

3 次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発

見原 理一

法政大学大学院システムデザイン研究科システムデザイン専攻

竹内 則雄

法政大学工学部システムデザイン学科

著者らは、部分領域内の任意点での剛体変形・剛体回転とひずみ・ひずみ勾配を考慮した 2 次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法(HPM : Hybrid-type Penalty Method)を提案した。ハイブリッド型変位モデルでは、変位の連続性を若干緩め、付帯条件として Lagrange の未定乗数を用いて変分表示を導入しているが、HPM では、Lagrange の未定乗数に剛体一ばねモデル(RBSM : Rigid Bodies-Spring Model)のばねの考え方を導入し、ばね定数としてペナルティ関数を用いて付帯条件を満足させている。このため、HPM では部分領域毎に独立な変位場を仮定することができる。しかし、2 次の変位場では、アダプティブ法における p 法のような扱いを行うには、より精度の高い変位場が必要となると思われる。そこで、本論文では、曲率までを考慮した 3 次の変位場を HPM に適用する方法を提案し、単純な応力問題を用いた数値解析例によって精度の検証を行う。

1. はじめに

川井[1]によって提案された剛体一ばねモデル(RBSM : Rigid Bodies-Spring Model)は、要素を剛体と仮定し、要素境界辺上に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを基に剛性行列を誘導し、そのばねの表面力を扱う。このため、構造物や地盤などの進行型破壊解析を容易に行うことができ、離散化極限解析を効率的に行えるという利点を有している[2]。また、剛体変位場を用いているため、要素形状は任意であり、例えば、乱数を母点とする Voronoi 多角形を要素に用いれば、人為性を排除したクラックの進展解析が行える[3]。しかし、一方で、剛体要素の仮定のため、弾性解の精度は有限要素法(FEM : Finite Element Method)と比較して劣る。

著者らは、離散化極限解析を効率よく行えるという RBSM の利点を引き継ぎ、かつ、欠点である弾性解の精度の向上を目指して、ハイブリッド型の仮想仕事の原理[4]を基礎にペナルティ法を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM : Hybrid-type Penalty Method)と称する新しい離散化手法を提案した[5]。ハイブリッド型変位モデルでは、変位の連続性を若干緩め、付帯条件として Lagrange の未定乗数を用いて変分表示を導入しているが[6]、HPM では、Lagrange の未定乗数にばねの考え方を導入し、ばね定数としてペナルティ関数を用いて付帯条件を満足させている。このため、HPM では部分領域毎に独立な変位場を仮定することができる。したがって、HPM では FEM のように節点において自由度を共有することはなく、節点は部分領域の形状を認識するためにだけ用いられるという特徴を有している。

著者らは、部分領域内の任意点における剛体変位（並行変位と剛体回転）とひずみを用いた線形の変位場により離散化極限解析を行い、弾性変位については FEM の定ひずみ要素、崩壊荷重については RBSM による極限荷重と同程度の精度を有することを示した[7]。

HPM は部分領域毎に独立な変位場をペナルティ関数を用いて領域境界の適合条件を確保しているため、基本的には部分領域の形状に関係なく変位場を仮定することが可能である。しかし、実際には、線形変位場の場合、

三角形以外の部分領域の形状を適用すると良い精度の解が得られず、RBSM の利点である Voronoi 多角形などの任意形状の分割が実質的には行えなかった。

そこで、領域分割に制約があるというこのような問題を解決するため、剛体変位とひずみに加え、ひずみの勾配を考慮した 2 次の変位場を HPM に適用する方法を提案した[8]。

しかし、アダプティブ法における p 法のような扱いを行うには、より高次の変位場を用いて解析を行う必要がある。そこで、本論文では、曲率までを考慮した 3 次の変位場を HPM に適用する方法を提案し、単純な応力問題の数値解析例によって得られる解の精度を検討する。

