(e)}$ に境界を加えてできる閉包とする。

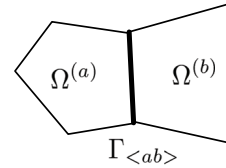


図3 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図3に示すように、隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{\langle ab \rangle} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (14)$$

において、付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (15)$$

を Lagrange の未定乗数 $\lambda$ を用いて、

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \quad (16)$$

と表し、仮想仕事式に導入する[6]。ただし、 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表している。また、 $\delta(\bullet)$ は $(\bullet)$ の変分量を表している。

いま、隣接する2つの部分領域境界辺の数を $N$ とすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) - \sum_{s=1}^N \left( \delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (17)$$

なお、Lagrange の未定乗数 $\lambda$ は、次式のように、 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を意味している[2]。

$$\lambda = \mathbf{t}^{(a)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}) = -\mathbf{t}^{(b)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{t}^{(a)}$ と $\mathbf{t}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力である。

## 2-4. 部分領域ごとに独立な2次の変位場

簡単のため、 $\text{ndim}=2$ とする2次元の変位場 $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ について考えてみる。いま、ある領域 $\Omega^{(e)}$ に着目し、変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を点 $\mathbf{x}_P = (x_P, y_P) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{u}^P + (x - x_P)\mathbf{u}_x^P + (y - y_P)\mathbf{u}_y^P \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_P)^2\mathbf{u}_{xx}^P + \frac{1}{2}(y - y_P)^2\mathbf{u}_{yy}^P \\ &\quad + (x - x_P)(y - y_P)\mathbf{u}_{xy}^P + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (\bullet)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\bullet) & (\bullet)_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\bullet) & (\bullet)_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet) \\ (\bullet)_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bullet) & (\bullet)_{yy} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bullet) \end{aligned}$$

なる関係があり、 $(\bullet)^P$ は点 $x_P$ における物理量 $(\bullet)$ の値を示している。テーラー展開の2次の項までをとり、変位の1階から2階微分を自由度に設定しても2次の変位場を設定することができるが、応力解析の場合は、最終的にひずみや応力のチェックが必要となることが多く、これを修正して、点 $x_P$ における剛体変位、ひずみとひずみの勾配によって表すと便利である。

いま、 $x$ 方向変位を $u$ 、 $y$ 方向変位を $v$ とするとき

$$u_x = \varepsilon_x, \quad u_{xx} = (\varepsilon_x)_x, \quad u_{xy} = (\varepsilon_x)_y$$

$$v_y = \varepsilon_y, \quad v_{yy} = (\varepsilon_y)_y, \quad v_{yx} = (\varepsilon_y)_x$$

$$\frac{1}{2}(v_x + u_y) = \gamma_{xy}, \quad \frac{1}{2}(v_x - u_y) = \theta$$

$$\frac{1}{2}(v_x + u_y)_x = (\gamma_{xy})_x, \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y)_y = (\gamma_{xy})_y$$

なる関係がある。これを用いて式(19)で示されるある領域 $\Omega^{(e)}$ 内における2次の変位場を表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} u^{(e)} &= u^P - Y^{(e)}\theta^P + X^{(e)}\varepsilon_x^P + \frac{1}{2}Y^{(e)}\gamma_{xy}^P \\ &\quad + \frac{1}{2}(X^{(e)})^2(\varepsilon_x^P)_x + \frac{1}{2}(Y^{(e)})^2(\gamma_{xy}^P)_y \\ &\quad - \frac{1}{2}(Y^{(e)})^2(\varepsilon_y^P)_x + X^{(e)}Y^{(e)}(\varepsilon_x^P)_y \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v^{(e)} &= v^P + X^{(e)}\theta^P + Y^{(e)}\varepsilon_y^P + \frac{1}{2}X^{(e)}\gamma_{xy}^P \\ &\quad + \frac{1}{2}(Y^{(e)})^2(\varepsilon_y^P)_y + \frac{1}{2}(X^{(e)})^2(\gamma_{xy}^P)_x \\ &\quad - \frac{1}{2}(X^{(e)})^2(\varepsilon_x^P)_y + X^{(e)}Y^{(e)}(\varepsilon_y^P)_x \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X^{(e)} &= x - x_P \\ Y^{(e)} &= y - y_P \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

