

# モード解析によるテニスラケットの振動特性と構造最適化の研究

大館 淳

法政大学大学院工学研究科機械工学専攻

岩原 光男 鈴木 芳 長松 昭男

法政大学工学部機械工学科

実験モード解析を用いてテニスラケットの振動特性を解明し、模型テニスラケットとしたアルミ板に対し反共振点移動理論を使い構造最適化を試行する。実験は上級者用と初級者用の2種類のラケットを使用し、加速度ピックアップを固定しインパルス・ハンマを移動して48点の応答を得てモード特性を同定し、実打時とボール落下実験の現象を説明する。模型テニスラケットとしたアルミ板の周囲に質量を取り付け、反共振点移動理論によりその質量を変えることで実験において最も振動の大きかった1次の固有振動数に対し共振峰消去の構造最適化を行なった。

## 1. 緒言

快適性や環境との調和がますます重要視される今日において、自動車や電化製品など、工業製品の発生する振動・騒音の人体に与える身体的、心理的影響を考慮することが必要不可欠である。

振動問題を解決するには、対象物の振動特性を正確に把握する必要がある。このためには有限要素法等の理論解析とともに振動実験を実施することが不可欠である。振動実験において最近発展を遂げているのが、実験モード解析である。

実験モード解析は、実物や模型の振動実験で得られたデータから周波数応答関数を求め、実物や模型を数学的にモデル化し、固有振動数・固有モード・モード減衰比を求める一連の解析のことを言う。

現在は数多くの製品がエンジニアの経験と勘により設計され、試作と実験を繰り返すことにより開発されている。今後さらに厳しくなる設計条件を満たし、振動問題を設計開発の段階で予知して対策するため、および開発時間を短縮するために、実験と計算により振動特性を解明し向上させることを目的としている。

今回は身近に使われているテニスラケットを使用し、振動特性が人に与える影響を研究する。まず、実際に球を打った際の振動を実測する。加速度ピックアップは人体に影響する場所としてグリップエンドに接着し、テニスラケットは初級者用と上級者用を比較した。次に、ボール落下実験を行い、実打時の現象を再現した。この実験では実打より詳細にデータを得ることができる。実験モード解析を2種類のテニスラケットに適用し、固有振動数・固有モード・モード減衰比を求め、上記2つの実験結果を説明する。

固有モードの節位置が重要な要因であることを示し、節位置移動の検討を行う。模型テニスラケットとしてアルミの単純板を用い、反共振点理論を使って汎用有限要素法プログラムを用いて反共振点を算出する。また、反共振点を利用する構造最適化を行う。

## 2. 実打試験

### 2.1 実験方法

実際に人間がラケットを持ち実際にボールを打ったときの振動を計測する。図1のようにグリップエンドに加速度ピックアップを取り付け、その振動を測定しFFTアナライザを使用し信号処理を行ってグラフ化した。



Fig.1 The position of the acceleration pickup

### 2.2 実験結果

図2に初級者用ラケット、図3に上級者用ラケットの実打時の振動のグラフを示す。

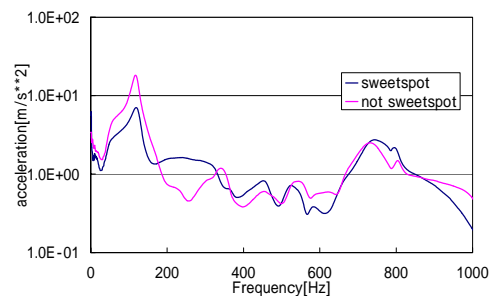


Fig.2 Vibration in striking the sphere for beginner

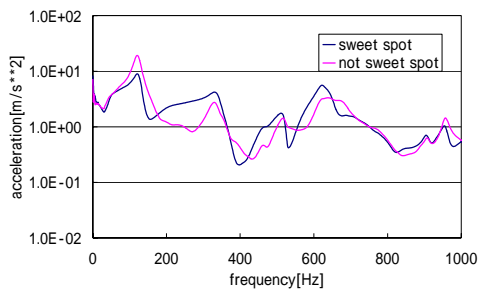


Fig.3 Vibration in striking the sphere for superior

図はラケットの sweet spot で打ったとき、わざと sweet spot をはずして打ったときの振動のグラフである。初心者用ラケットでは 150Hz 付近に振動のピークがあり、370Hz 付近では sweet spot をはずして打ったときのみにピークがあることがわかる。上級者用ラケットでは、どちらで打った場合の振動も 130Hz、340Hz 付近にピークが見られる。

