

ルジャンドル級数を用いたコンプトン CT における投影データの再構成

中山 佳実 尾川 浩一
法政大学大学院工学研究科

本研究はコンプトン CT によって検出されたデータから、光子の線源方向を求め、投影データを映像化することを目的としている。コンプトン CT は従来の放射型 CT の様に、コリメータを用いて光子の飛来方向を制限しないため、コリメータを用いた場合に問題となる感度の低下を改善できるという利点がある。しかし、コンプトン CT で得られた光子の飛来方向は、コンプトン散乱角を頂角とする円錐状の領域ということまでしか限定できない。このようなデータから物体内部の 3 次元画像を再構成するためには、逐次近似的にガンマ線源の分布を求めていく方法と解析的に求めていく 2 種類の方法がある。本論文では、ルジャンドル級数を用いて解析的にガンマ線の飛来方向を求める方法を実装し、評価を行った。

1. まえがき

人体の断面を映像化する SPECT(Single Photon Emission CT)などでは従来、投影データを得るためにコリメータを検出器の前面に設置して、光子の入射する方向を制限し、光子の検出を行っている。これは、機械的コリメーションと呼ばれているが、各方向に放射された光子のうち検出器のある方向に放射された光子以外は検出できないので、検出できる光子が 0.1% にも満たない。このように感度の低い検出器を用いた検査が行われることになるために、画像の映像化に必要な計数を得るため、検査時間が長時間となり患者に大きな苦痛を与えることになる。これに対し、コンプトン CT は機械的なコリメータの代わりに、電気的なコリメーションを用いるものであり、検出効率の改善が期待できる。コンプトン CT では全ての光子を二段階の検出器で検出し、それぞれの検出器で得られる位置とエネルギーから線源方向を求めるものである。しかし、光子の飛来方向は 2 つの検出器を結んだ線に対してある角度をもった円錐上ということまでしか求まらない。このため、画像の再構成は容易ではない。

コンプトン CT における光子の飛来方向の求め方はいくつか提案されている。Singh らは直接逆投影していくような反復的な方法によって再構成する方法を提案した[1]。Cree らはコンプトン CT によって得られたデータを逆変換して線源分布を導き出し、そこから解析的に再構成する方法を提案した[2]。Basko らは円錐表面の投影を Radon 投影に変換することにより再構成を行った[3]。また、Rohe らは、直接的な逆投影方法である SSTA(source Space Tree Algorithm)を提案した[4]。本研究では Parra の提案した方法[5]を用い、実装を行った。この方法は収集された散乱データを逆投影していくことを基本としており、逆投影の際に円錐上の方向の各方向に重み付けをして行くことで線源方向を特定して行く。この重みに関してはコンプトン散乱を起こす確率密度関数から成る式をルジャンドル級数を用いた球調和展開で逆変換し、逆コンボリューションの形にしたものからイベント応答関数として作られる。このイベント応答関数により、単に逆投影するものより正確に投影画像を映像化することができる。

以下、2 章ではコンプトン CT について説明し、線源方向の求め方を 3 章で述べる。4 章ではシミュレーションの方法について述べ、5 章でその結果と考察を行ない、最後に 6 章で結論を述べる。

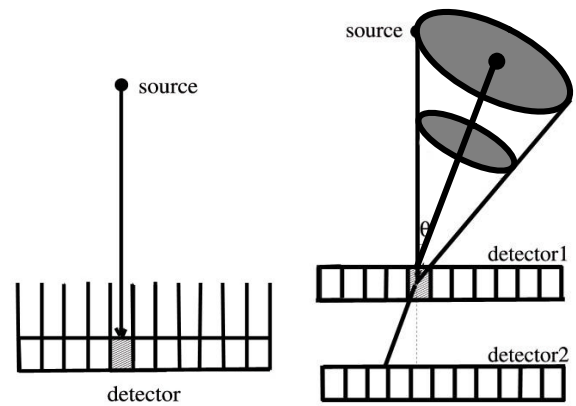


Fig. 1 Detector with a mechanical collimator(left) and Compton CT(right).