また、 $u^P, v^P, \theta^P$ は点 $x_P$ における $x$ および $y$ 方向変位ならびに、剛体回転を表している。式(20)(21)をマトリックス形式で簡単に次のように書く。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)}\mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_g^{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} \quad (23)$$

ここで、それぞれの係数は以下のとおりである。

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u^P, v^P, \theta^P]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x^P, \varepsilon_y^P, \gamma_{xy}^P]^t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} = [(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_y, (\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_y]^t$$

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y^{(e)} \\ 0 & 1 & X^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X^{(e)} & 0 & Y^{(e)}/2 \\ 0 & Y^{(e)} & X^{(e)}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_g^{(e)} = \begin{bmatrix} (X^{(e)})^2/2 & 0 & & & & \\ 0 & (Y^{(e)})^2/2 & & & & \\ X^{(e)}Y^{(e)} & -(Y^{(e)})^2/2 & 0 & (Y^{(e)})^2/2 & & \\ -(X^{(e)})^2/2 & X^{(e)}Y^{(e)} & (X^{(e)})^2/2 & 0 & & \end{bmatrix}$$

このように、本論文で用いる変位場は、領域内における任意点の変位に加え、直接、ひずみとその勾配を自由度として扱う。また、各領域内の任意点におけるパラメータを用いて変位場を表しているため、自由度を要素頂点にも設定するような従来の変位型FEMの要素とは異なり、頂点において変位を共有しない。すなわち、本モデルにおける頂点は領域形状を認識するために用いるのであって、従来の変位型FEMのように頂点は形状関数に支配されない。したがって、要素形状は、特に限定されず、任意の多角形、多面体、曲面体を部分領域として用いることができる。

## 3. 離散化方程式の誘導

### 3-1. Lagrangeの未定常数とペナルティ

2章の終わりで述べたように、Lagrangeの未定乗数は、物理的には表面力を意味している。ハイブリッド型変分原理を用いる手法では、この未定乗数も未知数として取り扱う方法が一般的である[6][9]。

一方、著者らが提案したハイブリッド型ペナルティ法では、Lagrangeの未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ が表面力に対応するという物理的意味を考慮して、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の表面力を式(20)のように表す[2]。

$$\boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} \quad (24)$$

ここで、 $\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}$ は領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の相対変位を表しており、2次元問題の場合、以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{n\langle ab \rangle} \\ \lambda_{t\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{n\langle ab \rangle} \\ \delta_{t\langle ab \rangle} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで、 $\delta_{n\langle ab \rangle}$ 、 $\delta_{t\langle ab \rangle}$ は領域境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対する法線および接線方向の相対変位で、同様に、 $\lambda_{n\langle ab \rangle}$ 、 $\lambda_{t\langle ab \rangle}$ は、法線および接線方向に対する Lagrange の未定乗数、すなわち表面力である。ハイブリッド型ペナルティ法では、この係数 $k$ としてペナルティ関数 $p$ を用い、以下のように表す[2]

$$k_n = k_t = p \quad (26)$$

### 3-2. 相対変位と付帯条件

式(16)で示した付帯条件は領域境界面に沿った局所座標系の成分によって次のように表すこともできる。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (27)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列で、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ を部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの領域から見た座標変換行列とすれば

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} = -\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (28)$$

なる関係にある。したがって、相対変位は、

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \tilde{\mathbf{u}}^{(l)} \quad (29)$$