2. 支配方程式とハイブリッド型仮想仕事式

2-1. 支配方程式

いま、図 1 に示すように、 Ω を n_{dim} 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ の有界領域とし、 Γ を Ω のなめらかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ とする。また、 Ω に境界を加えてできる閉包を $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ とする。このとき、 Ω 内における平衡方程式は次のように与えられる。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

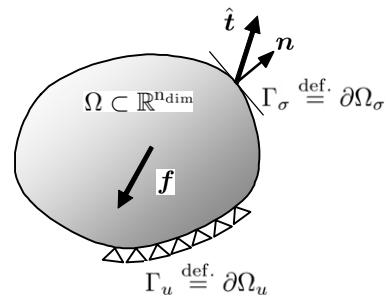


図 1 有界領域 Ω と境界 $\partial\Omega$

ここで、 $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}}$ は物体力、 $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}$ は Cauchy 応力である。ただし、 $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{(\text{ndim}+1) \cdot \text{ndim}/2}$ であり、 ndim 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^{ndim} の基底ベクトルを \mathbf{e}_i とすると、 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ である。 $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}}$ は、 $\mathbf{x} \in \Omega$ における変位場で、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を簡単に \mathbf{u} とする。このとき、微小ひずみは次のように定義される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (3)$$

ここで、 $\nabla := (\partial/\partial x_i) \mathbf{e}_i$ は微分作用素であり、 ∇^s は ∇ の対称部分を表している。

一方、境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ は以下の関係にある。

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \quad (4)$$

ここで、 $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial \Omega$ は変位が与えられる境界であり、

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{given}) \quad (5)$$

を満たしている。また、 $\Gamma_\sigma := \partial_\sigma \Omega \subset \partial \Omega$ は表面力が与えられる境界であり、外向き法線ベクトルが \mathbf{n} で表される物体表面の表面力を $\mathbf{t} := \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ と定義するとき

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{given}) \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{n}}$ は境界 Γ_σ に対する法線ベクトルである。

弾性体に対する構成方程式は弾性テンソル \mathbf{C} を用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

2-2. 仮想仕事式 (弱形式)

変位 \mathbf{u} と仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ に果たせられる許容関数空間を

$$\mathbb{U} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \} \quad (8)$$

$$\mathbb{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \delta \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\text{ndim}} \mid \delta \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \} \quad (9)$$

とする。このとき、仮想仕事の原理では、式(1)に関する全領域に対する積分

$$\delta W = \int_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (10)$$

より、

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) = (\text{div } \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u} \quad (11)$$

なる関係と Gauss の発散定理を用いると、変位 $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ に関する仮想仕事式が以下のように得られる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (12)$$

これは、 \mathbf{u} を重み関数とすれば、一般的な弱形式である。

このとき、 $\mathbb{H}^1(\Omega)$ を Sobolev 空間として、 $\mathbb{U} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ である。

2-3. ハイブリッド型仮想仕事式

いま、図2に示すように領域 Ω が閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial \Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ から構成されているものとする。

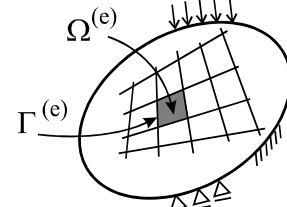


図2 部分領域 $\Omega^{(e)}$

すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \text{ ただし } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \emptyset \quad (r \neq q) \quad (13)$$

また、 $\bar{\Omega}^{(e)} := \Omega^{(e)} \cup \partial \Omega^{(e)}$ を $\Omega^{(e)}$ に境界を加えてできる閉包とする。

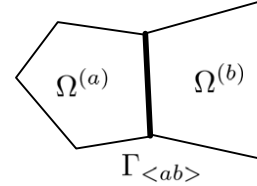


図3 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では、図3に示すように、隣接する2つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 、すなわち、

$$\Gamma_{\langle ab \rangle} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \quad (14)$$

において、付帯条件

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (15)$$

を Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて、

$$H_{ab} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \, dS \quad (16)$$

と表し、仮想仕事式に導入する[6]。ただし、 $\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}$ ならびに $\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}$ は、それぞれ、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ 上の変位を表している。また、 $\delta(\bullet)$ は (\bullet) の変分量を表している。

いま、隣接する2つの部分領域境界辺の数を N とすると、ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) \\ & - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^{(a)} - \tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) dS \right) - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \\ & \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (17) \end{aligned}$$

なお, Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ は, 次式のように, $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を意味している[5].