### 3. ボールの落下試験

#### 3.1 実験方法

まず図 4 のようにやわらかいスポンジにラケットをさみ自由支持状態を作る。そして、面の上から 30cm の高さからボールを落とし、そのときに起こった振動を FFT アナライザを使用して信号処理を行い、グラフ化した。



Fig.4 Experiment of dropping ball

#### 3.2 実験結果

図 5 に初心者用ラケットの図 6 に上級者用ラケットのボール落下時の振動のグラフを示す。

ラケットの面の 5 箇所にボールを落とし、その時の振動を計測した。

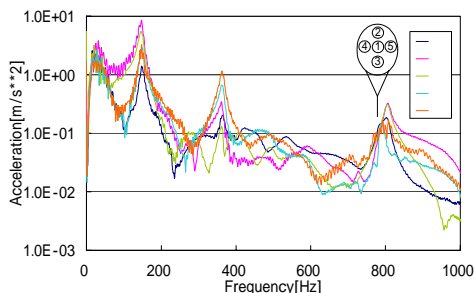


Fig.5 Vibration in dropping the ball for beginner

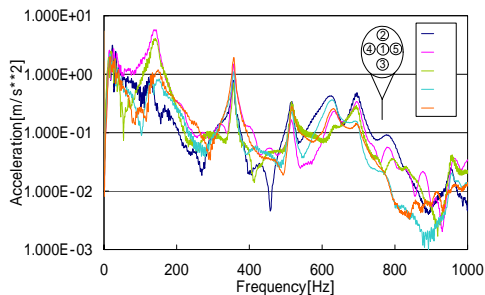


Fig.6 Vibration in dropping the ball for superior

初心者用ラケットではどの場所でも 150Hz、370Hz 付近に大きなピークを見ることができる。150Hz 付近では小さく、370Hz 付近では大きく振動が得られた。同様に上級者用ラケットでは 130Hz 付近と 360Hz 付近に大きなピークが現れた。

同様に上級者用ラケットでは 130Hz 付近と 360Hz 付近に大きなピークが現れた。

### 4. 実験モード解析

#### 4.1 支持条件の違い

まず始めに実験モード解析で支持条件の違いによる差を検証した。図 7 はその差を表したグラフである。横軸が自由支持、縦軸が手で握って実験を行った時の固有振動数である。

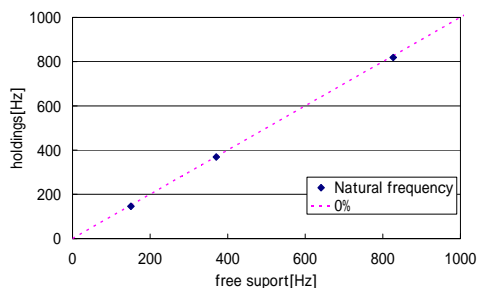


Fig.7 The difference by the support condition

図 7 より自由支持でも手で握ったときでも固有振動数はほぼ変わらない結果が出た。そこで今回の実験は自由支持で行うことにする。モード減衰比は手で握ったときのほうが大きくなった。

#### 4.2 実験方法

実験モード解析手法として非線形最適化法が提案されている。非線形最適化法は周波数領域法である偏分反復法を正確に多点応答に拡張したものである。この手法を使い実験対象のモード特性を求める。また、非線形最適化法を使いやすくするために MATLAB 言語を使用して構築した実験モード解析システムを使用した。本研究で使用した実験モード解析の流れを図 8 に示す。

