

# テニスラケットの実験モード解析と構造最適化

鈴木 芳  
法政大学工学部機械工学科

大館 淳  
法政大学大学院工学研究科機械工学専攻

岩原 光男 長松 昭男  
法政大学工学部機械工学科

実験モード解析によりテニスラケットの固有振動数・固有モード・モード減衰比を求める。次にボールの落下実験を行い実打時の現象を再現し、実験モード解析と比較する。実験モード解析とボールの落下試験の結果をもとに、汎用有限要素法プログラムにより共振点と反共振点を算出し、それぞれの感度を用いた構造最適化を行う。

## 1. 結論

快適性や環境との調和がますます重要視される今日において、自動車や電化製品など、工業製品の発生する振動・騒音の人体に与える身体的、心理的影響を考慮することが必要不可欠である。

振動問題を解決するには、対象物の振動特性を正確に把握する必要がある。このためには有限要素法等の理論解析とともに振動実験を実施することが不可欠である。振動実験において最近発展を遂げているのが、実験モード解析である。

実験モード解析は、振動試験によって周波数応答関数を実験的に求め、その中に含まれる系の動的な性質をモード特性の形で抽出する一連の方法である。

本研究では実験モード解析によりテニスラケットの固有振動数・固有モード・モード減衰比を求める。次にボールの落下実験を行い実打時の現象を再現し、実験モード解析と比較する。テニスラケットは様々な材料が混ざってモデル化が困難なため、模型テニスラケットとしてアルミの単純板を用い、汎用有限要素法プログラムにより共振点と反共振点を算出し、それぞれの感度を用いた構造最適化を行う。

## 2. 実験モード解析

実験モード解析手法として非線形最適化法が提案されている。非線形最適化法は周波数領域法である偏分反復法を多点応答に拡張したものである。この手法を使い実験対象物のモード特性を求める。また、非線形最適化法を使いやすくするために MATLAB 言語を使用して構築した実験モード解析システムを使用した。

本研究で使用した実験モード解析の流れを図 1 に示す。

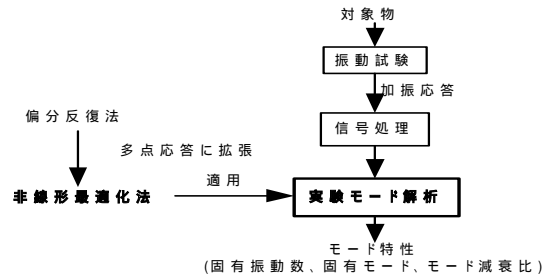


図.1 実験モード解析

打撃試験は、加速度ピックアップを 1 点に固定しインパルス・ハンマで 1 点ずつ移動して叩き、FFT アナライザを用いて応答を得るといった多点加振・単点応答という形で行った。

試験は支持条件を自由支持状態とし、加振は 5 回平均で行い、3 軸の加速度ピックアップによって 3 方向の応答を測定した。

実験モード解析システムにより、モードアニメーションを見ることができる。図 2.3 に初心者用ラケットの第 1 次、第 2 次の固有モード形状を、図 4.5 に上級者用ラケットの第 1 次、第 2 次の固有モード形状を示す。

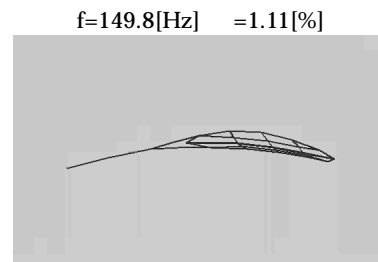


図.2 初心者用ラケットの第 1 次固有モード

f=367.7[Hz] =1.2[%]