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{t}^{(a)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(a)}) = -\mathbf{t}^{(b)}(\tilde{\mathbf{u}}^{(b)}) \quad (18)$$

ここで, $\mathbf{t}^{(a)}$ と $\mathbf{t}^{(b)}$ は, それぞれ, 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力である.

2-4. 部分領域ごとに独立な 3 次の変位場

簡単のため, $n_{\text{dim}}=2$ とする 3 次元の変位場 $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ について考えてみる. いま, ある領域 $\Omega^{(e)}$ に着目し, 変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を点 $\mathbf{x}_P = (x_P, y_P) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{u}^P + (x - x_P) \mathbf{u}_x^P + (y - y_P) \mathbf{u}_y^P \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_P)^2 \mathbf{u}_{xx}^P + \frac{1}{2} (y - y_P)^2 \mathbf{u}_{yy}^P \\ &+ (x - x_P)(y - y_P) \mathbf{u}_{xy}^P + \dots \quad (19) \end{aligned}$$

ここで,

$$(\bullet)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\bullet) \quad (\bullet)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\bullet) \quad (\bullet)_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet)$$

$$(\bullet)_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bullet) \quad (\bullet)_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bullet)$$

$$(\bullet)_{xy,x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bullet) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet)$$

$$(\bullet)_{xy,y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bullet) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet)$$

なる関係があり, $(\bullet)^P$ は点 \mathbf{x}_P における物理量 (\bullet) の値を示している. テーラー展開の 3 次の項までをとり, 変位の 1 階から 3 階微分を自由度に設定しても 3 次の変位場を設定することができるが, 応力解析の場合は, 最終的にひずみや応力のチェックが必要となることが多く, これを修正して, 点 \mathbf{x}_P における剛体変位, ひずみとひずみの勾配および, 曲率によって表すと便利である.

いま, x 方向変位を u , y 方向変位を v とするとき

$$u_x = \varepsilon_x \quad , \quad u_{xx} = (\varepsilon_x)_x \quad , \quad u_{xy} = (\varepsilon_x)_y$$

$$u_{xxx} = (\varepsilon_x)_{xx} \quad , \quad u_{xxy} = (\varepsilon_x)_{xy} \quad , \quad u_{xyy} = (\varepsilon_x)_{yy}$$

$$v_y = \varepsilon_y \quad , \quad v_{yy} = (\varepsilon_y)_y \quad , \quad v_{yx} = (\varepsilon_y)_x$$

$$v_{xy} = (\varepsilon_y)_{xx} \quad , \quad v_{xyy} = (\varepsilon_y)_{xy} \quad , \quad v_{yyy} = (\varepsilon_y)_{yy}$$

$$\frac{1}{2}(v_x + u_y) = \gamma_{xy} \quad , \quad \frac{1}{2}(v_x - u_y) = \theta$$

$$\frac{1}{2}(v_x + u_y)_x = (\gamma_{xy})_x \quad , \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y)_y = (\gamma_{xy})_y$$

$$\frac{1}{2}(v_x + u_y)_{xx} = (\gamma_{xy})_{xx} \quad , \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y)_{yy} = (\gamma_{xy})_{yy}$$

なる関係がある. これを用いて式(19)で示されるある領域 $\Omega^{(e)}$ 内における 3 次の変位場を表すと次のようになる.