2. コンプトン CT

コンプトンカメラシステムにおける光子の検出は、図 1(右)のように二段構えになった検出器を用いて行われる。第一の検出器でコンプトン散乱を起こし検出器にエネルギーを付与し、第二の検出器で光子が光電吸収を起こし消滅する。その際に残りのエネルギーを第二の検出器に付与する。光子一個につき、第一と第二の検出器に入射した位置と付与されたエネルギーをそれぞれ記録するものである。第一と第二の検出器で検出されたエネルギーの合計は光子の持っていた初期エネルギーになる。以下の式からコンプトン散乱の散乱角 θ が求まる。

$$\cos \theta = 1 - \frac{mc^2 E_e}{E(E - E_e)} \quad (1)$$

ここで、 E は初期エネルギー、 E_e は第二の検出器で検出されたエネルギー、 mc^2 は電子の静止エネルギー (511keV) を表している。式(1)はコンプトン散乱を表した Klein-Nishina の公式から導かれる。

3. 線源方向の再構成法

まず、第一の検出器の一つの要素について考える。この要素に光子が入射しコンプトン散乱を起こし第二の検出器へ放射していく様子を以下の式で表すことが出来る。

$$f(\Omega_2, \mathbf{w}_2) = \int g(\Omega_1) h(\cos \mathbf{w}) d(\cos \mathbf{w}_2 - \cos \mathbf{w}) d\Omega_1 \quad (2)$$

光子の線源方向 $\Omega_1 (= (\mathbf{q}_1, f_1))$ から飛来した光子が角度 \mathbf{W}_2 でコンプトン散乱を起こし角度 $\Omega_2 (= (\mathbf{q}_2, f_2))$ の方向へ向かう様子を表した式である。ここで θ は極座標系における仰角、 ϕ は方位角を指している。また、 $g(\Omega_1)$ は線源 Ω_1 方向への投影データ $f(\Omega_2, \mathbf{w}_2)$ は光子が第一の検出器を散乱角 \mathbf{W}_2 で通過し Ω_2 方向へ飛んでいく散乱データである。 $h(\cos \mathbf{w})$ は \mathbf{w} でコンプトン散乱を起こす確率密度関数と比例する微分断面積である。 θ は Ω_1 と Ω_2 のなす角である。また $f(\Omega_2, \mathbf{w}_2)$ は

$$f(\Omega_2) = \int f(\Omega_2, \mathbf{w}_2) d(\cos \mathbf{w}_2) \quad (3)$$

のように $\cos \mathbf{w}_2$ で積分する事により散乱データ $f(\Omega_2)$ が得られる。(2)式を(3)式に代入すると投影データと散乱データの間をコンボリューションの形で表せる。

$$f(\Omega_2) = \int g(\Omega_1) h(\cos \mathbf{w}) d\Omega_1 \quad (4)$$

$\mathbf{w} = \angle \Omega_1 \Omega_2$ であるのでシフトインバリエントな系であることがいえる。

次に、(4)式の逆変換を考える。曲座標系であるのでルジャンドル級数を用いて球調和展開する事によって逆コンボリューションを求めることが出来、以下のように表す。

$$g(\Omega_1) = \int f(\Omega_2) h^{-1}(\cos \mathbf{w}) d\Omega_2 \quad (5)$$

ここで

$$h^{-1}(\cos \mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4p} \right)^2 \frac{P_n(\cos \mathbf{w})}{H_n} \quad (6)$$

$$H_n = \frac{2n+1}{2} \int h(\cos \mathbf{w}) P_n(\cos \mathbf{w}) d(\cos \mathbf{w}) \quad (7)$$

である。 $P_n(\cos \mathbf{w})$ はルジャンドル級数である。

また、散乱データ $f(\Omega_2, \mathbf{w}_2)$ をこの章の初めて述べた検出器のある要素から Ω_2 方向中心の \mathbf{w}_2 方向へ単位球上に逆投影する(図3)。式に示すと以下のようなになる。

$$g'(\Omega'_1) = \iint f(\Omega_2, \mathbf{w}_2) d(\cos \mathbf{w}_2 - \cos \mathbf{w}') d(\Omega_2) d(\cos \mathbf{w}_2) \quad (8)$$

$g'(\Omega'_1)$ は逆投影の累積データである。

逆投影 $g'(\Omega'_1)$ は点広がり関数 $h_{bp}(\cos \mathbf{w}_1)$ を用いて次のようなコンボリューションの式で表せる。

$$g'(\Omega'_1) = \int g(\Omega_1) h_{bp}(\cos \mathbf{w}_1) d\Omega_1 \quad (9)$$