と表される。これらの関係と式(24)の関係を用いれば、式(16)は次のように書くことができる。

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \delta_{\langle ab \rangle}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} dS \quad (30)$$

### 3-3. マトリックス表示による離散化方程式

離散化方程式の誘導にあたり、式(17)をマトリックス表示で書き直すと以下ようになる。

$$\sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta\mathbf{u}]^t \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} dV - \int_{\Omega^{(e)}} \delta\mathbf{u}^t \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \delta\mathbf{u}^t \hat{\mathbf{T}} dS \right) + \sum_{s=1}^N \left( \delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \delta_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k} \delta dS \right) = 0 \quad (31)$$

2次元平面応力状態の場合、それぞれの係数は次のとおりである。

$$\mathbf{L}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \delta\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \hat{t}_n \\ \hat{t}_t \end{Bmatrix}$$

ここで、 $E$ は弾性係数、 $\nu$ はポアソン比であり、 $f_x$ 、 $f_y$ は、それぞれ $x$ および $y$ 軸方向の物体力を表している。また、 $u$ 、 $v$ および、 $\delta u$ 、 $\delta v$ は、それぞれ $x$ および $y$ 軸方向の変位ならびに仮想変位、 $\hat{t}_n$ 、 $\hat{t}_t$ は境界における既知の法線および接線方向の表面力である。

式(31)に式(23)で仮定した2次関数で表される変位を代入する。ただし、仮想の変位についても同様に、下記の2次関数を仮定する。

$$\delta\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \delta\mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_g^{(e)} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} \quad (32)$$

離散化方程式の誘導に先立ち、式(23)(32)を次のように整理する。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad \delta\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta\mathbf{U}^{(e)} \quad (33)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(e)} &= [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}]^t \\ \delta\mathbf{U}^{(e)} &= [\delta\mathbf{d}^{(e)}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}]^t \\ \mathbf{N}^{(e)} &= [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}, \mathbf{N}_g^{(e)}] \end{aligned}$$

これより、以下の関係が得られる。

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{N}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\mathbf{U}^{(e)} \quad (34)$$

ただし、 $\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{N}^{(e)}$

さらに、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を $\mathbf{U}$ とすると、各部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{U}^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)}\mathbf{U} \quad (35)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である。同様にして、仮想変位についても以下のように表す。

$$\delta\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)}\delta\mathbf{U} \quad (36)$$

一方、相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ についても次のように表す。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (37)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}$ 、 $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} &= [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}] \\ \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} &= [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t \end{aligned}$$

いま、式(35)と同様に、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を $\mathbf{U}$ とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U} \quad (38)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関する自由度を関係付ける行列である。同様に、仮想変位についても、

$$\delta U_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \delta U \quad (39)$$

とする。

以上の関係を式(31)に代入すると次式が得られる。

$$\delta U^t \left( \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) \mathbf{U} - \delta U^t \left( \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (40)$$

ここで、

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV \mathcal{A}^{(e)} \quad (41)$$

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} dS \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \quad (42)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left( \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma_e} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} dS \right) \quad (43)$$

式(40)において、仮想変位 $\delta U$ は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (44)$$

ただし、 $\mathbf{K}$ および $\mathbf{P}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \quad (45)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \quad (46)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(44)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 $\mathbf{K}$ は、各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

また、式(42)に含まれる $\mathbf{k}$ の値、すなわち、式(24)に示すペナルティ関数の値を0にすることで、自由度を変更することなくオープニングなどの不連続な現象を容易に表現できるモデルとなっている[7]。

#### 4. 数値積分

式(41)の係数行列を求めるためには、2次元の場合、面積積分が必要となる。三角形や四角形の場合には一般的な数値積分の公式が適用できる。しかし、Voronoi多角形など、五角形以上の複雑な形状の場合には数値積分の適用が難しくなる。このような場合、多角形を三角形の集まりに分割し、それぞれの三角形に対して数値積分を適用するという方法が提案されており、この方法を用いても精度に与える影響は少ないとされている[10]。

