

電気インピーダンス法による導電率分布の推定に関する一考察

間瀬 周介 早野 誠治 斎藤 兆古
法政大学大学院工学研究科

2次元物体の全周の投影図が得られれば投影図からその形状が再現可能である。これが、いわゆるトモグラフィーの基本的な考え方であり X 線 CT や MRI などに応用されている。トモグラフィーの一種に電気インピーダンス法、Electrical Impedance Tomography (EIT)がある。EIT は投影図の代わりに電流を対象に注入した場合の対象周辺電圧を測定し、対象の導電率分布をトモグラフィーとして得ようとするものである。EIT では、注入電流に対する応答は周辺電圧として得られる。その際、対象が一樣でない場合電流の注入箇所によって応答電圧は異なってくる。本稿では電流注入箇所に対する周辺のみならず対象上すべての電圧分布から導電率分布が推定可能かを検討する。すなわち、パラメータ推定に関する逆問題に関する考察を行う。

1. はじめに

2次元平面状に存在する物体の投影図を全周辺に亘って得られれば、2次元平面状に存在する物体の形状が再構成可能である。これが、いわゆるトモグラフィーの基本的な考え方であり、オーストリアの数学者ラドンによって最初に数学的証明がなされ、ラドン変換と呼ばれた。その後、ラドン変換だけでなく、フーリエ変換法や重み付逆投影法などが開発され、初期は X-線 CT(Computed Tomography)、その後、核磁気共鳴を利用した MRI (Magnetic Resonance Imaging)が開発され、より精緻なトモグラフィーが主として医学分野に広範に用いられている。X-線 CT は、対象に X 線を照射した場合の X 線吸収率を投影図の代わりに用いる。また、MRI は投影図の代わりに、強静磁界下における、電子の歳差運動に共振するマイクロ波の吸収率を利用する。何れも X 線やマイクロ波の吸収率を直接利用するため、数学的根拠も明確である。このため、比較的早く開発され、実用に用いられている[1]。

他方、電気インピーダンス法 (EIT) は、X 線やマイクロ波の代わりに電流を対象に注入し、その結果として得られる対象の周辺電圧を測定し、対象の導電率分布をトモグラフィーとして得ようとする。X 線やマイクロ波は直進性を持つため、対象の情報が単純な数学的關係で表現可能である。しかし、EIT では、注入電流に対する応答は周辺電圧として得られるため、電磁界の支配方程式の一種であるラプラス方程式の解として得られる。このため、入力とその応答が境界条件と媒質パラメータで決まる関数型トモグラフィーとなる。EIT 装置自身は比較的簡単で安価に構成可能な反面、注入電流毎に逐次、ラプラス方程式の解を求め、その結果から、導電率分布のトモグラフィーを生成する。問題は、電磁界の支配方程式であるラプラス方程式で媒質のパラメータを未知数として解く必要性があり、いわゆる媒質推定に関する逆問題を逐次解く事に帰する点にある[2]。

本報告では、このような EIT の現状に鑑み、EIT 開発の第 1 ステップとして、注入電流に対する応答として得られる節点電圧が与えられた場合、平面回路の抵抗分布がどの程度再現可能かを検討し、その結果、EIT 実現に関する初期的知見が得られたのでここに報告する。

本報告は 5 章で構成され、第 1 章はまえがきである。第 2 章は EIT を集中定数型モデルで置き換えて原理を検

証する。第 3 章は EIT 問題で遭遇する不適切な線形システムの解法である一般化ベクトルサンプリドマッチング (Generalized Vector Sampled Pattern Matching、GVSPM) 法について述べる。第 4 章は集中定数型モデルでのシミュレーションと検証実験である。第 5 章はまとめである。

2. EIT の集中定数型モデル

まず、最初に実際の EIT を集中定数型電気抵抗回路モデルに置き換えて、原理検証を行う。簡単化のため、図 1 に示す抵抗回路を考える。

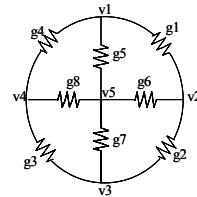


図 1. 節点数 5、抵抗数 8 の回路

図 1 の回路で、 $v_1, v_2, \dots, v_5, g_1, g_2, \dots, g_8$ はそれぞれ回路に電流を注入した場合の各節点電位と各枝のコンダクタンスである。

