

# 画像データ圧縮モデルの選択

松山 佐和

法政大学計算科学研究センター

統計モデルでは、複数のモデルの中から最適なモデルを選択する方法として、モデルの AIC (Akaike Information Criterion) が最小のモデルを最適モデルとする手法が用いられている。本論文では、離散値系ウェーブレット変換を用いたデータ圧縮の最適モデルの選択に AIC の導入を提案する。画像データに応用する前に、2次元のモデルデータを設定しウェーブレット変換によるデータ圧縮モデルにおいて AIC の値が最小となる最適モデルを選択できることを示す。次に画像データに同様の手法を適用し画像データ圧縮の圧縮率の評価に有用であることを示す。

## 1. はじめに

ウェーブレット変換は周波数解析の手法として注目されている比較的新しいデータ解析法である。従来の主要な周波数解析法であるフーリエ変換はデータに含まれる卓越周波数を抽出するがその周波数の存在する位置を特定できない。一方、ウェーブレット変換では卓越周波数とその周波数の空間的位置を示すことができる<sup>[1]</sup>。また、離散値系ウェーブレット変換は、ウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット近傍要素にデータの特性を集約する特徴を持ち、これを利用したデータ圧縮、および、多重解像度解析による時間・周波数領域にまたがった解析が可能である<sup>[2]</sup>。しかし、ウェーブレット変換は採用する基底関数によって抽出されるグルーピング周波数が異なるため、解析対象のデータの特性に適した基底関数の選択が難しく、現時点では、基底関数の選択は試行錯誤の段階であることは否めない。基底関数の選択法としては、斉藤らがデータ圧縮の圧縮率の評価法として、データ圧縮後のデータと圧縮前の元のデータとの相関係数を用いることを提案し、相関係数により最適な基底関数および圧縮率を決定している<sup>[2],[3]</sup>。

ウェーブレット変換によるデータの圧縮は、データの特徴がウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット近傍に集中することを利用して、その近傍のスペクトラムの要素のみを残し、他をゼロとすることで行われる<sup>[4]</sup>。本論文では、データ圧縮の最適モデルの選択法として AIC (Akaike Information Criterion) の導入を提案する。データ圧縮のモデルを統計モデルと考え、AIC が最小となるモデルを最適モデルとする。ウェーブレット変換によるデータ圧縮においても AIC の値が最小となるモデルを示すことができ、データ圧縮の圧縮率の評価に有用であることを示す。ここでは、選択したある基底関数における AIC モデルを示しているが、今後、基底関数の次数と AIC による最適モデルとの関連を示すことにより、データの特徴をより顕著に抽出する最適な基底関数の選択法の確立に役だてると考えている。

## 2. 赤池情報量規準 (AIC)

AIC (Akaike Information Criterion) とはデータを説明する統計モデルが複数あれば、それらのどのモデルが最適なモデルであるかを選択する規準として赤池により導入された統計量である。E をモデルの最大対数尤度、m をモデルの自由パラメータ数として、

$$AIC = -2E + 2m \quad (1)$$

で与えられる。データを  $x$  とし、パラメータ  $\theta$  を持つ確率密度関数が  $f(x|\theta)$  で与えられたときの最尤推定値を  $\hat{\theta}(x)$  であらわす。パラメータ  $\theta$  の次元が  $m$  次元とすると、

$$AIC = -2\log f(x|\hat{\theta}(x)) + 2m \quad (2)$$

となる。これは、「平均2乗誤差」「尤度」の延長線上にある評価基準で、モデルの真の分布に対する期待平均対数尤度の推定量にあたる。したがって、AIC の値が小さいほど良いモデルであると考えられる<sup>[5]</sup>。

我々が本論文で扱うモデルはいわゆる回帰モデルである。以下に回帰モデルにおいて AIC が一般にどのように計算されるかを述べる。

等間隔で観測されたデータ  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が与えられたとする。このデータを  $x(i) = x_i$  のように離散格子点で値を取る関数  $x$  と考える。関数  $\varphi_j$  を関数  $x$  と同じ範囲の離散格子点で値を取る関数とする。この関数  $\varphi_j$  の族を基底関数とし、関数  $x$  をそれらの一次結合で最小2乗近似することを考える。

$$x \sim \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_m\varphi_m \quad (3)$$

