コラッツ予想について

三室 智明　　西村 滋人　　平松 豊一

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻

コラッツ予想とは、関数 f を m が奇数ならば $f(m)=(3m+1)/2$, 偶数ならば $f(m)=m/2$ と定義すると、任意の自然数 m について $f^n(m)=1$ となるような n が存在する、という予想である。数値実験の結果は肯定的であるが、未解決である。ここでは、サイクルとよばれる反例についての幾つかの結果をまとめ、問題の拡張と数値実験の結果を報告する。

1　はじめに

コラッツ (Collatz) 予想は、角谷の予想ないしは $3m+1$ 問題等とも呼ばれる。数値実験の結果は肯定的であるが、未解決であり、どのような数学的原理によるのか手がかりもつかめていない。エルデシュ (P.Erdös) は、現在の数学では、この予想を攻撃することはできない、とコメントしている。まず、コラッツ予想を説明し、用語及び記号の準備をする。

1.1　コラッツ予想

コラッツ予想は次のように述べられる;「自然数 m について奇数ならば 3 倍して 1 を加え、偶数ならば 2 で割る。この操作を繰り返すと、任意の自然数 m は、有限回の操作で必ず 1 になる」

計算機による計算で、7586054706036736 までの全ての整数については必ず 1 になることが確かめられている (http://www.csl.sony.co.jp /person/fnami/3xplus1.htm)。

この予想は、関数 f を

$$f(m)=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & (m\text{ は偶数}),\\ \dfrac{3m+1}{2} & (m\text{ は奇数}),\end{cases}$$

または有理数に拡張して

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{2b} & (a\text{ は偶数}),\\ \dfrac{3a+b}{2b} & (a\text{ は奇数}),\end{cases}$$

と定義したうえで、任意の自然数 m に関して

$$f^n(m)=1$$

をみたす自然数 n が存在すること、と言い表すことができる。m を出発数、n の最小の数を、出発数 m が 1 になるステップ数と呼ぶことにする。ステップ数は、出発数 n が 1 になるまでに 2 で割った回数と等しい。

例として出発数を 15 とすると

$$15\to_1 23\to_1 35\to_1 53\to_1 80\to_0 40\to_0 20\to_0$$

$$10\to_0 5\to_1 8\to_0 4\to_0 2\to_0 1$$

となる。ここで、矢印の添字は、0 ならば偶数の操作、1 ならば奇数の操作を行ったことを意味する。添字を並べて得られる 2 進列

$$111100001000$$

は出発数 15 に対応して一意的に決まる。奇数の操作がどれくらいの間隔で行われるかということに着目して、これをさらに

$$15=[1,1,1,5,4]$$

と書き、「操作の手順」と呼ぶ。全ての数の合計がステップ数であり、出発数 15 はステップ数が 12 である、と言う。なお、偶数はその操作から必ず奇数になる。よって出発数を奇数に限定してよい。

1.2　サイクル

コラッツ予想を証明するためには次のことを示せばよい。

(a) 循環しないこと。すなわち $f^n(m)=m$ となる $m(\neq 1)$ は存在しない。

(b) 発散しないこと。すなわち任意の n に対して

$f^M(m) > f^n(m)$ を満たすような $M > n$ が必ず存在するような m は存在しない。

(a) の反例を与えるような数を「サイクル」と呼ぶことにする。小さい整数では 1 以外はサイクルにならないので、これを、自明なサイクルと呼ぶ事にする。ここで、予想が成立しているときと同じように、サイクルにも操作との一対一対応をつけることができるので、先の記号と同様、サイクル m を、

$$m = < l_1, l_2, \cdots, l_k >$$

と書くことにする。ここで、k は奇数の操作回数であり、全ての合計を「サイクルのステップ数」と呼ぶ。またサイクルはその性質上、順番を崩さずに巡回させてもやはりサイクルを作る。つまり、