図 1 で、節点 1 と 3 の間に電流 I を注入したとする。この場合、節点方程式は $v_3=0$ を基準電位とすると(1)式で与えられる。

$$\begin{aligned} (v_1 - v_2)g_1 + (v_1 - v_4)g_4 + (v_1 - v_5)g_5 &= I \\ (v_2 - v_1)g_1 + v_2g_2 + (v_2 - v_5)g_6 &= 0 \\ -v_2g_2 - v_4g_3 - v_5g_8 &= -I \\ (v_4 - v_3)g_3 + (v_4 - v_1)g_4 + (v_4 - v_5)g_8 &= 0 \\ (v_5 - v_1)g_5 + (v_5 - v_2)g_6 + v_5g_7 + (v_5 - v_4)g_8 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(1)式を書き直すと(2)式となる。

$$\begin{bmatrix} v_1 - v_2 & 0 & 0 & v_4 - v_1 & v_4 - v_5 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 - v_1 & v_2 - v_3 & 0 & 0 & 0 & v_2 - v_5 & 0 & 0 \\ 0 & -v_2 & -v_4 & 0 & 0 & 0 & -v_5 & 0 \\ 0 & 0 & v_4 - v_3 & v_4 - v_1 & 0 & 0 & 0 & v_4 - v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_5 - v_1 & v_5 - v_2 & v_5 & v_5 - v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \\ g^4 \\ g^5 \\ g^6 \\ g^7 \\ g^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2)式で、コンダクタンス g_1, g_2, \dots, g_8 が解ベクトルを構成するから、この場合、式の数が5個、未知数が8個の不適切な線形システムを解くこととなる[3]。

3. 一般化ベクトル型 SPM (GVSPM) 法

3.1 不適切な線形システム方程式とその正規化

(3)式の線形システム方程式を考える。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}. \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{Y} 、 \mathbf{X} 、 \mathbf{C} はそれぞれ電流による n 次の入力ベクトル、コンダクタンスによる m 次出力ベクトル、電位からなる n 行 m 列の長方形行列である。(3)式は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{C}_i, \\ \mathbf{X} &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T, \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_m]. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式を入力ベクトル \mathbf{Y} のノルムで正規化し、(5)式の関係が得られる。

$$\frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{|\mathbf{C}_i|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{C}_i}{|\mathbf{C}_i|}, \text{ or } \mathbf{Y}' = \mathbf{C}'\mathbf{X}'. \quad (5)$$

(5)式でプライム(')はベクトルのノルムが1に正規化された量を表している。(5)式は正規化した入力ベクトル \mathbf{Y}' が重み付き解要素である $x_i |\mathbf{C}_i| / |\mathbf{Y}|$ と正規化された列ベクトル $\mathbf{C}_i / |\mathbf{C}_i|$ の線形結合として得られることを意味している。ここで \mathbf{Y}' と $\mathbf{C}'\mathbf{X}'$ の内積が1になるとき解 \mathbf{X} が得られるということに注意しなければならない。これがGVSPM法の基本的な着想である。

3.2 目標関数

k 回目の反復解 $\mathbf{X}^{(k)}$ で与えられる $\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}$ と入力ベクトル \mathbf{Y} 間の角度を目標関数 $f(\mathbf{X}^{(k)})$ として(6)式で定義する。

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) = \frac{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}}{|\mathbf{Y}| |\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}|} = \mathbf{Y}' \cdot \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}|}. \quad (6)$$

(6)式で、目標関数 $f(\mathbf{X}^{(k)})$ が1に収束する時、(3)式の解 \mathbf{X} が求まることを意味する。すなわち、

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) \rightarrow 1. \quad (7)$$

(6)式がGVSPM法の目標関数である。

3.3 反復解法

反復解の初期値を $\mathbf{X}^{(0)}$ として(8)式で与える。

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{C}^{T'} \mathbf{Y}'. \quad (8)$$