ここで $\mathbf{w}_1 = \angle \Omega_1 \Omega'_1$ である。式(9)は式(4)-(5)と同様にルジャンドル級数を用いて球調和展開でき、

$$g(\Omega_1) = \int g'(\Omega'_1) h_{bp}^{-1}(\cos \mathbf{w}_1) d\Omega'_1 \quad (10)$$

と表せる。式(10)に式(8)を代入してまとめる。

$$g(\Omega_1) = \iint f(\Omega_2, \mathbf{w}_2) R(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2) d\Omega_2 d(\cos \mathbf{w}_2) \quad (11)$$

$R(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2)$ はコンプトン散乱に対するイベント応答関数である。式の詳細は以下に示す。

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4p} \frac{1}{H_n} P_n(\cos \mathbf{w}_2) P_n(\cos \mathbf{w}) \quad (12)$$

$$H_n = \int_{\mathbf{w}_1}^{\mathbf{w}_2} \mathbf{s}(\mathbf{w}) P_n(\cos \mathbf{w})^2 d\mathbf{w} \quad (12)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{w}) = \frac{g_0^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \mathbf{w}}{\{1 + g(1 - \cos \mathbf{w})\}^2}$$

$$\left[1 + \frac{g^2(1 - \cos \mathbf{w})^2}{(1 + \cos^2 \mathbf{w})\{1 + g(1 - \cos \mathbf{w})\}} \right] \quad (14)$$

$$P_n(\cos \mathbf{w}) = \frac{4p}{2n+1} \sum_{m=-n}^{m=n} Y_{nm}^*(\Omega_1) Y_{nm}(\Omega_2) \quad (15)$$

$$Y_{nm}^*(\Omega) = (-1)^m \left[\frac{(2n-1)(n-m)!}{4p(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \mathbf{w}) e^{im\phi} \quad (16)$$

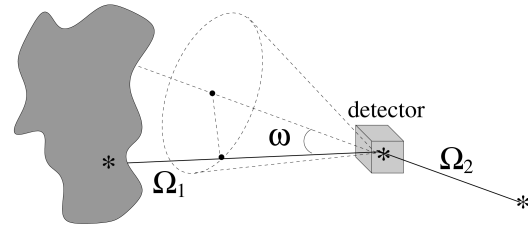


Fig. 2 Projection of Compton scattering event.

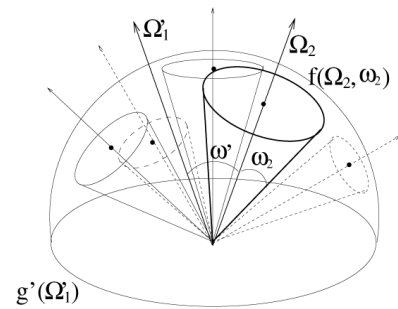


Fig. 3 Summation image of the backprojection.

4. シミュレーション

3章で示した理論で投影画像が得られるかを確かめるためにシミュレーションを行った。最初に $R(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2)$ を作成した。そのためにはルジャンドル関数の数値化から開

始しなければならない。式(15)-(16)を再帰方程式に書き換えたものが次式である[6]。ここで $P_0(x)=1, P_1(x)=x$ である。

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - p_{n-2}(x) - \frac{xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)}{n} \quad (17)$$

また、式(13)-(17)の該当する値を以下の表 1 のように設定した。

Table 1 Parameter values.

n	200
r_0 (古典電子半径)	1
(初期エネルギー/静止エネルギー)	141.0/511.03
θ_{min} (最小散乱角)	0
θ_{max} (最大散乱角)	90
	1° 毎

以上の条件で $R(w, w_2)$ を生成したグラフを図 4 に示す。次に、式(11)を計算できるように離散化する。各検出器にこの式を適用することになり単純に計算すると大変時間がかかってしまうが、散乱データは光子を一つ一つ検出したものである。光子は 1 と考えられるから、イベント応答関数の対応する値を光子の個数だけ合計していくことになる。

$$g(\Omega_1) = \sum_{n=1}^N R(w^n, w_2^n) \quad (18)$$

検出器のジオメトリを図 5 に示す。この $z=0$ の面上に線源を置いてそこから光子をモンテカルロシミュレーションによって放射させ、各検出器で検出した。シミュレーションで用いたガンマ線源の分布を図 6 で示す。線源は 0~1 画素が図 7(左)、2~3 画素が図 7(右)のようにした。表 2 の条件でシミュレーションを行い、飛来方向を求め、各方向の投影画像を生成した。