$$\begin{aligned} u^{(e)} &= u^P - Y^{(e)} \theta^P + X^{(e)} \varepsilon_x^P + \frac{1}{2} Y^{(e)} \gamma_{xy}^P \\ &+ \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\varepsilon_x^P)_x + \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\gamma_{xy}^P)_y \\ &- \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_y^P)_x + X^{(e)} Y^{(e)} (\varepsilon_x^P)_y \\ &+ \frac{1}{6} \left((X^{(e)})^3 (\varepsilon_x^P)_{xx} + 3(X^{(e)})^2 Y^{(e)} (\varepsilon_x^P)_{xy} \right. \\ &+ 3X^{(e)} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_x^P)_{yy} + 2(Y^{(e)})^3 (\gamma_{xy}^P)_{yy} \\ &\left. - (Y^{(e)})^3 (\varepsilon_y^P)_{xy} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(e)} &= v^P + X^{(e)} \theta^P + Y^{(e)} \varepsilon_y^P + \frac{1}{2} X^{(e)} \gamma_{xy}^P \\ &+ \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_y^P)_y + \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\gamma_{xy}^P)_x \\ &- \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\varepsilon_x^P)_y + X^{(e)} Y^{(e)} (\varepsilon_y^P)_x \\ &+ \frac{1}{6} \left(2(X^{(e)})^3 (\gamma_{xy}^P)_{xx} - (X^{(e)})^3 (\varepsilon_x^P)_{xy} \right. \\ &+ 3(X^{(e)})^2 Y^{(e)} (\varepsilon_y^P)_{xx} + 3X^{(e)} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_y^P)_{xy} \\ &\left. + (Y^{(e)})^3 (\varepsilon_y^P)_{yy} \right) \quad (21) \end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} X^{(e)} &= x - x_P \\ Y^{(e)} &= y - y_P \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

また, $u^P, v^P, \theta^P, \varepsilon_{xx}^P$ は点 \mathbf{x}_P における x および y 方向変位, 剛体回転および曲率を表している. 式(20)(21)をマトリックス形式で簡単に次のように書く.

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_\gamma^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} + \mathbf{N}_\theta^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(e)} \quad (23)$$

ここで、それぞれの係数は以下のとおりである。

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u^P, v^P, \theta^P]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x^P, \varepsilon_y^P, \gamma_{xy}^P]^t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} = [(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_y, (\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_y]^t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(e)} = [(\varepsilon_x^P)_{xx}, (\varepsilon_y^P)_{yy}, (\varepsilon_x^P)_{xy}, (\varepsilon_y^P)_{xy}, (\varepsilon_x^P)_{yy}, (\varepsilon_y^P)_{xx}, (\gamma_{xy}^P)_{xx}, (\gamma_{xy}^P)_{yy}]^t$$

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y^{(e)} \\ 0 & 1 & X^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X^{(e)} & 0 & Y^{(e)}/2 \\ 0 & Y^{(e)} & X^{(e)}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_g^{(e)} = \begin{bmatrix} (X^{(e)})^2/2 & 0 \\ 0 & (Y^{(e)})^2/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X^{(e)}Y^{(e)} & -(Y^{(e)})^2/2 & 0 & (Y^{(e)})^2/2 \\ -(X^{(e)})^2/2 & X^{(e)}Y^{(e)} & (X^{(e)})^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_g^{(e)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (X^{(e)})^3 & 0 & 3(X^{(e)})^2Y^{(e)} & -(Y^{(e)})^3 \\ 0 & (Y^{(e)})^3 & -(X^{(e)})^3 & 3X^{(e)}(Y^{(e)})^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3X^{(e)}(Y^{(e)})^2 & 0 & 0 & 2(Y^{(e)})^3 \\ 0 & 3(X^{(e)})^2Y^{(e)} & 2(X^{(e)})^3 & 0 \end{bmatrix}$$

このように、本論文で用いる変位場は、領域内における任意点の変位に加え、直接、ひずみとその勾配および曲率を自由度として扱う。また、各領域内の任意点におけるパラメータを用いて変位場を表しているため、自由度を要素頂点にも設定するような従来の変位型FEMの要素とは異なり、頂点において変位を共有しない。すなわち、本モデルにおける頂点は領域形状を認識するために用いるのであって、従来の変位型FEMのように頂点は形状関数に支配されない。したがって、要素形状は、特に限定されず、任意の多角形、多面体、曲面体を部分領域として用いることができる。