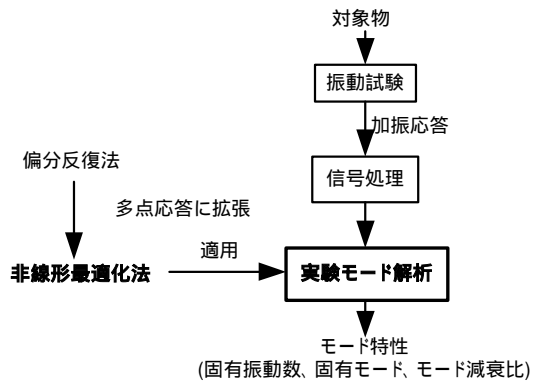


Fig.8 Experiment modal analysis of this study

テニスラケットを細い糸で吊るすことにより自由支持状態を作った．実験の様子を図9に示す．



Fig.9 Situation of experiment modal analysis

打撃試験は、加速度ピックアップを1点に固定しインパルス・ハンマで1点ずつ移動して叩き、FFTアナライザを用いて応答を得るといふ加振点移動という形で行った．試験は5回平均で行い、3軸の加速度ピックアップによって3方向に応答を測定した．

#### 4.3 実験結果

実験モード解析システムによりモードアニメーションを見ることができる．以下の図10,11に同定により得られた初心者用ラケットの第1次、第2次の固有モード形状を、図11,12に上級者用ラケットの第1次、第2次の固有モード形状を示す．また、初心者用ラケットの固有振動数及び減衰率を表1に、上級者用ラケットの固有振動数及び減衰率を表2に示す．



Fig.10 Experiment Mode Shape No.1 for beginner

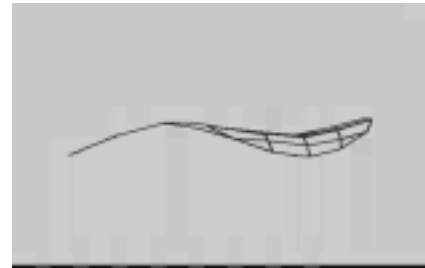


Fig.11 Experiment Mode Shape No.2 for beginner



Fig.12 Experiment Mode Shape No.1 for superior

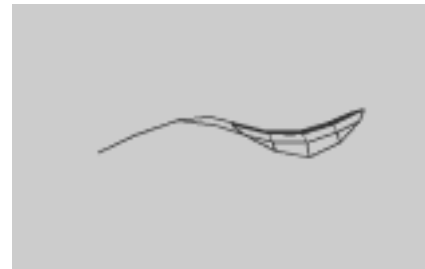


Fig.13 Experiment Mode Shape No.2 for superior

Table 1 Eigenvalue for beginner

mode No.	natural frequency [Hz]	damping ratio
1	149.8	1.16%
2	367.7	1.34%

Table 2 Eigenvalue for superior

mode No.	natural frequency [Hz]	damping ratio
1	130.9	4.73%
2	363.2	0.44%

実打試験の結果から初心者用ラケットでは sweet spot から外れて球を打った場合のみ 370Hz 付近にピークが出た。よって第 2 次固有モードは sweet spot から外れて打った場合に起きる振動であると推定できる。

ボールの落下試験からは、初心者用、上級者用共に第 1 次モードでは が小さく で大きな振動が得られ、第 2 次モードでは で小さく で大きな振動が得られた。これは実験モード解析によって得られた固有モードの振幅大小と一致した。実験モード解析で得られた固有モード振幅の小さい場所ほどグリップエンドの振動が小さくなる傾向がある。

## 5. 反共振点移動理論を用いた構造最適化

### 5.1 共振点と反共振点の計算

テニスラケットは様々な材料を組み合わせられており、また、複雑な形状をしているために正確なモデル化が困難である。

そこで本研究では模型テニスラケットとしてテニスラケットと同じ一次の固有振動数を持った単純板を用いてモデル化し、NASTRAN による計算から共振点と反共振点を求める。