$$m_i = < l_i, l_{i+1}, \cdots, l_k, l_1, \cdots, l_{i-1} >$$

(ただし、$i = 1, 2, 3, \cdots, k$ かつ $m = m_1$) もサイクルである。この記号を使うと自明なサイクルは

$$1 \to_1 2 \to_0 1$$

なので、

$$1 = < 2 >$$

と書ける。

2　サイクルについての諸結果

この節では知られている結果をいくつか述べる。

定理 2.1.1　$m = [l_1, l_2, \cdots, l_k]$ なる数のステップ数を $n (= l_1 + l_2 + \cdots + l_k)$、$l_0 = 0$ とすれば、

$$m = \frac{2^n - \sum_{i=1}^{k} 3^{k-i} 2^{\sum_{j=0}^{i-1} l_j}}{3^k}$$

同様に、$m = < l_1, l_2, \cdots, l_k >$ なるサイクルは

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{k} 3^{k-i} 2^{\sum_{j=0}^{i-1} l_j}}{2^n - 3^k}$$

とそれぞれ表せる。

以下ではサイクル、とくに定理 2.1.1 の「分母が 1 の場合」に限定して考える。そのためには不定方程式

$$2^n - 3^k = 1$$

を解かねばならない。この解は容易に分かる。

定理 2.2.1　$2^n - 3^k = 1$ の自然数解は $(n, k) = (2, 1)$ に限る。

(証明) $n \geq 3$ として、両辺の $\mathrm{mod}.8 = 2^3$ をとると

$$3^k \equiv -1 \pmod{8}$$

となるが、$(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ での 3 の位数は 2 なので、

$$3^k \equiv 1 \text{ または } 3 \not\equiv -1 \equiv 7 \pmod{8}$$

となり、解がない。よって、$n = 1$ または 2 で解を探すと上記の解がみつかる。

$(n, k) = (2, 1)$ から現れるのは $1 = < 2 >$ である。また、特殊なサイクルについては幾つかの結果が知られている;

定理 2.2.2 (Steiner [2]) $m = \langle 1, 1, 1, \cdots, 1, l_k \rangle$ で表される整数の自明でないサイクルは存在しない。

この拡張として、次の結果が得られる。

定理 2.2.3 (三室 [3]) $m_1 = \langle 1, \cdots, 1, l, \cdots, l \rangle$ で表される自明でないサイクルは有限個しか存在しない。($n < 22033$ なる bound を持つ)

定理 2.2.4(Eliahou [4]) $\min\{m_1, m_2, \cdots m_k\} > 2^{40}$ としたとき

$$n = 301994a + 17087915b + 85137581c$$

と表される。このとき a, b, c は非負の整数で $b > 0, ac = 0$ を満たす。

定理 2.2.4 から $n \geq 17087915$ が言えるので、定理 2.2.3 とあわせれば次の系が得られる。

系 2.2.5　$m_1 = \langle 1, \cdots, 1, l, \cdots, l \rangle$ で表される自明でないサイクルは存在しない。

3　コラッツ予想の拡張

コラッツ予想の拡張はいろいろ考えられるが、p を正の奇数として

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & (m \text{ は偶数}), \\ \dfrac{pm+1}{2} & (m \text{ は奇数}), \end{cases}$$

とおいてみても、$p=3$ のときのように予想を肯定的に裏づけるような数値実験の結果は知られていない。むしろ一般には、自明でないサイクルが存在したり ($p=5$ のとき $m=13$ が自明でないサイクルとなる)、発散するような気配を示すことが多いようである (通常のコラッツ予想についても、発散するかどうかの判定条件は知られていない)。