しかし、2次元の場合には、具体的に係数行列を展開し

て解析的に積分を実施することも可能である。本論文では、三角形と四角形に関してはガウスの公式による数値積分を用いた。

また、式(42)の係数行列も2次元問題の場合、線積分が生ずる。これについても具体的に係数行列を展開し、解析的に積分を行うことが可能であるが、すべりなどの非線形挙動の解析の際には、数値積分の方が取り扱いが容易である。本論文ではガウスの3点積分を用いた。

#### 5. ひずみエネルギーの算出

せん断ひずみエネルギーは、部分領域のせん断ひずみ $\gamma_{xy}$ を用いて算出する。

$$\text{ShearStrainEnergy} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \gamma_{xy}^2 dV \quad (47)$$

全ひずみエネルギーは、部分領域の各応力値・ひずみ値を用いて算出する。

$$\text{TotalStrainEnergy} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} [\boldsymbol{\sigma}]^T [\boldsymbol{\varepsilon}] dV \quad (48)$$

それぞれのひずみエネルギーを用いて全部分領域内で最もエネルギーが大きくなる部分領域を細分割する。

#### 6. 数値解析例

##### 6-1. 単純せん断実験

純せん断が作用する問題として、図4に示すような実験装置を用いた実験を行なった。本実験は、側面に強制変位量を作用させており、解析においても同様の境界条件を設定している。また、初期の要素分割数は、図5に示すように $8 \times 8$ 分割とした。

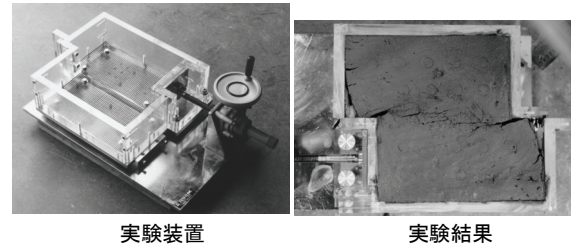


図4 単純せん断実験

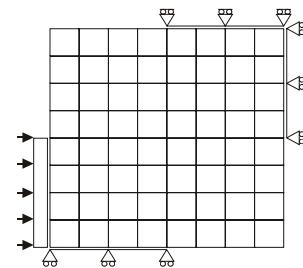


図5 解析モデル

前述したようにせん断ひずみエネルギーを指標とした要素の細分割を繰り返すことで、図 6 に示すように対称性を保ちつつ、要素の細分割が行なわれていることが分かる。また、図 7 に示すように、要素の細分割を行なうことで、せん断ひずみの局所化が進行していることも確認できる。