### 5.2 計算結果

図 14 に今回得ることができた反共振点を示す。

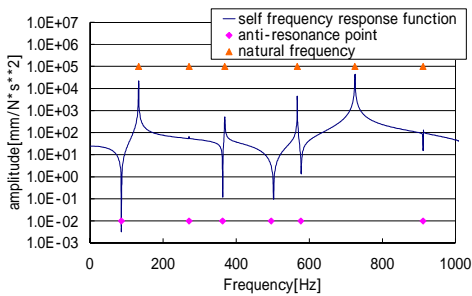


Fig.14 Calculation result of the anti-resonance point

今回、MSC/NASTRAN による計算で自己周波数応答関数の底部と一致する反共振点の計算結果を得ることができた。

### 5.3 質量の構造最適化

反共振点移動理論とは反共振点を共振点に近づけることにより、モードの節位置を変化させることができるという理論である。

まず、NASTRAN の計算により最適化したい項目について、その場所をどれだけ変化させればいいのかという感度  $\partial f / \partial m$  が計算できる。この感度を使用し、目標とする周波数を求める。

現在の周波数を  $f_0$ 、目標とする周波数を  $f$  とすると、1 つの場所を変化させるためには、

$$f = f - f_0 = m \cdot \frac{\partial f}{\partial m} \quad (1)$$

ここで、 $m$  が求めたい変化量である。実際には  $n$  個の場所を変化させ構造最適化するので、

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (2)$$

となる。

共振点の周波数を  $f_R$ 、反共振点の周波数を  $f_U$  とすると、

$$f_R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_R}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (3)$$

$$f_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (4)$$

である。

また、構造最適化のためには共振点と反共振点の周波数が一致するので、

$$f_R + f_U = f_U + f_U$$

$$f_R - f_U = f_U - f_R$$

$$\therefore f_U - f_R = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \right) \cdot m_i \quad (5)$$

ここで  $\frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} = a_i$  とおくと、擬似最小二乗法より、

$$\{ m \} = \{ a \} \cdot \left[ \{ a \}^T \cdot \{ a \} \right]^{-1} \cdot (f_U - f_R) \quad (6)$$

式(6)から算出される  $\{ m \}$  は、もとの値  $m_0$  よりも大きくなりすぎてしまい計算誤差が大きくなってしまいます。そこで今回は

$$b \cdot \left| \frac{m_i}{m_0} \right|_{\max} = 1.8 \quad (7)$$

となるような定数  $b$  を  $\{ m \}$  にかけて使用する。ここで基準値 1.8 は計算誤差がほとんどない範囲内にある。

アルミ板の周囲 36ヶ所に 1.0g の質量を付け、その質量を変えていくことで実験によって最も振動が大きいことがわかった第 1 次モードにおいて加振応答点を節にすることにした。図 15 に構造最適化した質量の分布を示す。

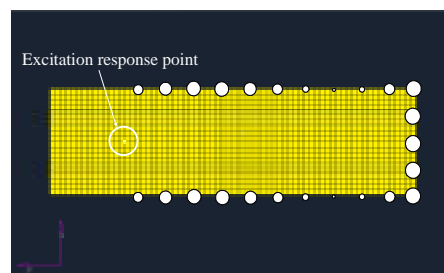


Fig.15 Mass distribution

円の面積の大きい部分が質量の大きいことを表し、構造最適化後の質量は最大で 42.9g、計 635g となった。モデルの質量が 4.24kg なので、これは約 15% の質量となった。