さらに、奇数の操作が続くときは回数に応じて p を取り替えて

$$f(m)=\begin{cases} \dfrac{m}{2} & (\ m \text{ は偶数}),\\ \dfrac{p_1m+1}{2} & \left(\begin{array}{l} m \text{ は奇数で奇数操作}\\ \text{回数が } 1 \text{ 回目}, \end{array}\right)\\ \dfrac{p_2m+1}{2} & \left(\begin{array}{l} m \text{ は奇数で奇数操作}\\ \text{回数が } 2 \text{ 回目}, \end{array}\right)\\ \quad\vdots & \\ \dfrac{p_xm+1}{2} & \left(\begin{array}{l} m \text{ は奇数で奇数操作}\\ \text{回数が } x \text{ 回目}, \end{array}\right) \end{cases}$$

と拡張することも考えられる (操作回数が x よりも大きいときは x で割った余りを回数とする)。このような拡張に対しては、通常のコラッツ予想が $p=3$ に相当することから、

$$p=\sqrt[x]{p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_x}$$

と置き、$p\geq 4$ のときは発散することが多いのではないか、と見る向きがある (Lines [5])。しかし、$x=2$ のとき、$p_1=1, p_2=11$ とすると $m\leq 10^5$ の範囲で数値実験の結果は肯定的だが、p_1 と p_2 の選び方を逆にして, $p_1=11, p_2=1$ とすると

$$3\to 17\to 9\to 50\cdots\ (f^{50}(3)=21962606\ (\text{発散?})),$$
$$5\to 28\to 14\to 7\to 39\to_0 20\to 10\to 5\ (\text{循環}).$$

いずれにしても、こうした拡張では、奇数 p を上手くとらないことには、肯定的な予想を立てることは難しいようである。

3.1　ガウス整数環への拡張

ここでは、ガウス整数環

$$\mathbf{Z}[i]=\{a+bi; a,b \text{ は整数 }\},\quad (i^2=-1)$$

上で同様の問題を考える。ガウス整数環では偶数と奇数が次のように定義できる。

(a) $1+i$ で割り切れないとき奇数
(b) $1+i$ で割り切れるが $(1+i)^2$ では割り切れないとき半偶数
(c) $(1+i)^2=2$ で割り切れるとき偶数

そこで、ガウス整数 $m=a+ib$ に対して関数 f を

$$f(m)=\begin{cases} \dfrac{m}{1+i} & (m \text{ は偶数または半偶数}),\\ 3m+1 & (m \text{ は奇数}), \end{cases}$$

と定義し、任意のガウス整数 $m(\neq 0)$ に関して

$$f^n(m)=\pm 1,\pm i$$

となる自然数 n が存在するかどうかを考える。前節の「$p\geq 4$ のとなるときは発散しやすい」という予想を考慮すれば、2 で割るかわりに、絶対値が $\sqrt{2}$ の複素数 $1+i$ で割っているため、発散の可能性が大きいのではないかと予想される。計算機による実験では絶対値が小さいガウス整数のなかにも発散するものが見うけられる; 例えば $m=2+i$ のとき、

$$2+i\to_1\ 7+3i\to_0\ 5-2i\ \to_1\ 16-6i\ \to_0\ 5-11i$$
$$\to_0 -3-8i\to_1 -8-24i\ \to_0\ -16-8i\ \cdots,$$

$$f^{50}(2+i)=-18-197i,$$
$$f^{100}(2+i)=20940437-1873331i,$$

奇数のときの関数の定義を $f(m)=(1+2i)m+1$ と変えて実験してみたが、結果は予想成立には否定的であった。

3.2　剰余類での拡張

偶数と奇数の場合分けを拡張して、ここでは関数 f を次のように定義する。

$$f_{a,b}(m)=\begin{cases} \dfrac{m}{3} & (m \text{ は } 3 \text{ で割り切れる}),\\ am+b & (m \text{ は } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る}),\\ m+1 & (m \text{ は } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る}), \end{cases}$$

a, b は任意の整数でよいが、$am+b$ が 3 で割り切れるように選ぶものとする。そのうえで同様に、任意の自然数 $m(>1)$ に関して

$$f^n_{a,b}(m)=1$$

を満たす n が存在するかどうか数値実験を行った; $a=2$ 及び 3 の倍数のときは除き

$$\begin{cases} a\equiv 1\ (\mathrm{mod.}3) \text{ のとき } b=2 \text{ または } -1\\ a\equiv 2\ (\mathrm{mod.}3) \text{ のとき } b=-2 \text{ または } 1 \end{cases}$$