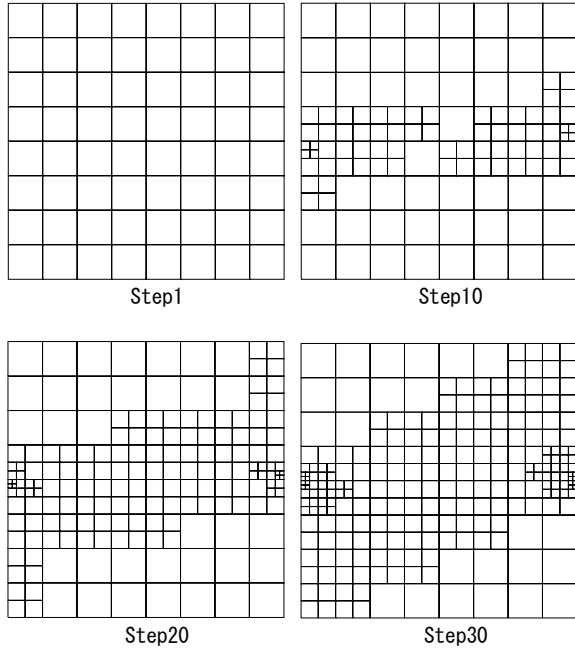


図 6 要素細分割の経過

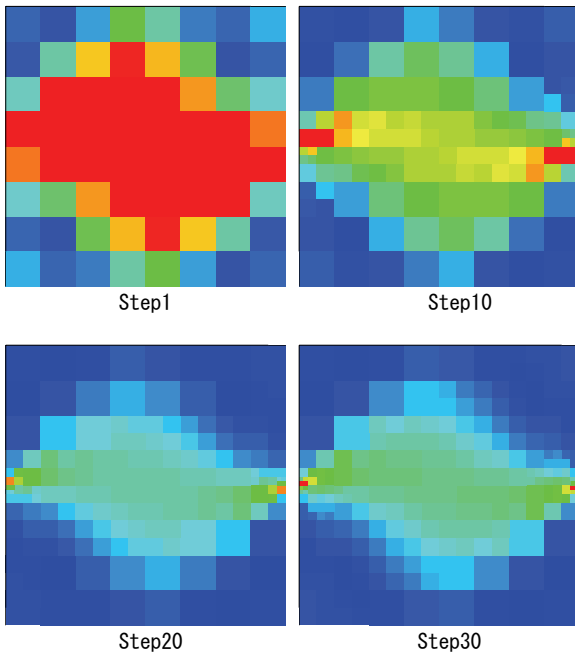


図 7 最大せん断ひずみ

図 8 に示すように実験においてひび割れが多く発生した範囲で要素の細分割が行なわれており、最大せん断ひ

ずみが高くなる分布領域の形状についても実験結果に近い傾向になっていることを確認することができる。

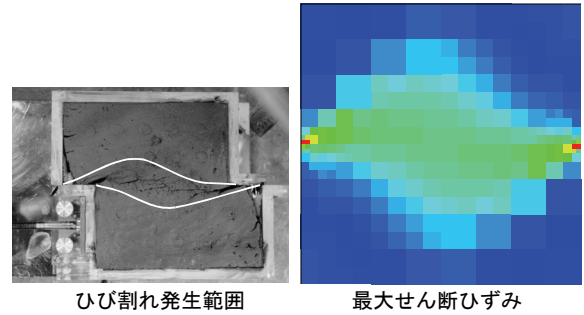
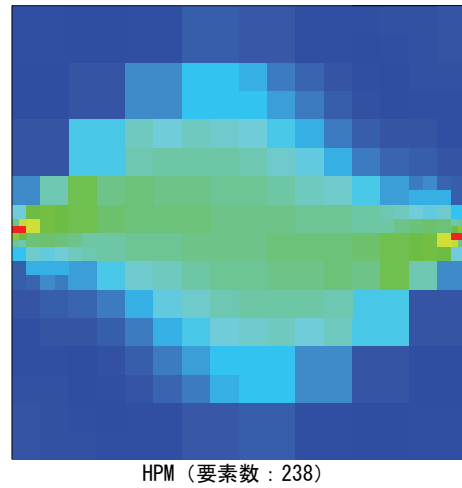
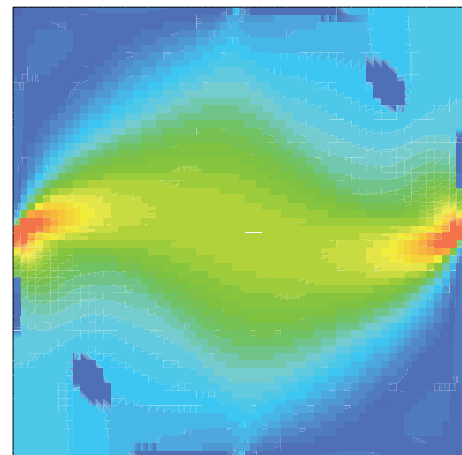


図 8 実験結果と解析結果の比較

図 9 に示すように、HPM では要素分割数が少なくても、細分割化を行なうことで、FEM と同様のひずみ分布が表現できている。



HPM (要素数 : 238)



