

# 微小要素モデルの離散化解析手法の研究

青野 淳也

法政大学大学院工学研究科建設工学専攻

吉田 長行

法政大学工学部建築学科

地震などの災害では何らかの破壊現象を伴うが、連続体の解析手法で解析しようとしていたため、十分な解析結果を得ることができなかった。そこで、新たに物理モデルを提案し、微小変形から塑性変形さらに、大変形・崩壊現象までを統一的に解析できる手法を提案する。このモデルを用いコンクリートの曲げ破壊試験のシミュレーションを行う。

## 1. はじめに

現在、連続体の解析では、有限要素法が主流であり、高い精度で解析をすることができ、十分な解析結果を得ることができる。一方、固体にクラックや剥離、すべりなどの破壊が発生すると、その部分が所持していた応力の解放によって破壊が周辺へと進展する。破壊が進展し続けると最終的にはメカニズムが形成され、固体は流動状態に至る。このような進行型の破壊現象を解析するとき障壁となっているのが不連続箇所の取り扱いである。有限要素法では連続体を仮定しているため、このような取り扱いが難しい。不連続体の数値解析手法としては、現在までのところ変分原理に基づく川井の剛体ばねモデル (Rigid Body Spring Model, RBSM) [1] や対象を剛体粒子の集合体として取り扱う Cundall の個別要素法 (Distinct Element Method, DEM) [2] がある。個別要素法に関して、Gen-hua Shi は各要素を弾性体とみなし、有限要素法により解くというハイブリッド法ともいべき不連続変形法 (Discontinuous Deformation Analysis, DDA) [3] を、伯野、竹内らは要素間に間隙ばねを導入することにより、連続体まで取り扱えるようにした拡張個別要素法 (Extended Distinct Element Method, EDEM) [4][5] を提案している。

本研究では基本的概念は DEM と共通するが各隅各部にポアソン効果とせん断変形を表現するばねを導入した新しい物理モデル [7][8] とその解析手法を提案する。

## 2. 微小要素モデルの概説

本研究で提案する物理モデルは、連続体としての微小要素 (differential element) をそれを質点とそれを繋ぐ線要素からなる離散的な微小要素 (infinitesimal element) に置き換える (Fig.2.1)。このようなモデル化によって極限において厳密解に収束することが約束される。またこのモデルに2つのばね (Fig.2.2) を導入することにより微小変形時の弾性的挙動を表現する。

### (i) ポアソンばね

物体に垂直力が加わると荷重方向にひずみが発生するが、それと垂直な方向にもひずみが生じる。これはポアソン効果によるものである。本モデルでは2つの直交する直ひずみの和に反応するばねを想定する。ばねの剛性が無限大の場合には次式が成立する。

$$\epsilon_{1s} + \epsilon_{2s} = 0 \quad (1)$$

### (ii) せん断ばね

通常用いられる接線方向のせん断ばねでは、せん断変形のみが発生して曲げ変形が生じないという欠点がある。

そこでせん断変形を拘束するばねを想定する。ばねの剛性が無限大の場合には次式が成立する。

$$\epsilon_{1s} - \epsilon_{2s} = 0 \quad (2)$$

ばね定数の算定は線形弾性体と微小要素モデルの歪エネルギーを等価におくことによって求める (式 (3))。

$$\frac{1}{2} St \{ \epsilon \}^T [D_e] \{ \epsilon \} = \frac{1}{2} \{ d \}^T [K] \{ d \} \quad (3)$$

ここで、 $S$  は面積、 $t$  は厚さ、 $[D_e]$  は弾性体の応力 - 歪マトリクス、 $[K]$  は要素剛性マトリクスである。本研究ではこの物理モデルを微小要素モデルと呼ぶこととする。この微小要素モデルを用い線形解析、非線形解析を行う。