とする。m の範囲は $2 \leq m \leq 10000$ とし、予想の成立するものについては、1 になるまでの平均ステップ数 (小数点第 2 位以下は切り捨て) を、循環する反例についてはサイクルの最小数と最大数、循環の長さを記した。

$am+b$	平均ステップ数またはサイクル
$4m-1$	21.2
$4m+2$	21.3
$5m-2$	23.3
$5m+1$	最小 4, 最大 36, 長さ 5
$7m-1$	26.9
$7m+2$	28.9
$8m-2$	32.6
$8m+1$	最小 4, 最大 33, 長さ 5
$10m-1$	37.8
$10m+2$	35.9
$11m-2$	37.9
$11m+1$	38.3
$13m-1$	最小 7, 最大 558, 長さ 11
$13m+2$	39.5
$14m-2$	$f^{150}_{14,-2}(442) = 78762911106$ (発散?)
$14m+1$	最小 4, 最大 855, 長さ 29
$16m-1$	58.0
$16m+2$	最小 382, 最大 52089954, 長さ 94
$17m-2$	最小 331, 最大 351718863, 長さ 84
$17m+1$	最小 295, 最大 16435278, 長さ 154
$19m-1$	86.1
$19m+2$	82.2
$20m-2$	94.3
$20m+1$	最小 319, 最大 345921, 長さ 54
$22m-1$	最小 4, 最大 23451, 長さ 55
$22m+2$	159.3
$23m-2$	235.1
$23m+1$	174.0
$25m-1$	最小 4, 最大 99, 長さ 5
$25m+2$	最小 4, 最大 852, 長さ 12

$(a,b) = (14,-2)$ のとき、10000 以下ではサイクルは存在しない。発散の予想される数値例として、もうひとつ $f_{37,2}(7)$ を挙げておく;

$$7 \to_1 261 \to_0 87 \to_0 29 \to_2 30 \to_0 10 \to_1 372 \to_0 124 \to_1 4590 \to_0 1530 \cdots$$

$$f^{50}_{37,2}(7) = 78934,$$
$$f^{100}_{37,2}(7) = 2521262829180,$$

参考文献

[1] G. J. Wirsching, The dynamical system generated by the $3n+1$ function, Lecture Notes in Mathematics **1681**, Springer-Verlag(1998).

[2] R. P. Steiner, A thorem on the Syracuse problem, Proc. 7th Manitoba Conf. Numerical Mathematics and Computing 1977 Winnipeg(1978), 553-559.

[3] T. Mimuro, On certain simple cycles of the Collatz conjecture, SUT. J. Math., Vol.**37**, No.2 (2001), 79-89.

[4] S. Eliahou, The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle length, Discrete Math. **118**(1993), 45-56.

[5] M. E. Lines, 片山孝次訳, 数、数、…不思議なふるまい, 岩波書店, 1989.

[6] 平松豊一, 相互法則入門, 牧野書店,1998.

キーワード.

コラッツ予想, ディオファンタス方程式

Summary

On the Collatz conjecture

Tomoaki Mimuro Shigeto Nishimura Toyokazu Hiramatsu

Graduate School of Engineering, Hosei University

The Collatz conjecture on the rational numbers is that there exists a positive integer n satisfying $f^n(m) = 1$ for any rational number $m \geq 3$, where f is the function on the rational number field defined by $f(m) = m/2$ if the numerator of m is even and $f(m) = (3m + 1)/2$ if the numerator of m is odd. We will consider the cycles and generalized cases.

Keywords.

The Collatz conjecture, Diophantine equations.