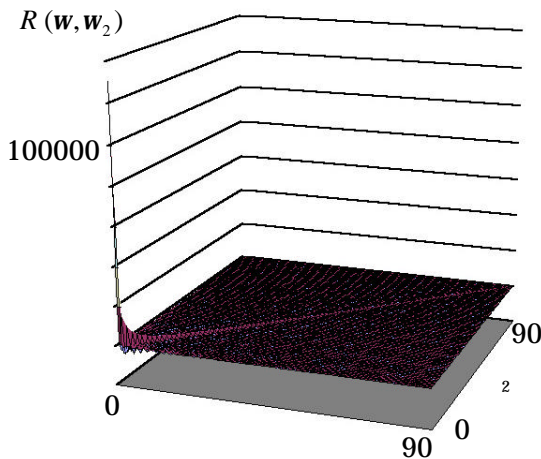


Fig. 4 Point spread function of Compton scattering event.

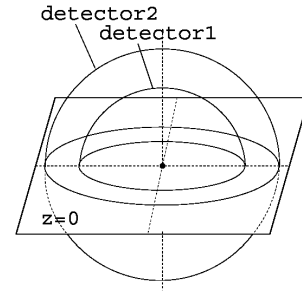


Fig. 5 Detectors.

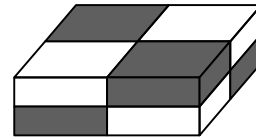


Fig. 6 Source distribution



Fig. 7 Original images((left:0-1pixel, right:2-3pixel)

Table 2 Condition of Simulation.

コンプトン CT	球状 (半径 9cm、12 cm) (<42°)
原画像	図 6(1cm × 1cm × 0.5cm)
光子数	500 万個
初期エネルギー	141keV
投影方向	$z > 0$
検出器 1	コンプトン散乱
検出器 2	光電吸収
投影画像	6° おき 16 × 16 cm 128 × 128pixel

5. 結果と考察

図 8 に得られた投影画像のうち今回結果として載せた方向を示す。正確な方向はそれぞれ、極座標表示(,) deg で a: (3,3)、b: (21,3)、c: (39,3)、d: (39,45)、e: (39,93)、f: (39,183)である。図 9 に示した結果は(a)~(f)の方向の理想画像(左)、シミュレーションから求めた投影画像(中)、到達光子を 1%(50000 個)に制限した投影画像(右)である。1 章で述べたようにコリメータを用いると通過できる光子は大変少数になってしまう。そこで結果画像に対する比較対象として、コンプトン CT を用いずコリメータによって方向を制限したように光子を 1% に制限した投影画像を用意した。

理想画像と比べると精度は落ちるがどの結果からも画

像中の濃淡の差など特徴が読み取れる。この映像化によってコリメータを用いるよりもコンプトン CT の感度がよいことがはっきりと言える。投影画像は角度ごとにとっており、上部は光子の通過できる面積が小さくなるために検出光子数も少ないので画像がはっきりしない(図9(a))。また、周りのノイズは逆投影の軌道上にできたものである。

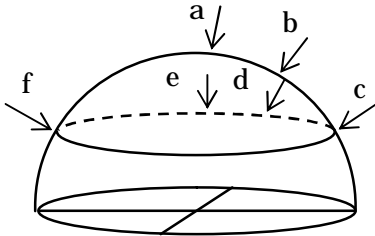


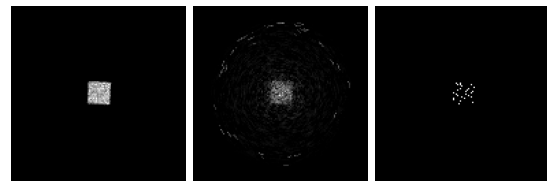
Fig. 8 Projection angles.