(8)式から、最初の偏差ベクトル $\Delta\mathbf{Y}^{(1)}$ が(9)式で与えられ

る。

$$\Delta\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}^{(0)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}^{(0)}|}. \quad (9)$$

(9)式で、偏差 $\Delta\mathbf{Y}'$ がゼロベクトルであれば、(7)式の目標関数は自動的に満足される。(9)式を一般化し、第 k 回目の反復解ベクトル $\mathbf{X}^{(k)}$ は、第 $k-1$ 回目の偏差ベクトル $\Delta\mathbf{Y}^{(k-1)}$ を用いて(10)式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}^{T'} \Delta\mathbf{Y}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{C}^{T'} \mathbf{Y}' + \left(I_m - \frac{\mathbf{C}^{T'} \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 I_m は m 行 m 列の単位行列である。

3.4 収束条件

線形システム方程式の反復解法の収束条件は、(10)式の状態遷移行列において、すべての固有値が1未満でなければならない。(10)式の状態遷移行列 S は(11)式で与えられる。

$$S = I_m - \frac{\mathbf{C}^{T'} \mathbf{C}'}{\mathbf{C}'\mathbf{X}^{(k-1)}} = I_m - \frac{\mathbf{C}^{T'} \mathbf{C}'}{\mathbf{Y}'^{(k-1)}}. \quad (11)$$

(11)式の入力ベクトル $\mathbf{Y}'^{(k-1)}$ のノルムは1であるから、(11)式は次のように書き直すことができる。

$$S = I_m - \mathbf{C}^{T'} \mathbf{C}'. \quad (12)$$

ここで S を(12)式の状態遷移行列 S の固有値とすれば、 $\mathbf{C}^{T'} \mathbf{C}'$ の対角線要素が全て1である事に注意して、固有値は(13)の行列式で与えられる。

$$|\lambda I_m - S| = \begin{vmatrix} \lambda & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{12} & \lambda & \dots & \varepsilon_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{1m} & \varepsilon_{2m} & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

(13)式で、行列 \mathbf{C}' は正規化された列ベクトル $\mathbf{C}_i / |\mathbf{C}_i|$ からなるため、非対角要素の係数は1未満の値をとることは明らかである。すなわち、

$$|\varepsilon_{ij}| < 1, \quad i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,m \quad (14)$$

となる。(14)式から、収束条件 $|\lambda| < 1$ が満たされることが判る。抛って、GVSPM法は常に安定した反復解を与えることが証明された[4]。

4. シミュレーションと実験

4.1 シミュレーション

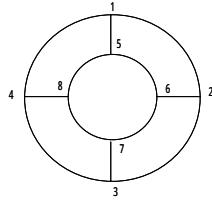


図2. シミュレーションに用いた回路モデル

図2に示す網状回路を仮定し、節点1と3の間に電流を注入した場合の各節点電位から全抵抗の抵抗値を求める問題を考える。

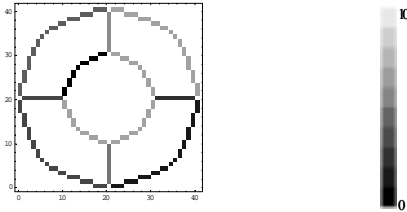


図3. シミュレーションに用いた抵抗値

シミュレーションに用いた抵抗値は乱数で生成した。その結果を図3に示す。抵抗値は図3に示すように、明るいほど抵抗値は大きく、暗いほど小さい。この表示形式は以後の図においても同様とする。

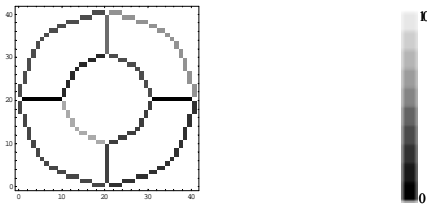


図4. 8行12列のシステム行列を用いて求めた抵抗分布

2章の(2)式で述べた方法で、線形システム方程式を導き、得られた線形システム方程式をGVSPM法で解き、抵抗分布を求める。

図4にGVSPM法で得られた抵抗分布を示す。明らかに正しい解が得られていないことがわかる。これは(2)式は未知数が既知数よりも多いため、GVSPM法で数学的に解くことは可能であるが、必ずしも得られた解が物理系の抵抗値と一致しない例である。