また、構造最適化を行う際に補正值を使用し、繰り返し計算から得られた周波数応答関数を図 16 に示す。

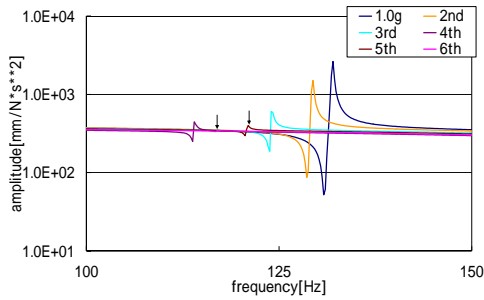


Fig.16 Frequency response function of mass change

今回の計算では3回目から4回目が離れているが、これは前述の補正値が大きく、求めたい周波数をすぎてしまったためと考えられ、補正値を小さくしたところ5回目のようになり6回目の計算でほぼピークを消すことができた。

#### 5.4 板厚の構造最適化

次に板厚に対して構造最適化を行った。図17に構造最適化の結果を示す。最も厚い部分が14.11mm、最も薄い部分が9.45mmとなりその違いを色の濃淡で7段階に表した。

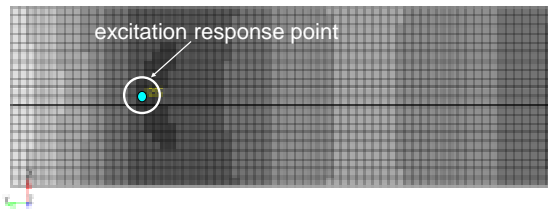


Fig.17 Thickness distribution of the model

計算で得られた周波数応答関数を図18に示す。

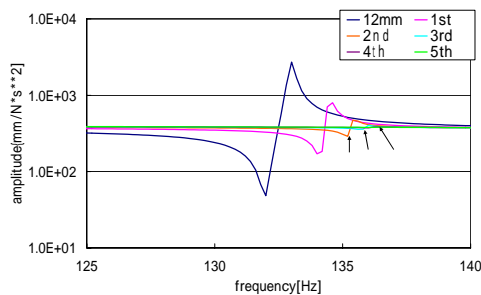


Fig.18 Frequency response function of thickness change

質量の最適化とは違い、共振点の周波数は高くなり最終的には5回目の計算で共振点を消すことができた。また、板厚を変数とした場合には計算誤差を起こさない程度の変化量だったので式(7)のような補正値を使わずに計算を行った。

## 6. 結論

1. 実打試験から初心者用ラケットでは sweet spot から外れて打った場合には第2次モードが現れることがわかった。
2. ボールの落下試験では初心者用、上級者用共にラケットの面のそれぞれの場所で振動の大きさが異なり、実験モード解析の結果とも一致する振動が得られた。
3. MSC/NASTRAN により反共振点の計算ができ、自己周波数応答関数とも一致することが確認できた。
4. ある1点の加振応答点に対して、第1次モードを節にするという構造最適化をアルミ板周囲の質量とその板厚に対し行うことができた。

## 参考文献

- [1]長松昭男,「モード解析入門」,1993年,コロナ社.
- [2]梶原・ほか3名,機論,54-505,C(昭63),2084.
- [3]石渡輝行・ほか2名,法政大学計算科学研究センター研究報告,16,35-40,2003年.
- [4]石井孝志・ほか2名,法政大学計算科学研究センター研究報告,16,41-46,2003年.

キーワード

振動, モード解析, 反共振点, 構造最適化

---

Summary.

**The Research of Vibration Characteristic and Structural Optimization  
of Tennis Racket by the Modal Analysis**

Jun Odate

Graduate School of Engineering, Hosei University

Mitsuo Iwahara Kaoru Suzuki Akio Nagamatsu

Department of Mechanical Engineering, Hosei University

The purpose of this research is that clarifies and improves the vibration characteristic by experiment and calculation in order to do the countermeasure of the vibration problem by predicting in the design development and to shorten the development time. This study compares and examines the vibration in the case in which the ball was struck actually and was dropped with the experimental mode analysis using familiarly used tennis racket. It was proven that most large vibration had been generated at the first mode. It was possible to make the excitation response point to be a knot at the mode by the structural optimization of plate thickness and the mass given to the circumference.

Keywords.

Vibration, Modal Analysis, Anti-Resonance point, Structural Optimization