6. むすび

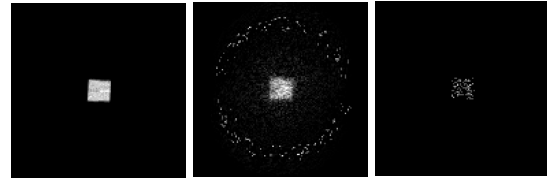
本研究ではコンプトン CT における投影データを解析的に再構成する手法を実装し、コリメータを装着して得られる投影データとの画質の比較を行った。具体的には、コンプトン CT のデータをルジャンドル級数の球調和展開による逆変換を用いた逆投影で線源方向を求めて投影画像を生成した。シミュレーション結果からコリメータを用いて作られた投影画像より感度を向上させることができた。すなわち、コンプトン CT では捨てられる光子がほとんどなくなるために感度が向上し、これは効率的な光子収集の手段であると考えられる。

参考文献

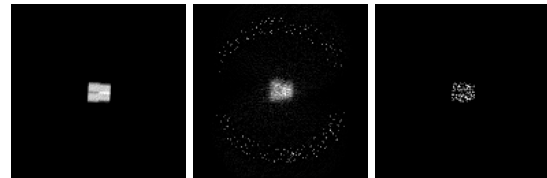
- [1] M. Singh, and D. Dori, "An electrically collimated gamma camera for a single photon computed tomography. Part II: Image reconstruction and preliminary experimental measurement," *Med Phys*, vol.10, no.4, pp.428-435, 1983.
- [2] M. J. Cree, and P. J. Bones, "Towards direct reconstruction from a gamma camera based on Compton scattering," *IEEE Trans Med Imag*, vol.13, no.2, pp.398-407, 1994.
- [3] R. Basko, G.T. Gullberg, and G. I. Zeng, "Application of spherical harmonics to image reconstruction for the Compton camera," *Phy Med Biol*, pp.887-894, 1998.
- [4] R. C. Rohe, M. M. Sharifi, K. A. Kecevar, and C. Bonnerave, "The spatially variant backprojection point kernel function of an energy-subtraction Compton camera for medical imaging," *IEEE Trans. Nucl Sci*, vol.44 no.6, pp.2477-2482, 1997.
- [5] L. C. Parra, "Reconstruction of cone-beam projection from Compton scattered data," *IEEE Transactions of Nuclear Science*, vol. 47, no. 4, pp. 1543-1550, Aug, 2000.
- [6] T. Tomitani and M. Hirasawa, "Analytical Image Reconstruction of Cone-beam Projections from Limited-angle Compton Camera Data," *IEEE Transactions of Nuclear Science*, Submitted, 2003.



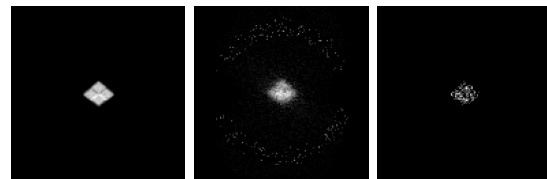
(a) $\theta=3^\circ$, $\phi=3^\circ$



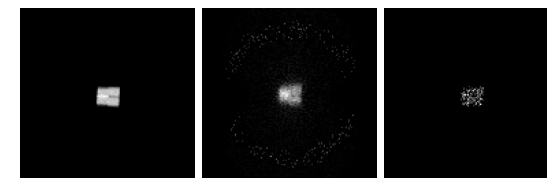
(b) $\theta=21^\circ$, $\phi=3^\circ$



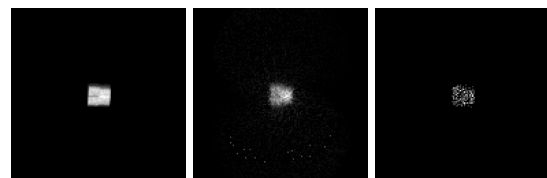
(c) $\theta=39^\circ$, $\phi=3^\circ$



(d) $\theta=39^\circ$, $\phi=45^\circ$



(e) $\theta=39^\circ$, $\phi=93^\circ$



(f) $\theta=39^\circ$, $\phi=183^\circ$

Fig. 9 Simulation results.

キーワード.

コンプトン CT、ルジャンドル級数、画像再構成、コリメータ

Summary.

Reconstruction of projection data with Legendre polynomials in Compton CT

Yoshimi Nakayama Koichi Ogawa
Graduate School of Engineering, Hosei University

This paper investigates Compton computed tomography(CT) imaging. Compton CT has an advantage in detection efficiency of gamma rays compared with the conventional data acquisition method with a collimator. However we have to decide the direction of gamma rays with the information in two detectors used in Compton CT. To solve the problem we implemented Parra's analytical reconstruction method with Legendre polynomials. Simulation results showed that the reconstructed projection data with this analytical method were superior to the conventional data collection method with a collimator.

Keywords.

Compton CT, Legendre polynomials, image reconstruction, collimator