この問題を解決するため、図3で注入電流節点对を増加し、それぞれに対して線形システム方程式を(2)式と同様に導き、それらを合成して全体としての線形システム方程式を導く。この場合、何れの注入電流節点对に対しても解ベクトルを構成するコンダクタンスは共通であるから、式の数(情報)は増加し、未知数は変わらない。

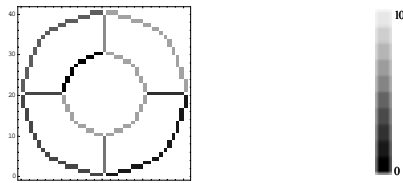


図5. 16行12列のシステム行列を用いて求めた抵抗分布

本シミュレーション例では、注入電流対を節点1と3、および節点2と3とした。この場合、式の数16個、未知数の数は12個となる。すなわち、16行12列の長方形システム行列を持つ不適切な線形システムをGVSPMで解く。図5が結果である。図3と比較すれば、明らかに正しい抵抗分布が得られていることがわかる。

以上のシミュレーション結果から、注入電流対を増加し、対象とする回路の応答情報を増加することで物理的に存在する解、すなわち、抵抗分布トモグラフィが可能であることが判明した。

4.2 実験

図6は実験に用いた節点数24、抵抗数40の回路を示す。図7は図6の供試回路の抵抗値分布を示す。

図6、7で、節点番号は外側の頂点を1とし、時計回りに順に内側方向へ1、2...24として、番号付けを行う。基準電位を第5節点とし、電極対5-1、5-2、5-3、5-4として、電流を注入する。本実験では、抵抗値分布を得るために、96行40列のシステム行列を持つ線形システム方程式をGVSPM法で解くことに帰結する。図8に結果を示す。図8の抵抗分布は図7の抵抗分布と完全に一致していない。前節で述べたシミュレーション結果によれば情報量を増加すれば精度向上が期待できる。従って、最外周の7電極対を1周(8電極)させて、各節点電圧(1電極対に対して24節点)の電圧を測定し、それらをすべて連立させることで情報量を増加する。すなわち、1344行40列のシステム行列を持つ方程式にGVSPM法を適用して解く。その結果を図9に示す。図9の結果は、情報量の増加が抵抗分布の対称性と値の違いを明確とするが、必ずしも精度が向上しないことを意味する。