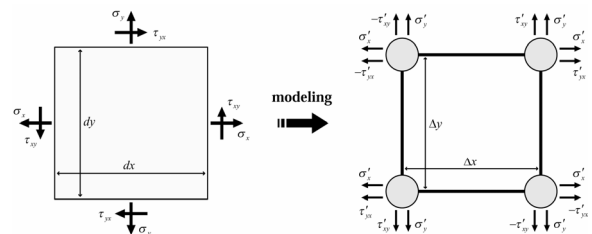


Fig.2.1: Modeling to infinitesimal element from differential element

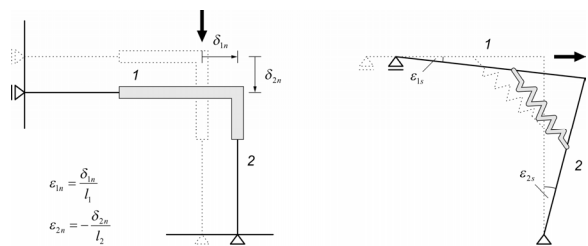


Fig.2.2: Corner spring for Poisson's effect and shear deformation

## 3. 数値解析手法

### 3.1 個別計算法

動的なものとして取り扱い、解析対象となるモデル全体を空間領域および時間領域において細分化したとき、ある質点の挙動は隣接する質点のみに伝播する。

隣接する質点による影響を考慮すると、第  $q$  質点に関して運動方程式は、以下ようになる。式(3)に対し、本研究で用いた差分近似法は陽的時間積分法である Runge-Kutta 法である。

$$m_q \ddot{u}_q = f_q - \sum_p \sum_{k=1}^n \left( [C_{qk}^{(p)}] \dot{u}_k^{(p)} \right) + [K_{qk}^{(p)}] u_k^{(p)} \quad (5)$$

### 3.2 降伏関数

材料のせん断抵抗に静水圧の効果のあるコンクリートを扱うので Drucker-Prager の降伏関数を用いることとする。また、塑性ポテンシャル  $Q$  と降伏関数  $f$  を等しくおく、関連流れ則を用いる。

$$f = (I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (6)$$

また、コンクリートのダイラタンシーは破壊近傍に起こるので、このような非弾性的な体積応答は一般的に静水圧の圧縮作用に対して働く体積依存性のキャップ曲面を導入する。今回の報告では簡略化し直線に置き換えている (Fig.3.1)。

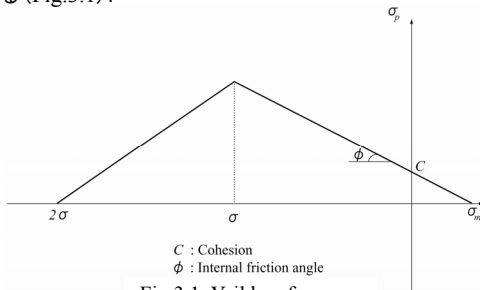


Fig.3.1: Yield surface

破壊判定を正確に判定するために  $\gamma$  min 法<sup>[6]</sup>を用いた。また、 $\gamma$  min 法を用いるとすべての要素は弾性状態か少なくとも降伏曲面上に存在することとなる。

$$\gamma = \frac{f(\sigma_{i-1} + \gamma d\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})}{f(\sigma_{i-1} + d\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})} = \frac{-f_0}{(f_1 - f_0)} \quad (7)$$

ここで、 $f_0 = f(\sigma_{i-1})$ 、 $f_1 = f(\sigma_{i-1} + d\sigma_i)$  とする。

完全弾塑性理論では降伏曲面上にある応力点は次ステップでは降伏曲面の接線方向に応力点が移動するので、応力点は降伏曲面の外側に出てしまう。そこで、スケールリングすることにより、応力点を降伏曲面上に移動させる (Fig.3.2)。

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \left( \frac{\sigma_Y + H' \varepsilon_{i+1}^p}{\sigma_e} \right) \quad (8)$$

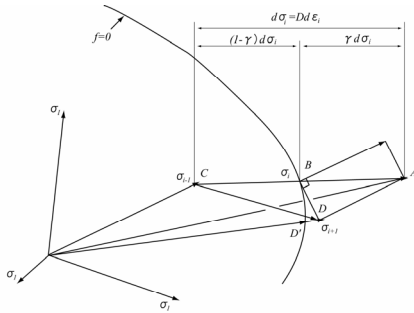


Fig.3.2: Refined process for reducing a stress point to the yield

ここで  $H'$  とは硬化関数、 $\sigma_e$  とは  $D$  点の応力値、 $\sigma_Y$  とは  $D'$  点の応力値である。

### 3.3. 破壊基準の導入

完全弾塑性理論に基づき、破壊基準を設定する。多軸応力または多軸ひずみの元でコンクリートの破壊を決定するために、1軸の応力(相当応力)、ひずみ(相当ひずみ)に置き換え破壊基準を設定する必要がある。そうすることによって、実験から得られる応力-ひずみ関係を利用することができる。本研究では、完全弾塑性理論と弾性ひずみと塑性ひずみの関係に塑性率  $\mu$  を用いた破壊基準を導入する (Fig.3.3)