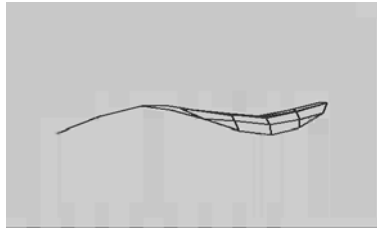


図.3 初心者用ラケットの第2次固有モード

$f=131.2[\text{Hz}] \quad \approx 3.85[\%]$

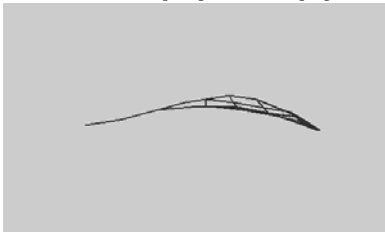


図.4 上級者用ラケットの第1次固有モード

$f=363.3[\text{Hz}] \quad =0.443[\%]$

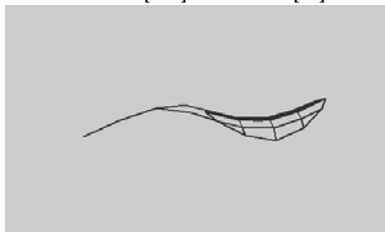


図.5 上級者用ラケットの第2次固有モード

### 3. ボールの落下試験

図6の様にラケットをやわらかいスポンジではさみ自由支持状態を作る。からの場所に面の上から30cmの高さからボールを落とし、そのときに起こった振動をFFTアナライザを使用して信号処理を行いグラフ化した。



図.6 ボールの落下試験

図7に初心者用ラケット,図8上級者用ラケットのボール落下時の振動のグラフを示す。

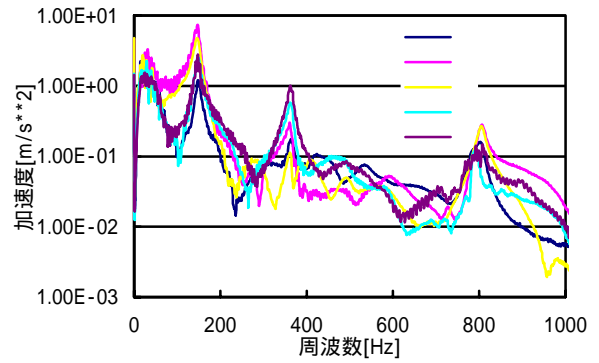


図.7 初心者用ラケットのボール落下実験

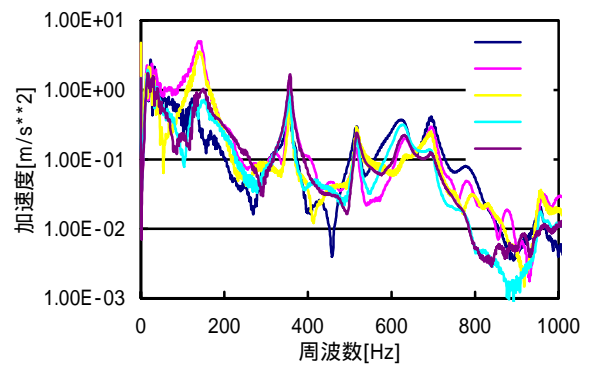


図.8 上級者用ラケットのボール落下実験

初心者用ラケットでは150Hz,370Hz付近に大きなピークを見ることができる。150Hz付近でが大きくが小さな振動、370Hz付近でが大きくが小さな振動が得られた。また、上級者用ラケットでは130Hz,360Hz付近に大きなピークが現れ、130Hz付近では大きくが小さな振動、360Hz付近では大きくが小さな振動が得られた。これは実験モード解析によって得られた各固有モードと一致しており、両ラケットとも第1次の固有モードでは、第2次固有モードでは、第1次固有モードでは、第2次固有モードではの振動の影響が大きいと思われる。