3. 離散化方程式の誘導

3-1. Lagrange の未定常数とペナルティ

2章の終わりで述べたように、Lagrange の未定乗数は、物理的には表面力を意味している。ハイブリッド型変分原理を用いる手法では、この未定乗数も未知数として取り扱う方法が一般的である[6][9]。

一方、著者らが提案したハイブリッド型ペナルティ法では、Lagrange の未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ が表面力に対応するという物理的意味を考慮して、部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力を式(20)のように表す[5]。

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{<ab>} \quad (24)$$

ここで、 $\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$ は領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位を表しており、2次元問題の場合、以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{n<ab>} \\ \lambda_{t<ab>} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{n<ab>} \\ \delta_{t<ab>} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで、 $\delta_{n<ab>}$ 、 $\delta_{t<ab>}$ は領域境界 $\Gamma_{<ab>}$ に対する法線および接線方向の相対変位で、同様に、 $\lambda_{n<ab>}$ 、 $\lambda_{t<ab>}$ は、法線および接線方向に対する Lagrange の未定乗数、すなわち表面力である。ハイブリッド型ペナルティ法では、この係数 k としてペナルティ関数 p を用い、以下のように表す[5]

$$k_n = k_t = p \quad (26)$$

3-2. 相対変位と付帯条件

式(16)で示した付帯条件は領域境界面に沿った局所座標系の成分によって次のように表すこともできる。

$$\mathbf{R}_{<ab>} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} = \mathbf{R}_{<ab>} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{<ab>} \quad (27)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{<ab>}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列で、 $\mathbf{R}_{<ab>}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{<ab>}^{(b)}$ を部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{<ab>}$ に対するそれぞれの領域から見た座標変換行列とすれば

$$\mathbf{R}_{<ab>} = -\mathbf{R}_{<ab>}^{(a)} = \mathbf{R}_{<ab>}^{(b)} \quad (28)$$

なる関係にある。したがって、相対変位は、

$$\boldsymbol{\delta}_{<ab>} = \mathbf{R}_{<ab>}^{(a)} \tilde{\mathbf{u}}^{(a)} + \mathbf{R}_{<ab>}^{(b)} \tilde{\mathbf{u}}^{(b)} = \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{<ab>}^{(l)} \tilde{\mathbf{u}}^{(l)} \quad (29)$$

と表される。これらの関係と式(24)の関係を用いれば、式(16)は次のように書くことができる。

$$H_{ab} = -\delta \int_{\Gamma_{<ab>}} \boldsymbol{\delta}_{<ab>}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{<ab>} dS \quad (30)$$

3-3. マトリックス表示による離散化方程式

離散化方程式の誘導にあたり、式(17)をマトリックス表示で書き直すと以下ようになる。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}]^t \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} dV - \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^t \mathbf{f} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^t \mathbf{T} dS \right) + \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \boldsymbol{\delta}^t \mathbf{k} \boldsymbol{\delta} dS \right) = 0 \quad (31)$$

2次元平面応力状態の場合、それぞれの係数は次のとおりである。

$$\mathbf{L}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} \hat{t}_n \\ \hat{t}_t \end{Bmatrix}$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、 f_x, f_y は、それぞれ x および y 軸方向の物体力を表している。また、 u, v および、 $\delta u, \delta v$ は、それぞれ x および y 軸方向の変位ならびに仮想変位、 \hat{t}_n, \hat{t}_t は境界における既知の法線および接線方向の表面力である。

式(31)に式(23)で仮定した3次関数で表される変位を代入する。ただし、仮想の変位についても同様に、下記の3次関数を仮定する。

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \delta \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_g^{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} + \mathbf{N}_c^{(e)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(e)} \quad (32)$$

離散化方程式の誘導に先立ち、式(23)(32)を次のように整理する。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad \delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (33)$$

ただし、

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(e)}]^t$$

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(e)}]^t$$

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)}, \mathbf{N}_g^{(e)}, \mathbf{N}_c^{(e)}]$$