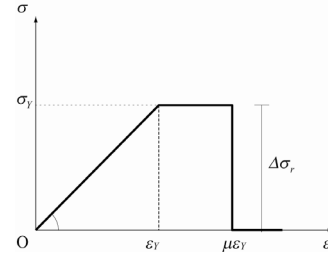


Fig.3.3: Failure criterion on perfect plasticity

### 3.3. 粒子間作用力

破壊離散後の接触判定法として、幾何学的に処理する方法もあるが、本研究では接触時にのみ粒子間に作用するばね (Fig.3.4)を想定する。2粒子  $i, j$  の接触面に作用する力を、法線方向に作用する圧縮力  $f_n$  と接線方向に作用するせん断力  $f_s$  に分けて考える。

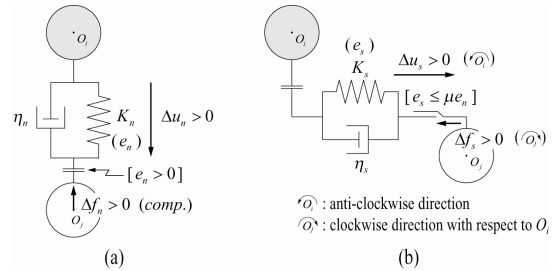


Fig.3.4: Elastic spring(K) and viscous dashpot( $\eta$ ) assumed for contact

法線方向作用力(6)、接線方向作用力(7)は以下のように仮定する。ここで  $K$  は弾性スプリング(剛性定数)、 $\eta$  は粘性ダッシュポット(粘性定数)とする。

$$\Delta e_n = K_n \Delta u_n, \Delta d_n = \eta_n \Delta \dot{u}_n \quad (6)$$

$$\Delta e_s = K_s \Delta u_s, \Delta d_s = \eta_s \Delta \dot{u}_s \quad (7)$$

## 4. 解析結果

### 4.1. 線形解析による微小要素モデルの性能評価

まず、先端に集中荷重が作用するアスペクト比 1:8 の片持梁の解析を行い、微小要素モデルの性能評価を行う。Fig.4.1 の変位とは梁先端のたわみのことであり、グラフは厳密解を基準とし無次元化してある。ここで FEM は(三角形定歪要素および 4 節点アイソパラメトリック要素)による解析結果を表している。また present model とは微小要素モデルによる解析結果である。

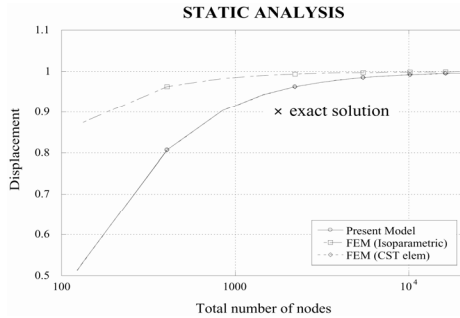


Fig.4.1: Displacement of cantilever

Fig.4.1 より、有限要素法と同等な結果を得ることができたので、弾性範囲内において微小要素モデルは有効であると言える。これは、隅角部に設置したポアソンばねにより、線要素に伸縮が発生し、曲げ変形が適切に表現されていたことを示すものである。

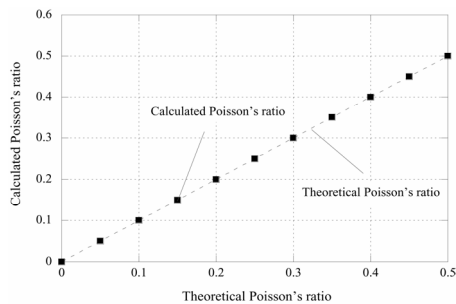


Fig.4.2: Calculated Poisson's ratio of soil wall

図中の理論値とは入力したポアソン比のことである。Fig.4.2 より個別要素法では得ることのできないポアソン効果が適切に示されていることがわかる。Fig.4.3. は土壁の応力分布図である。