もちろん、各格子点では誤差が生じるので

$$x(i) = \alpha_1\varphi_1(i) + \alpha_2\varphi_2(i) + \dots + \alpha_m\varphi_m(i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

の関係が得られる。このとき  $\varepsilon_i$  は独立に正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従う確率変数と考えるモデルが、我々の統計モデルである。各係数  $\alpha_j$  は最小2乗推定により求められる、いわゆる線型回帰係数である。 $\hat{\alpha}_j$  を回帰係数  $\alpha_j$  の最小2乗推定値とする。このときの2乗誤差平均

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{x(i) - (\hat{\alpha}_1\varphi_1(i) + \hat{\alpha}_2\varphi_2(i) + \dots + \hat{\alpha}_m\varphi_m(i))\}^2 \quad (5)$$

は、誤差の分布が正規分布なので、誤差分散  $\sigma^2$  の最尤推定値となる。正規分布の確率密度関数より、このモデルの最大対数尤度は

$$E = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \hat{\sigma}^2 - \frac{n}{2} \quad (6)$$

となる。またモデルの自由パラメータ数は  $m$  個の回帰係数と誤差の分散  $\sigma^2$  で  $m+1$  個になる。したがってこのモデルの AIC は

$$\text{AIC} = n \log 2\pi + n \log \hat{\sigma}^2 + n + 2(m+1) \quad (7)$$

で与えられる。

さらに、モデルの違いは基底関数達の選び方で与えられることになる。AIC の式に含まれる  $n \log 2\pi + n + 2$  はモデルの違いに依存しないので、結果的に AIC が最小になるモデル、すなわち最適なモデルは

$$n \log \hat{\sigma}^2 + 2m \quad (8)$$

が最小となるモデルを選択することになる。

一般に、1 次元の離散ウェーブレット変換は、1 次変換

$$s = Wx \quad (9)$$

で表される。ここで、 $x$  は  $n$  次の列ベクトル、 $s$  はウェーブレット変換スペクトラム、 $W$  は  $n \times n$  のウェーブレット変換マトリックスである。 $x$  はウェーブレット逆変換により、

$$x = W^T s \quad (10)$$

となる。ここでは直交基底関数を用いているため、

$$W^T = W^{-1} \quad (11)$$

である。ここで、ウェーブレット変換マトリックスを

$$W = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T \quad (12)$$

すなわち、

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \cdots & \varphi_n(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) & \cdots & \varphi_n(2) \\ \varphi_1(3) & \varphi_2(3) & \varphi_3(3) & \cdots & \varphi_n(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \varphi_4(n) & \cdots & \varphi_n(n) \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

と書き直すと、ウェーブレット逆変換の式(10)は、

$$x = s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + \cdots + s_n \varphi_n \quad (14)$$

となる。ただし、 $s_i$  はベクトル  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$  の各成分である。ここで、我々は基底関数  $\varphi_j$  の数を減らすことでデータ圧縮を行うことにする。したがって、最小 2 乗近似モデル

$$x \sim s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2 + \cdots + s_m \varphi_m \quad (15)$$

すなわち、

$$x(i) = s_1 \varphi_1(i) + s_2 \varphi_2(i) + \cdots + s_m \varphi_m(i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

がデータ圧縮の統計モデルとなる。

ウェーブレット変換の基底関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  は、多重解像度解析のレベルにグルーピングされているため、AIC はスペクトラム数  $m$  をレベルごとに増加させて求める。AIC を最小とするスペクトラム数がウェーブレット変換によるデータ圧縮の最適な圧縮率を与える。

### 3. 2 次元モデルデータのウェーブレット変換

2 次元のモデルデータをウェーブレット変換し、逆変換してデータを復元する。復元時に使用する多重解像度解析のレベル数（スペクトラム数）による AIC の変化を求め、データの復元時に最適なレベル数を調べる。モデルデータには  $\sin$  関数の和で表わされるデータを使用する。

ここでは 2 次元（平面）データの各要素が 2 個の要素を持つベクトルであるとし、データマトリックスの大きさを  $m \times n$  としたときの  $i$  行  $j$  列のベクトル要素を

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{6\pi}{m} i\right) + 2 \sin\left(\frac{14\pi}{n} j\right), \\ \cos\left(\frac{6\pi}{m} i\right) + 2 \cos\left(\frac{14\pi}{n} j\right) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