### 4. 反共振点を利用する構造最適化

#### 4.1 反共振点の算出法

図9の2自由度不減衰系において、質量 $m_1$ を加振応答点とし強制振動させた時の質量 $m_1$ の自己周波数応答関数における反共振点を考える。

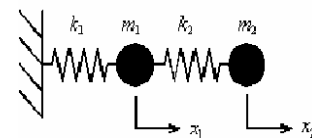


図.9 2自由度不減衰系

質量 $m_1, m_2$ おける力のつりあいは式(1),式(2)となる

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

式(1), (2)を行列とベクトルで表せば

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。2自由度系の運動方程式の解を複素指数関数の形で仮定して

$$x_1 = X_1 e^{j\omega t} \quad x_2 = X_2 e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $X_1$ と $X_2$ は振幅であり、時刻  $t$  に無関係である。式(4)を2回微分して

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 e^{j\omega t} \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(4)と式(5)を式(2)に代入して、 $e^{j\omega t}$ で両辺を割ると

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$X_1$ について解くと

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2)F}{(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 m_2 + k_2) - k_2^2} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。質量 $m_1$ の反共振点の振動数は振幅 $X_1$ がゼロのときの振動数で

$$\omega = \sqrt{k_2 / m_2}$$

である。ここで、質量 $m_1$ を固定したときの固有振動数を考えると、このときの運動方程式は

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = F e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots(8)$$

先ほどと同様に $x_2$ を置き換えて解くと

$$(-\omega'^2 m_2 + k_2) X_2 = F \quad \dots\dots\dots(9)$$

となり、固有振動数は

$$\omega' = \sqrt{k_2 / m_2}$$

となり式(7)の反共振点と同じになる。

このことより、2自由度系の反共振点は加振応答点を固定したときの固有振動数である。多自由度系においては、式(6)の係数行列の加振・応答点の行成分と列成分を取り除いた余因子行列 = {0}の固有値方程式を解くことで反共振点を求めることができる。

#### 4.2 構造最適化

一般の多自由度系モデルのある固有モードにおいて、加振・応答点の位置がモードの節になると、その点を固定しないときの固有振動数(共振点)と、その点を固定したときの固有振動数(反共振点)が一致し共振峰が消える。この理論を用いて、テニスラケットの第1次固有モードと同じ周波数で第1次固有モードを持つアルミの単純板の有限要素モデルを使い、設計変数を質量とした場合と板厚とした場合の2通りで共振点・反共振点の感度をMSC/NASTLANにより算出し、構造最適化を行った。設計変数を求める計算は以下の式により求めた。

$$\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial r_1} r_1 + \dots + \frac{\partial \Omega}{\partial r_n} r_n = \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial r_1} r_1 + \dots + \frac{\partial \Gamma}{\partial r_n} r_n \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\Omega = \left\{ \frac{\partial \Omega_1}{\partial r_1} \dots \frac{\partial \Omega_n}{\partial r_n} \right\} \{ r \} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\Gamma = \left\{ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial r_1} \dots \frac{\partial \Gamma_n}{\partial r_n} \right\} \{ r \} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$\Omega$  : 共振点

$\Gamma$  : 反共振点

$r$  : 設計変数

設計変数が質量としたときは、{  $r$  }をそのまま使用すると計算誤差が大きくなるため。

$$\left| \frac{\{ r \}}{\{ r \}} \right| = 1.8$$

となるように、補正値を掛け最適化を行った。

使用した有限要素モデルの形状は 200mm × 690mm × 12mm で、設計変数が質量のモデルは接点数 5,880、要素数 4,140、六面体要素、板厚のモデルは接点数 1,470、要素数 1,380、四角形の板要素を使用している。

有限要素モデルを図 10 のようにテニスラケットにみたて、ラケット面の中心に加振応答点を取り、その点を第1次固有モードの節にすることを目標とし構造最適化を行った。