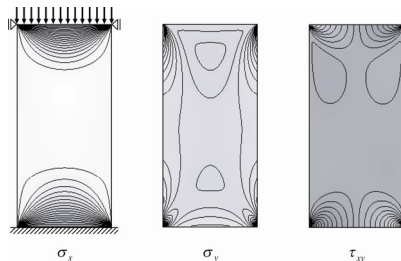


Fig.4.3: Stress distribution of soil

#### 4.2. 非線形解析による単純梁の破壊解析

微小要素モデルとその非線形解析手法を適用した数値解析例を挙げ、その結果について考察する。本研究ではコンクリートの曲げ破壊試験の解析を行った。亀裂の進行について検討することにより、脆性材料の非線形解析における微小要素モデルの性能を評価する。

動的な非線形解析による結果を Fig.4.3 に示す。中央底面から入った亀裂が上部に進行している様子が良く分かる。

Unit weight	24 kN/m <sup>3</sup>
Poisson's ratio	0.1666
Compressive strength	2500 N/cm <sup>2</sup>
Inter friction angle	11.3 deg

Table.4.1: Analysis parameter of concrete model

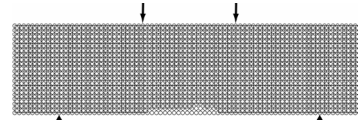


Fig.4.4.1:0.003116(s)

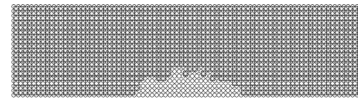


Fig.4.4.2:0.003118(s)

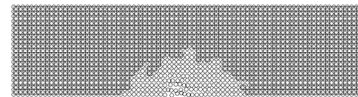


Fig.4.4.3:0.003120(s)

#### 5. おわりに

本研究では、破壊のメカニズムを解明するため、微小変形から塑性変形さらに大変形・崩壊に至るまでの挙動を統一的に追跡できる数値解析手法の開発を目標として、微小要素モデルとその非線形解析手法を提案し、定式化を行った。その結果、線形弾性範囲内では曲げ変形、ポアソン効果などを高い精度で表現することに成功した。また、非線形領域では新たに塑性理論を用い、塑性率を扱うことによる破壊基準を適用したコンクリートの曲げ破壊のシミュレーションを行い、亀裂の進行を追跡できることを示した。

破壊基準のモデル化に関しては、すべり現象をどのように表現するかが大きな課題となっている。そして、それらを統合した非線形解析全体においては、破壊進展過程の追跡を、破壊パターンなどの検討による定性的なものから、具体的な応答数値データ(変形や耐力など)の検討による定量的なものへと発展させていかなければならない。そのためには、供試体レベルでの実験結果との比較が必要である。また減衰に対する詳細な検討が必要である。また破壊基準に用いた塑性率もある適当な値を用いたのと引張破壊による脆性破壊の検討が必要である。

#### 6. 参考文献

- [1] Kawai, T., "New Discrete Model for Analysis of Solid Mechanics Problem", Journal of the Seisan Kenkyu, Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 29, No.4, pp.208-210, 1977.
- [2] Cundall, P. A., "A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock system", Symp. ISRM, Nancy, France, Proc., 2, pp.129-136, 1971.
- [3] Shi, G. H. and Goodman, R.E., "Two Dimensional Discontinuous Deformation Analysis", Int'l. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 9, pp.541-556, 1985
- [4] 伯野元彦, "破壊のシミュレーション", 森北出版, 1997.
- [5] 竹内則雄ほか, "鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法", 丸善, 2005.
- [6] 山田嘉昭訳, "塑性の有限要素法", 科学技術出版社, 1988.
- [7] 鈴木知晃, 吉田長行, "粒状体モデルとその動的解析法の検討", 2002年度建築学会関東支部研究報告集, pp. 295 - 298, 2003
- [8] 加藤淳, 青野淳也, 吉田長行, "離散要素モデルによる脆性材料の破壊解析", 法政大学計算科学研究センター報告, vol.18 (2005年)

## キーワード

微小要素モデル, 非線形解析, 塑性変形

---

## *Summary*

### **Research on Discrete Analysis Method of Infinitesimal Element model**

Junya Aono  
Graduate School of Engineering, Hosei University

Nagayuki Yoshida  
Faculty of Engineering, HOSEI University

While it is accompanied by some fracture phenomena in the disasters such as an earthquake, because it tried to analyze it in a method for analyzing a continuum, a sufficient analysis result could not be gained. Therefore we take a new approach on the whole domain of deformation from an elastic continuity and plastic deformation and discrete particles. We simulated by using this mode on the bending failure test of concrete beams.

**Key Words:** *Infinitesimal element model, Nonlinear Dynamic analysis, Plastic deformation*