とする。また、 $m \times n$  個のノイズデータを正規分布  $N(0, 1)$  にしたがう乱数でベクトルの各成分用に 2 組作成し、式(17)との和をノイズを含むモデルデータとする。Fig.1 に平面 2 次元ベクトルのモデルデータを示す。ここではデータ数を  $m=64$ 、 $n=128$  とする。(a)は式(17)によるモデルデータ、(b)は正規分布乱数で作られたノイズデータ、(c)は(a)と(b)の和でノイズを含むモデルデータである。この場合の S/N 比はベクトルの各成分についてそれぞれ 2.39、2.51 である。

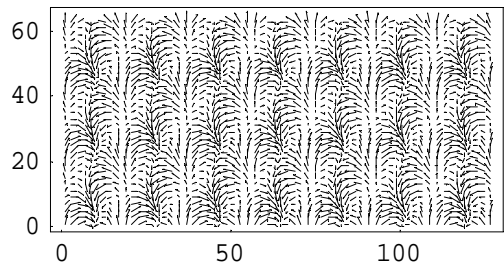


Fig.1(a) 式(17)により計算されたモデルデータ

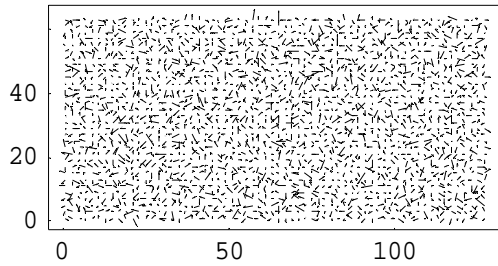


Fig. 1 (b) 正規分布乱数によるノイズデータ

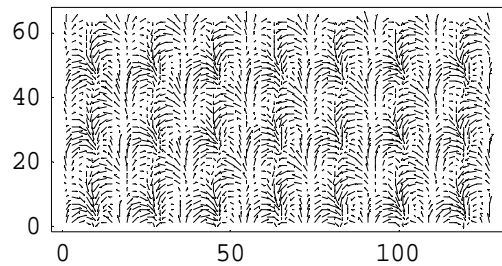


Fig.3 レベル0から4を用いたノイズを含む平面ベクトルモデルの復元データ

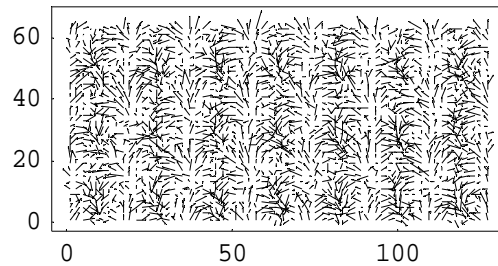


Fig. 1 (c) ノイズを含む平面ベクトルモデルデータ  
Fig. 1 平面ベクトルモデルデータ

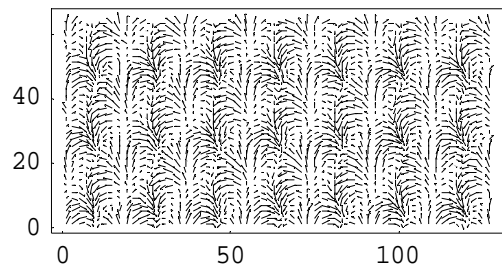


Fig.4 レベル0から5を用いたノイズを含む平面ベクトルモデルの復元データ

Fig.1(c)のノイズを含むモデルデータを2次元ウェーブレット変換する。ここでは、各ベクトル成分についてそれぞれウェーブレット変換する。ウェーブレットスペクトラムをウェーブレット変換による多重解像度解析の各レベルまでに圧縮し逆変換してそのときのAICを求める。Fig.2に基底関数にDaubechiesの4次基底を使用した場合のAICの変化を示す。

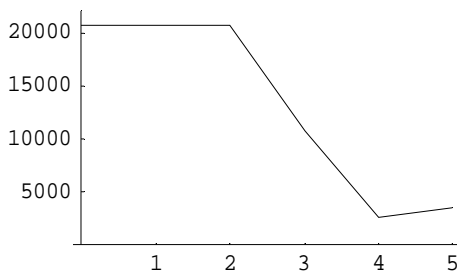


Fig.2 Daubechies の4次基底関数によるAIC  
(Fig.1(c)の平面ベクトルモデルデータ)