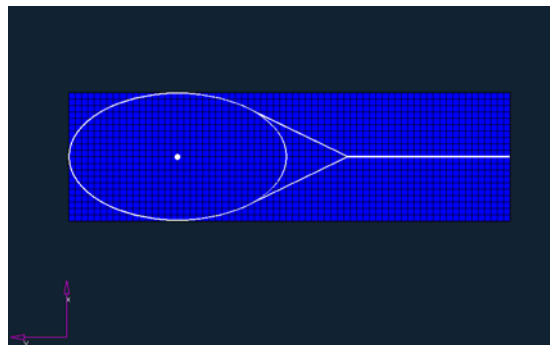


図.10 加振・応答点

加振応答点における自己周波数応答関数を図 11 に示す。

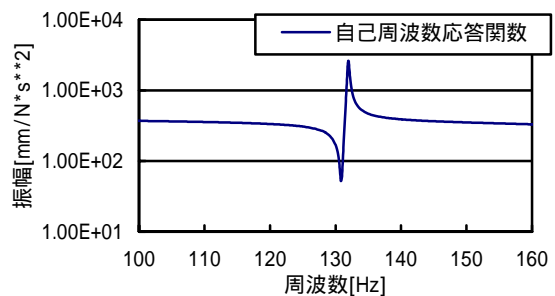


図.11 自己周波数応答関数

設計変数を質量とした場合は6回、板厚とした場合は4回の繰り返し計算により加振応答点の共振点と反共振点が一致し、加振応答点を節にすることができた。それぞれの繰り返し計算による共振点・反共振点の周波数の変化のグラフを図 12,13 に、自己周波数応答関数の変化のグラフを図 14,15 に示す。凡例の数字は繰り返し計算の