これより、以下の関係が得られる。

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (34)$$

ただし、 $\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)}$

さらに、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を \mathbf{U} とすると、各部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{U}^{(e)}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (35)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域における自由度を関係付ける行列である。同様にし、仮想変位についても以下のように表す。

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta \mathbf{U} \quad (36)$$

一方、相対変位 $\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}$ についても次のように表す。

$$\boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} \quad (37)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}, \mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}]$$

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{U}^{(a)}, \mathbf{U}^{(b)}]^t$$

いま、式(35)と同様に、全部分領域における自由度を

並べた1次元配列を \mathbf{U} とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $\mathbf{U}_{\langle ab \rangle}$ は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \mathbf{U} \quad (38)$$

ここで、 $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関する自由度を関係付ける行列である。同様にし、仮想変位についても、

$$\delta \mathbf{U}_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \delta \mathbf{U} \quad (39)$$

とする。

以上の関係を式(31)に代入すると次式が得られる。

$$\delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^t \left(\sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (40)$$

ここで、

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV \mathcal{A}^{(e)} \quad (41)$$

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} dS \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \quad (42)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left(\int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} dS \right) \quad (43)$$

式(40)において、仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (44)$$

ただし、 \mathbf{K} および \mathbf{P} は以下のとおりである。

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \quad (45)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \quad (46)$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(44)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 \mathbf{K} は、各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

また、式(42)に含まれる \mathbf{k} の値、すなわち、式(24)に示すペナルティ関数の値を0にすることで、自由度を変更することなくオープニングなどの不連続な現象を容易に表現できるモデルとなっている[7]。

4. 数値積分

式(41)の係数行列を求めるためには、2次元の場合、面積積分が必要となる。三角形や四角形の場合には一般的

な数値積分の公式が適用できる。しかし、Voronoi 多角形など、多角形や複雑な形状の場合には数値積分の適用が難しくなる。このような場合、多角形を三角形の集まりに分割し、それぞれの三角形に対して数値積分を適用するという方法が提案されており、この方法を用いても精度に与える影響は少ないとされている[10]。

しかし、2次元の場合には、具体的に係数行列を展開して解析的に積分を実施することも可能である。本論文では、三角形と四角形に関してはガウスの公式による数値積分を用いた。

また、式(42)の係数行列も2次元問題の場合、線積分が生ずる。これについても具体的に係数行列を展開し、解析的に積分を行うことが可能であるが、すべりなどの非線形挙動の解析の際には、数値積分の方が取り扱いが容易である。本論文ではガウスの3点積分を用いた。

4. 数値計算例

4-1. 内圧を受ける中空厚肉円筒問題

弾性解の精度を検証するため、図4に示す内圧を受ける中空厚肉円筒の問題を解析する。内径 r_1 及び外径 r_2 、ならびに内圧 p_0 、弾性係数 E 、ポアソン比 ν は図中に示すとおりである。また境界条件としては、図のように、両端をスライドとした。著者らはペナルティの値として弾性係数の 10^3 倍以上を用いると誤差が小さくなることを示した[7]。本論文での解析例ではペナルティとして弾性係数の 10^6 倍の値を設定した。

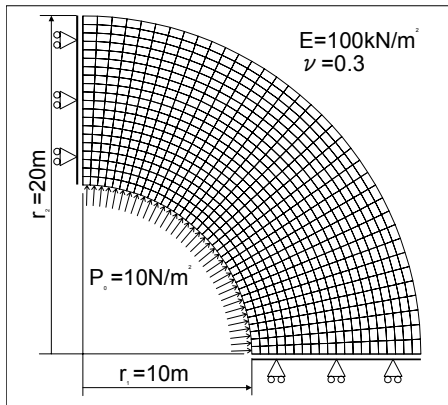


図4 内圧を受ける厚肉円筒

はじめに、領域分割数、ならびに領域形状が解に与える影響を検討する。本モデルでは、領域形状として任意の形状を用いることができる。ここでは、図4に示すように、円筒の1/4を取り出し、円周方向と半径方向が9:5になるよう四角形に分割した。また、三角形要素を用いた解析では、一つの四角形要素をクロス分割することでモデル化した。