各レベル0から5までの逆変換で使用されたスペクトラム数は $4 \times 2$ ,  $8 \times 2$ ,  $32 \times 2$ ,  $8 \times 16 \times 2$ ,  $16 \times 32 \times 2$ ,  $32 \times 64 \times 2$ である。Fig.2に示されるようにAICの最小値はレベル4である。すなわち全体の16分の1のスペクトラムを逆変換して得られたデータでモデルデータを十分に復元できることを示している。

レベル0からレベル4で復元されるデータをFig.3に、レベル0からレベル5で復元されるデータをFig.4に示す。

Fig.2に示されるAICの値によれば、Fig.1(c)のモデルデータはFig.3に示されるデータで十分に表されており、Fig.4ではノイズが含まれ冗長であることを示している。

#### 4. 画像データへの応用

ここではLena画像データにAICモデルを応用する。Lenaのモノクロ画像とカラー画像について3章と同様の手順を示し、画像データにおいてもAICによる最適モデルの選択が有用であることを示す。

##### 4.1 lenaモノクロ画像データ

Fig.5にlenaのモノクロ画像を示す。画像のサイズは $512 \times 512$ である。

この画像データは、3章のモデルデータのベクトル要素が1成分の場合に相当する。これを2次元ウェーブレット変換し、多重解像度解析の各レベルまでに圧縮してデータを復元し、AICを求める。実際の画像データでは、モデルデータの場合とは異なり、AICの値の最小値をレベル0からスペクトル数4分の1のレベルまでに見つからないため、データ数を $16^2$ 分の $9^2$ に圧縮した場合のAICを計算し、4分の1のレベルが最小値であることを確かめている。基底関数にDaubechiesの4次基底を使用した場合のAICの値をFig.6に示す。データ数 $16^2$ 分の $9^2$ のときのAICの値をレベル8として示している。

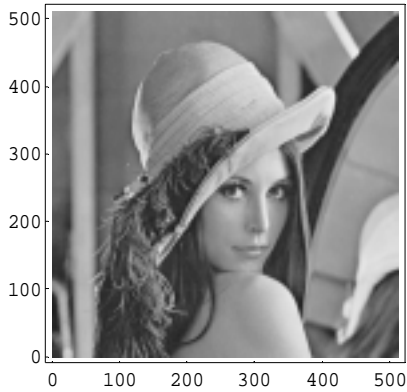


Fig.5 Lena モノクロ画像

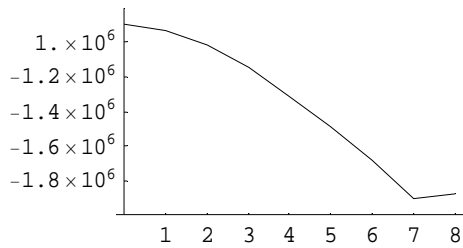


Fig.6 Daubechies の4次基底関数によるAIC (Lena モノクロ画像データ)

選択された最適モデルのレベル0からレベル7で復元されるデータをFig.7に示す。

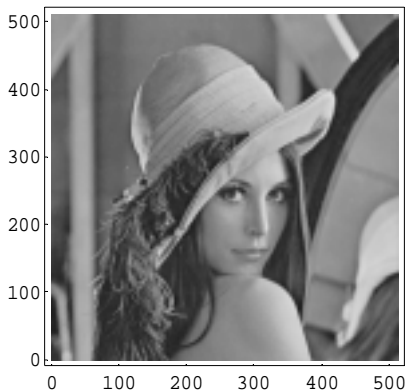


Fig.7 レベル0から7を用いて復元されたLenaモノクロ画像

Fig.5に示す元のLenaモノクロ画像と比較すると、細かな変動がノイズとして削減されていることがわかる。

#### 4.2 lena カラー画像データ

Fig.8にlenaのカラー画像を示す。カラー画像のサイズは $512 \times 512$ で、各要素はRGB (Red, Green, Blue)の3成分を持つベクトルである。3章のモデルデータのベクトル要素が3成分の場合に相当する。

この画像データを3成分についてそれぞれ2次元ウェーブレット変換し、多重解像度解析の各レベルまでに圧縮してデータを復元し、AICを求める。4.1節のモノクロ画像の場合と同様に、AICの値の最小値をレベル0からスペクトル数4分の1のレベルまでに見つけれないため、データ数を $16^2$ 分の $9^2$ に圧縮した場合のAICを計算し、4分の1のレベルが最小値であることを確かめている。基底関数にDaubechiesの4次基底を使用した場合のAICの値をFig.9に示す。データ数 $16^2$ 分の $9^2$ のときのAICの値をレベル8として示している。