回数を表す。また、最適化前と最適化後の変位の比較を図 16,17 に示す。

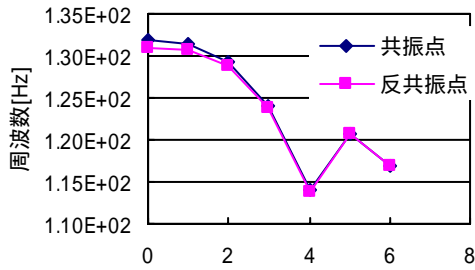


図.12 設計変数が質量の繰り返し計算結果

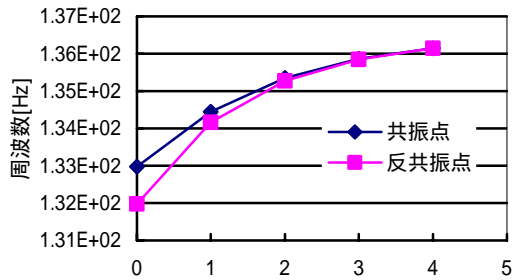


図.13 設計変数が板厚の繰り返し結果

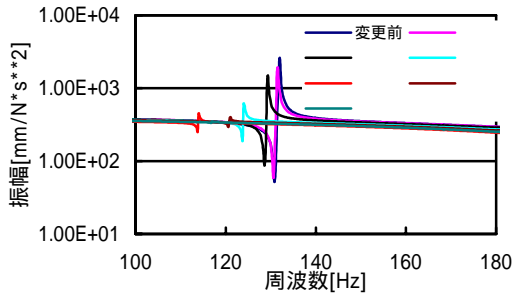


図.14 設計変数が質量の周波数応答関数の変化

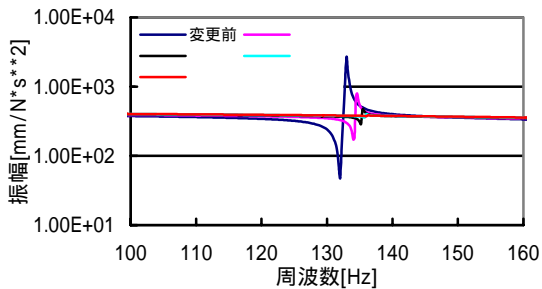


図.15 設計変数が質量の周波数応答関数の変化

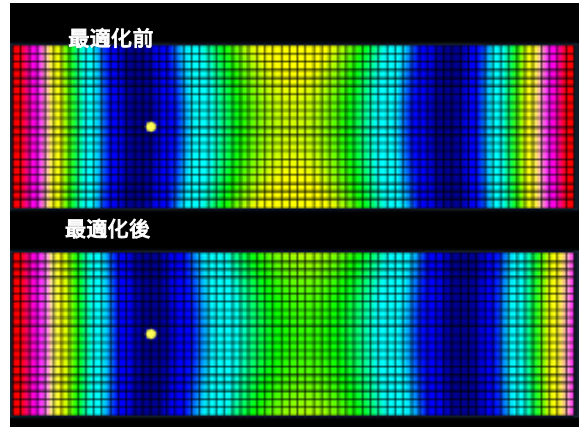


図.16 変位の比較(設計変数を質量)

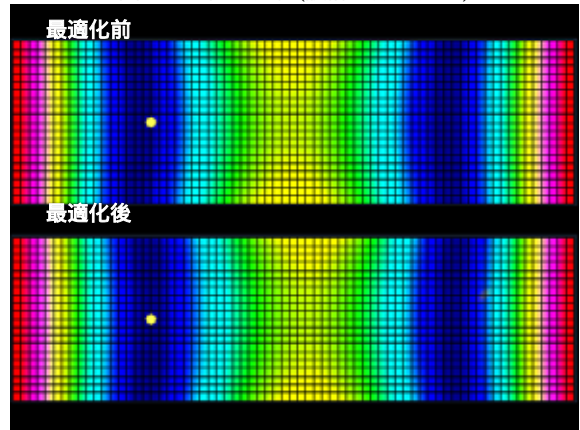


図.17 変位の比較(設計変数を板厚)

設計変数を質量とした場合は、節の幅が少し広がり変位が全体的にグリップ方向に移動しているのに対し、板厚の場合は加振応答点付近の節だけが移動している。

#### 4. 結論

設計変数を質量とした場合と、板厚にした場合の両方で加振・応答点の共振点と反共振点を一致させることができた。

また、設計変数の違いにより共振点・反共振点の変化のしかたが異なり、設計変数を板厚にする方が少ない計算回数でグリップ側には影響を与えずに共振点と反共振点が一致することができ、質量だけの場合より効率的であることがわかった。

今後の課題として、最適化後と同じアルミ板を実際に作り実験モード解析を行い加振応答点の位置がモードの節になっているか調べる。加振応答点を第 2 次固有モードでもふしにする。また、テニスラケットの形状の有限要素モデルを使い構造最適化を行う。などが上げられる。

#### 参考文献

- [1]長松昭男, "モード解析入門", コロナ社, 1993 年
- [3]梶原逸朗, 大熊政明, 長松昭男, 瀬戸一登, "共振点と反共振点の感度を用いた構造物の構造最適化", 日本機械学会論文集, 1988 年

キーワード.

振動、実験モード解析、有限要素法、反共振点

-----

Summary.

**Experiment modal analysis and Structural optimization of Tennis racket**

Kaoru Suzuki

Department of Mechanical Engineering, Hosei University

Jun Odate

Graduate School of Engineering, Hosei University

Mitsuo Iwahara Akio Nagamatu

Department of Mechanical Engineering, Hosei University

The purpose of this study is that clarifies and improves the vibration characteristic of tennis racket by experiment and calculation. First, the following are obtained by the experimental mode analysis : Natural frequency and natural mode, modal damping ratio of tennis racket. Next, the drop test of the ball is carried out in order to reproduce the phenomenon in striking the ball actually, and it is compared with the experimental mode analysis. On the basis of the result of experimental mode analysis and drop test of the ball, resonance point and anti-resonance point were calculated according to the general-purpose finite element program, and the structural optimization using each sensitivity was carried out.

Keywords.

Vibration, Experiment modal analysis, FEM, Anti-Resonance