図6. 実験に用いた抵抗回路

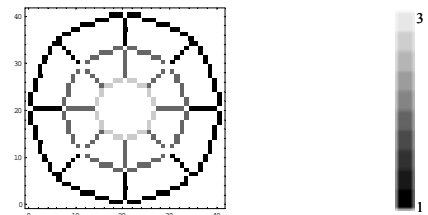


図7. 実験に用いた抵抗分布

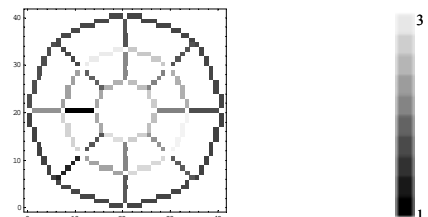


図8. 96行40列のシステム行列を用いて求めた抵抗分布

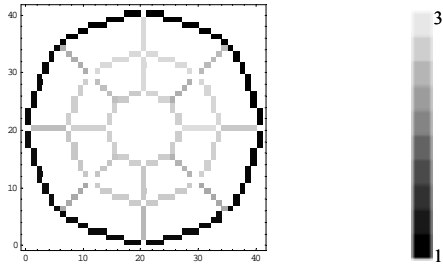


図9. 1 3 4 4 行 0 列のシステム行列を用いて求めた抵抗分布

情報量の増加は必ずしも高精度な結果につながらない原因は、情報が実験によって得られているため、誤差を含むことに起因すると考えられる。換言すれば、情報量を増加しても誤差が多く含まれる場合は無意味である。実験値に含まれる誤差を削減する一方途として、加算平均演算が行われる。ここでは、最外周の7電極対に対して得られる情報を、電極対毎に独立して得られた抵抗分布の加算平均処理を行う[5]。図10にその結果を示す。明らかに、図7とよく一致した抵抗分布である。加算平均処理が効果的に測定ノイズを削減した原因は、図7に示す供試回路が中心に対して完全に対称な抵抗値分布となっているため、本来独立な電極対が半分であるにも拘らず、得られた測定値が異なるためである。

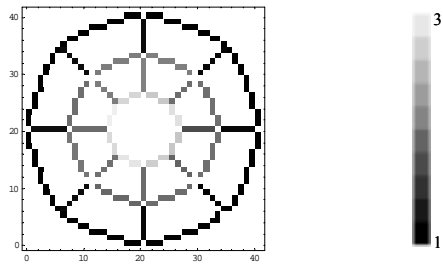


図10. 加算平均処理によって得られた抵抗分布

5. まとめ

本論文では、EITの基礎実験として、抵抗率分布を回路モデルで置き換え、注入電流と節点電圧から抵抗分布を推定した。その結果、シミュレーションでは妥当な結果が得られた。

しかし、実際の実験では、測定に誤差を伴うため、すべての電極対の組み合わせでも良好な結果が期待できないことを述べた。これは供試回路が最も不適切な完全に対称あることに起因するため、実験値に含有される測定誤差の影響は加算平均処理で効果的に削減可能であることを述べた。

参考文献

- [1] Avinash C. Kak and Malcolm Slaney "Principles of computerized tomographic imaging," The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.(1988)
- [2] Tian Haiyan and et al, "A Study of reconstruction algorithm of electrical Impedance tomography," Proceedings of 2nd Japan Australia New Zealand Joint Seminar on Applied Electromagnetodynamics, KANAZAWA, Jan. 24-25th 2002 (to be appeared).
- [3] D. Sekijima, S. Hayano and Y. Saito, "Time-domain visualization of quasi-3D current Vector distributions," Proceedings of PSFVIP-3, F3303, March 18-21th 2001, Maui, Hawaii, U.S.A
- [4] H. Endo, S. Hayano and Y. Saito, "Generalized vector sampled pattern matching method part-1: theoretical background," Japan society of Applied Electromagnetics and mechanics, ENDE, May 17-19th, 2001, Kobe.
- [5] S. Mabuchi, S. Hayano, Y. Saito, I. Marinova, "Generalized vector sampled pattern matching method for inverse parameter problems," Proceedings of 2nd Japan Australia New Zealand Joint Seminar on Applied Electromagnetodynamics, KANAZAWA, Jan. 24-25th 2002 (to be appeared).

キーワード.

一般化ベクトル型サンプルパターンマッチング(GVSPM)法、電気インピーダンストモグラフィー

Summary.

A Study of Electrical Impedance Tomography

Shusuke Mabuchi Seiji Hayano Yoshifuru Saito
Graduate School of Engineering, Hosei University

Electrical impedance tomography (EIT) is one of the cheapest ways in order to realize a tomography. Principal purpose of the EIT is to obtain a conductivity distribution of a two-dimensional cross-sectional target area by injecting the current. EIT utilizes a functional relationship between the injection current and surface potential distribution depending on the conductivity difference. This functional relationship of EIT reveals that EIT has versatile possibilities but it is essentially reduced into solving for an ill-posed inverse problem. In order to develop the EIT, we try to apply the generalized vector sampled pattern matching (GVSPM) method to the inverse problem accompanying with EIT. As an initial test experiment of EIT development, we try to evaluate a resistance distribution in a planer circuit by measuring entire nodal voltages while changing the electrodes for current injection. As a result, it is revealed that a fairly good result could be obtained as an initial test example.

Keywords.

Generalized vector sampled pattern matching (GVSPM) method, Electrical impedance tomography