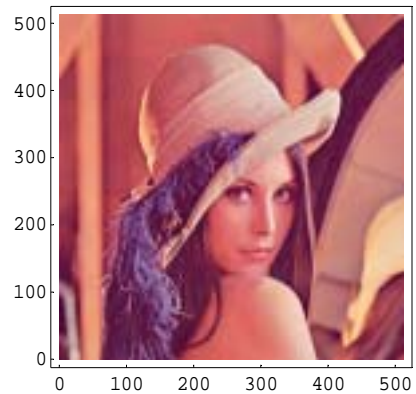


Fig.8 Lena カラー画像

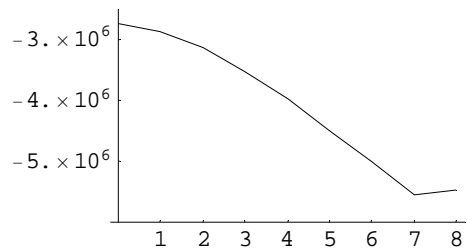


Fig.9 Daubechies の4次基底関数によるAIC (Lena カラー画像データ)

選択された最適モデルのレベル0からレベル7で復元されるデータをFig.10に示す。Fig.8示す元のLenaカラー画像と比較してもほとんど差がなくよく復元されていることがわかる。

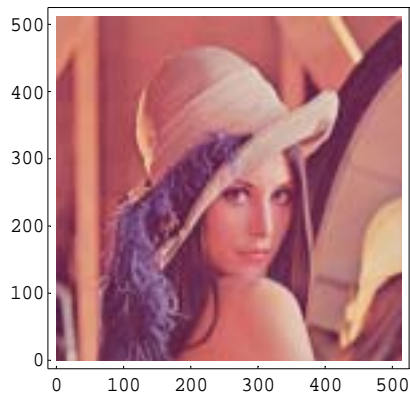


Fig.10 レベル 0 から 7 を用いて復元された Lena カラー画像

## 5. おわりに

ウェーブレット変換によるデータ圧縮の最適モデルの選択法として AIC を導入した。2次元のモデルデータをウェーブレット変換し AIC の値が最小となる最適モデル

を選択できることを示した。また、画像データにも同様の手法を適用しデータ圧縮の圧縮率の評価に有用であることを示した。本論文では、選択したある基底関数において AIC モデルが有効であることを示したが、今後、基底関数の次数と AIC による最適モデルとの関連を示すことにより、データの特徴をより顕著に抽出する最適な基底関数の選択法を確立できると考えている。

## 参考文献

- [1] 榊原進, "ウェーブレットビギナーズガイド", 東京電機大学出版局, 1995.
- [2] 斉藤兆古, "Mathematica によるウェーブレット変換", 朝倉書店, 1996.
- [3] S.Matsuyama, Y.Oguchi and Y.Saito: Applications of the Wavelet Transform to the Meteorological Vector Data, 1998 ASME FEDSM, June 21-25, 1998, Washington, D.C.
- [4] 松山佐和, 小口雄康, 松山志保, 斉藤兆古, 國井利泰, "ウェーブレット変換によるベクトル動画の生成", 可視化情報, Vol.20, Suppl., No.1, 145-148, 2000.
- [5] 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎, "情報量統計学", 共立出版株式会社, 情報科学講座 (1993)

キーワード.

赤池情報量規準、ウェーブレット変換、多重解像度解析

-----

**Summary.**

## **Selection of Image Data Compression Model**

Sawa Matsuyama

Computational Science Research Center, Hosei University

On the selection of the most suitable model from several statistical models, the model of which AIC (Akaike Information Criterion) is minimum, is selected as the suitable model. In this study, we propose the application of the AIC as the methodology for selecting the most suitable model for data compression on discrete wavelets transform, that is, the compressions of two dimensional data are made by wavelets transform, and we select the minimum AIC model as the suitable one. The same method is applied to the analysis of a couple of images, and we see that it can be also valid for an evaluation of the efficiency of data compression.

**Keywords.**

Akaike information criterion, Wavelets transform, Multi resolution analysis