FEM (要素数 : 3840)

図 9 最大せん断ひずみ

## 6-2. Vノッチを有する鋼板の引張問題

続いて、Vノッチを有する鋼板の引張問題を紹介する。解析モデルを図10に示す。

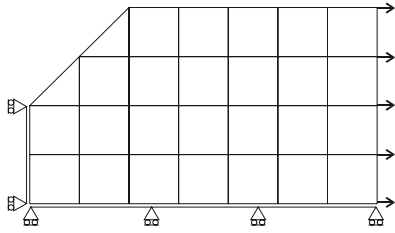


図10 解析モデル

表1および図11に示すように公称応力との誤差3%以内に収まるのに要した要素分割数は、FEMは約10万要素であったのに対して、HPMでは約100要素で誤差3%以内に収まる傾向が得られた。

表1 公称応力との誤差

FEM		HPM	
要素数	誤差	要素数	誤差
27	0.756	27	0.826
106	0.831	59	0.957
420	0.883	109	0.984
1672	0.920		
6672	0.945		
26,656	0.962		
106,560	0.974		

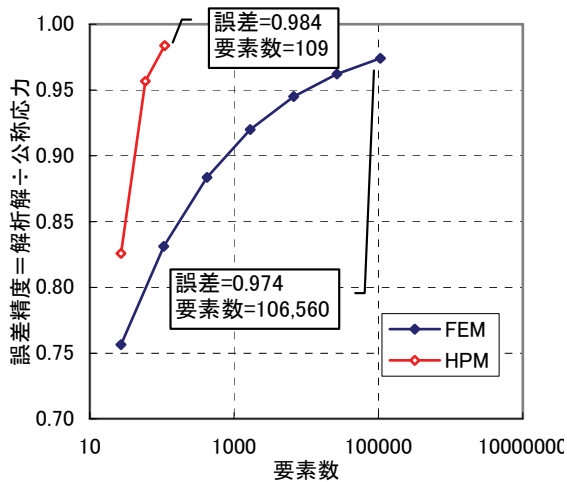


図11 誤差精度

図12に示すように、要素の細分割を行なうことで、力が集中するノッチ先端より要素の細分化が行なわれていることが分かる。また、図13に示すように、VonMises応力についてもノッチ先端に集中していることが確認できる。