図5は横軸に要素数、縦軸に変位に関する弾性解との比をとったものである。○は三角形要素を用いたFEMによる結果、□は四角形要素を用いた2次のHPMによる結果、△は3次のHPMによる結果である。図に示すように、3次のHPMによる結果が最も良い精度を有している。

図6は四角形分割(半径方向20分割)の場合の半径方向の変位分布を示した図である。横軸は半径方向の距離

を、また、縦軸は半径方向変位を、それぞれ、内径 r_1 で除して無次元化した値を示している。図中、実線が解析解を示し、□は2次のHPMによる結果、△は3次のHPMによる結果であり、それぞれ半径方向の変位を表している。すべての点において、誤差は0.5%以下である。

図7は図6と同じ問題の半径方向の部分領域内応力と円周方向の部分領域内応力を解析解と比較した図である。横軸は半径方向の距離を内径 r_1 で除して無次元化した値を、また、縦軸は、それぞれの部分領域内応力を内圧で無次元化した値を示している。実線が解析解を示し、□は2次のHPMによる結果、△は3次のHPMによる結果であり、円周方向の応力と半径方向の応力を示している。どちらの応力もすべての点において解析解との誤差は0.1%以下であった。

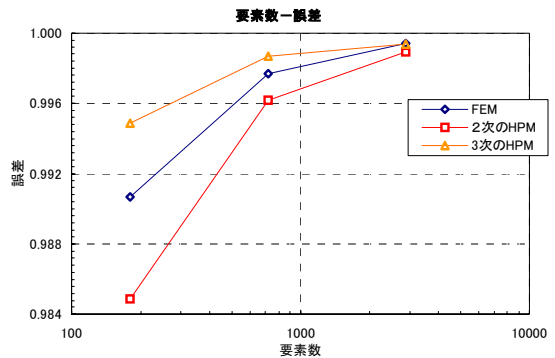


図5 領域分割による半径方向変位の収束状況

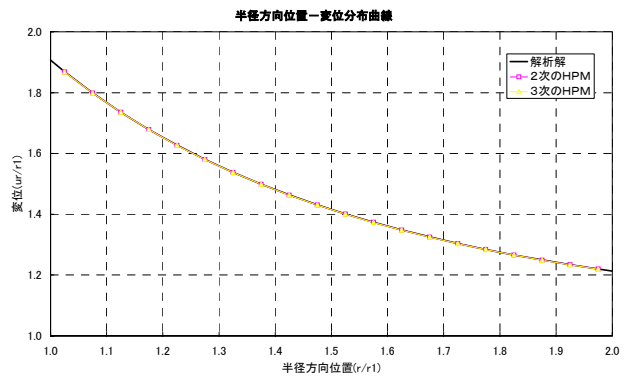


図6 半径方向変位分布

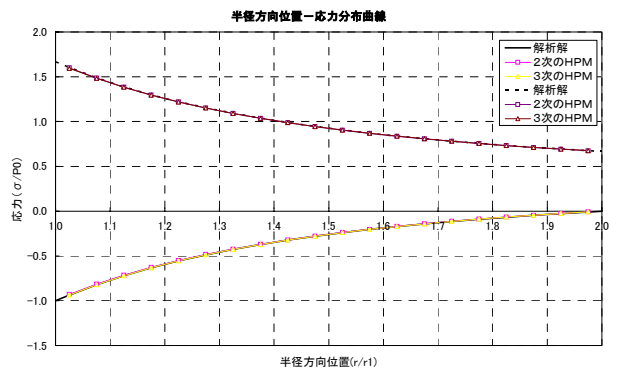


図7 半径方向および円周方向応力分布

図8は図6と同じ四角形分割に対する VonMises の応力を示したものである。本モデルでは要素内応力が求められているため、図に示すように、FEM でよく行われているカラーコンターによる表現も可能である。

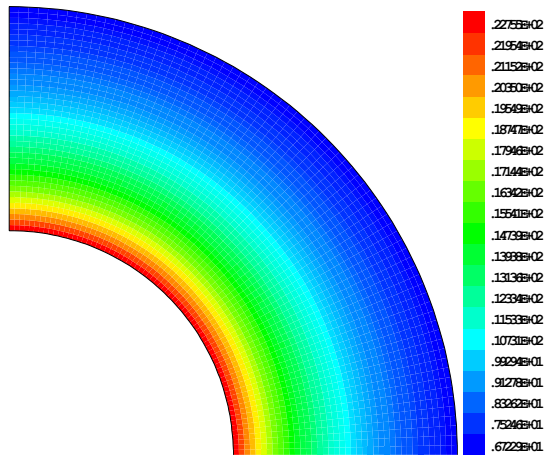


図8 VonMises の応力コンター

4. まとめ

HPM では、全体領域を部分領域（FEM でいうところの要素）に分割し、それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される。領域の節点は、領域形状を認識するためだけに用いられ、FEM のように自由度は持たない。本論文ではこのような特徴を利用して、HPM の変位場として、剛体変位・剛体回転とひずみ・ひずみ勾配および曲率を自由度とする 3 次の変位場を提案した。この変位場を用いると FEM の要素のように要素の辺上に複数の中間節点を設ける必要はなく、線形変位場と同じ分割情報で、高次の変位場を適用することが可能である。

簡単な数値計算例から、変位場の次数を増加することで精度の向上を図れることを示した。本論文で提案した方法によりさらに高次の変位場を仮定すれば、より精度の高い解を得ることもでき、P 法のように変位場を高次に

することで誤差を減少させる方法を HPM に適用することも可能である。しかも要素分割は変更する必要がなく、必要な部分領域のみの高次化が可能である。

ただし、離散化極限解析の立場からは、せいぜい 3 次のオーダーが現実的な精度であると考えられる。

参考文献

- [1] T.Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977
- [2] 竹内則雄: 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991
- [3] 竹内則雄, 上田真稔, 鬼頭宏明, 樋口晴紀, 上林厚志: ボロノイ分割を用いた RBSM による無筋コンクリート梁の寸法効果解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.40A, pp519-527, 1994
- [4] K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975
- [5] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp261-270, 2000
- [6] 鷺津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972
- [7] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES, Paper No.20010002), Vol.3, pp.53-62, 2001
- [8] 見原理一, 竹内則雄, 草深守人: 2 次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発, 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp249-257, 2005
- [9] 浅井光輝: 微視的構造特性を考慮した非均質脆性材料の破壊シミュレーション, 東北大学提出学位論文, 2003
- [10] 車谷麻緒, 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法の弾塑性問題への適用とその性能評価, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.247-256, 2003

キーワード.

ハイブリッド型変位モデル, ペナルティ法, 高次変位場

Summary.

**Development of hybrid-type penalty method
assumed third-order displacement field**

Riichi Mihara

Graduate School of Art and Technology, Hosei University (JIP Techno-Science Corporation), Tokyo, Japan

Norio Takeuchi

Dep. of Art and Technology, Hosei University, Tokyo, Japan

In this paper, we propose the hybrid-type penalty method (HPM) assumed third-order displacement field with the rigid displacement, strain and strain gradient at the arbitrary point in sub-domain. In this model, it applies the concept of the spring of RBSM in Lagrangian multiplier. In addition, compatibility of the displacement on the element boundary edge is approximately introduced using the penalty as a spring constant. First, it shows the brief formulation of the present method, and analyzes problems such as simple stress state. From these results, it examined accuracy of the solution by HPM in using proposed displacement field. The numerical result for displacement and stress by HPM using third-order displacement field is the accuracy which is equivalent to FEM. It is possible to improve the accuracy, if the displacement field of high order is used according to the method for proposing here.

Keywords.

hybrid displacement model, penalty method, third-order displacement field