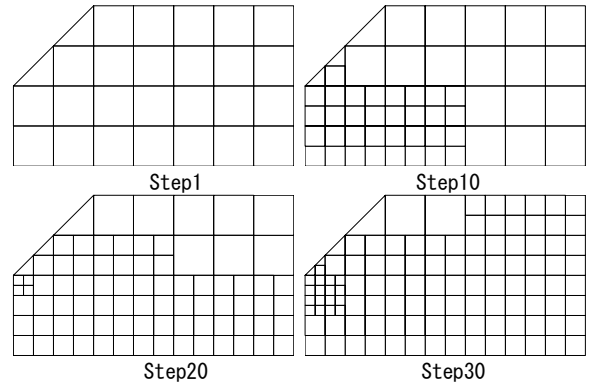


図12 要素細分割の経過

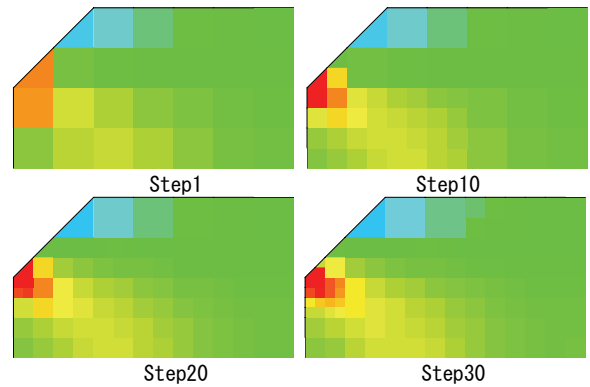


図13 VonMises 応力

図14に示すように、HPMでは要素分割数が少なくても、細分割化を行なうことで、FEMと同様の応力分布が表現できている。

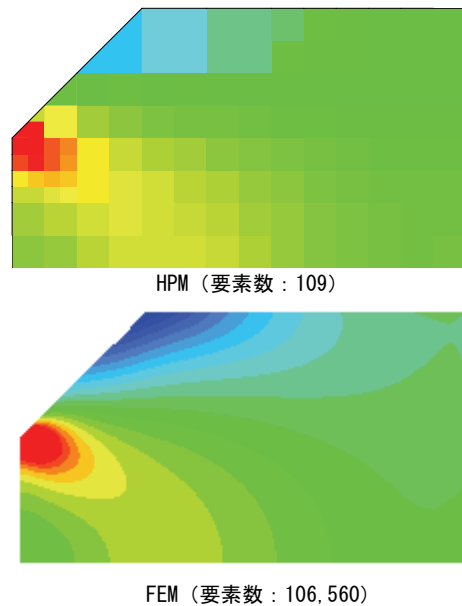


図14 VonMises 応力

## 7. まとめ

本論文では、ひずみエネルギーを指標とする要素細分割法を提案した。

- HPM では、FEM のように要素頂点で自由度を持たないため、局所的に強非線形性が生じるような問題であっても要素の部分的な細分割化を行なうことでより精度の向上が図れるものと思われる。
- せん断ひずみエネルギーを用いることで、全体領域内の適切な箇所（ひずみが卓越する箇所）を細分割化することが出来る。

また、本手法を用いてある程度要素分割を繰り返した後、非線形解析を行えば、解析に費やされる時間を短縮させるための有効な手段となると考える。

今回の細分割法は2次元問題を対象としたが、本手法を3次元問題に拡張することで、ボクセルメッシュの細分割化も可能となる。今後は、岩盤内部・構造物内部の破壊性状を3次的に検討する予定である。

## 参考文献

- [1] K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975
- [2] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000
- [3] T.Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977
- [4] 竹内則雄: 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991
- [5] 竹内則雄, 上田真稔, 鬼頭宏明, 樋口晴紀, 上林厚志: ボロノイ分割を用いた RBSM による無筋コンクリート梁の寸法効果解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.40A, pp519-527, 1994
- [6] 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972
- [7] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES, Paper No.20010002), Vol.3, pp.53-62, 2001
- [8] 見原理一, 竹内則雄, 草深守人: 2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発, 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp249-257, 2005
- [9] 浅井光輝: 微視的構造特性を考慮した非均質脆性材料の破壊シミュレーション, 東北大学提出学位論文, 2003
- [10] 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法の弾塑性問題への適用とその性能評価, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.247-256, 2003



キーワード.

ハイブリッド型ペナルティ法, 要素分割, ひずみエネルギー

-----

Summary.

**Development of mesh dividing method  
for HPM used for index of division of strain energy**

Riichi Mihara

Graduate School of Art and Technology, Hosei University (JIP Techno-Science Corporation), Tokyo, Japan

Norio Takeuchi

Dep. of Art and Technology, Hosei University, Tokyo, Japan

The authors proposed the new discretization technique which it calls the hybrid type penalty method (HPM). This method applies the concept of the penalty method on the basis of the principle of hybrid type virtual work. In HPM, it divides the whole domain into the sub-domain, and the displacing field is independently defined in each sub-domain. In this model, the node of the sub-domain is used only to recognize the configuration, and it does not have the degree of freedom like FEM. Therefore, in the problem that strong nonlinearity such as the yield appears locally, accuracy improves by dividing only the element into the small element. It introduces the element subdivision method of which the index is the strain energy in this research.

Keywords.

hybrid-type penalty method, mesh division, strain energy