

ウェーブレット変換に拠る高精度磁束分布計算

藪並 隼人 早野 誠治 斎藤 兆古
法政大学工学部情報電気電子工学科

本論文は、有限要素法と磁気回路法の接点を見出し、磁気回路法で使われる技術者の経験的要素を有限要素法へ導入して、実用的な電磁機器の設計へ寄与できる現代磁気回路理論を提案するものである。さらに、この現代磁気回路理論による磁束分布にウェーブレット変換を適用した結果、ウェーブレット変換は磁束分布を評価するために有用な方法であることを報告する。

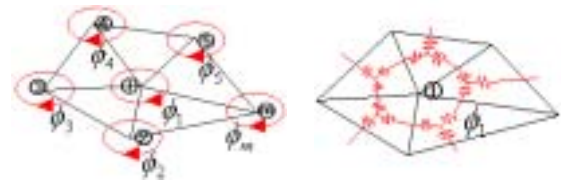
1. はじめに

近年のデジタル計算機の高性能化と小型化、ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし、いわゆる、デジタル計算機がパーソナルコンピュータ(Personal Computer, 以下、PC と略記)と呼ばれる高級・多機能文房具として使われるようになった。このため、有限要素法や境界要素法で代表される電磁界の数値解析は、PC で実行可能な環境になり、この意味で、既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている[1,2]。しかしながら、現実問題として、汎用パッケージで実用的な電磁機器の解析が容易に行え、その結果が実際の設計へ反映されているであろうか？答えは否である。実際は、極めて単純な例を除き、定性的な電磁界分布の傾向を把握する程度の実用性しか期待できない。この問題点を踏まえ、実際の電磁機器の電磁界解析を行う方法は以下に示す二方法が考えられる。第一は磁気回路法である[3,4]。古典的な磁界分布解析の工学的近似手法である磁気回路法は、平均的であれ、現実の非線形磁気装置の解析を可能とし、装置の設計に寄与している。磁気回路法は、技術者の経験的要素に基づくため、その数学的根拠に疑問の余地がある。しかし、実用的な結果を与える現実的方法である。第二は有限要素法に代表される数値解析法である。有限要素法などの数値解析法は、数学的根拠が明確である反面、現実の設計に生かされにくい側面をもつ。筆者らは、このような現状を踏まえ、有限要素法と古典的磁気回路法の接点を見出し、数学的背景が明確な磁気回路法を確立する一方途、現代磁気回路理論を提唱してきた。

本論文では、我々の提唱するこの現代磁気回路理論による磁界分布にウェーブレット変換を適用した結果、磁界分布を評価する上で有効な評価方法であることを報告する。

2. 現代磁気回路理論

2.1. 二次元現代磁気回路理論



(a)三角形一次有限要素法 (b)古典的磁気回路法
図1. 有限要素法と古典的磁気回路法のメッシュシステム

まず、古典的磁気回路法を有限要素法で置き換えることを考える。図1(b)は図1(a)の有限要素法の離散化したメッシュを磁気回路で表現したものである。有限要素法は、図1(a)に示すように各節点に電流が均等に振り分けられているものとして、それぞれの節点に対する磁束のループ方程式を解くことにより、各節点ポテンシャルを求めることを意味する。それに対し、古典的磁気回路法は図1(b)に示すように、一つの節点ポテンシャルを取り囲む直列の磁気回路を解くことにより、その節点ポテンシャルを求めることを意味する。

従って、古典的磁気回路方程式が三角形一次有限要素法から導かれる。この考えに基づき、数学的背景が不明確な古典的磁気回路法を数学的背景が明確な有限要素法で置き換えて解析する方法が、二次元の現代磁気回路理論の基本的な原理である[5]。

2.2. 準三次元的な現代磁気回路理論

図2の左図に示す立方体形状において、左から右方向に通る磁束は、図2の右図に示すように二次元の平行面のスライスに分割した形状の磁気抵抗を考えることにより、容易に計算することができる。これは最も簡単な場合であるが、この考え方を一般化し、本論文で提唱する有限要素法に基づく現代磁気回路理論は準三次元的な磁気回路へ一般化することができることは明らかであろう。



図 2 . 立方体の細分化



図 5 . 対角線面に沿った分割

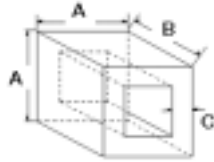


図 3 . 中空部分を有する立体形状

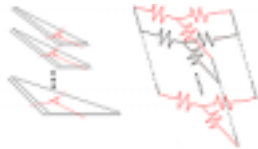


図 6 . 並列接続された磁気抵抗

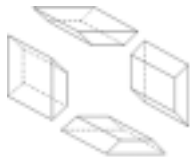


図 4 . 4 個の台形への分割



図 7 . 台形全ての磁気抵抗

ここで、図 3 に示す中空部分を有する立体形状の磁気回路を考える。まず、この立体形状は図 4 に示すように 4 個の同一形状の台形に分割することができる。さらに、図 5 に示すように分割された各々の台形を対角線面に沿って 2 個の 5 面体に分割した後、それぞれの 5 面体を水平方向に m 個の平行面状スライスに分割する。

m 個の平行面状スライスに分割された全体の磁気抵抗、すなわち、図 5 の右側に示す 5 面体の水平方向の磁気抵抗は、図 6 に示すように m 個の磁気抵抗を並列接続することで計算される。(1)式は図 6 に示す合成の磁気抵抗値を与える。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{R_{TOTAL}} &= \sum_i \frac{1}{R_i} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\mu B \cdot C/m}{\frac{A-2C}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{A-2C}{2}\right) \cdot (i-1)/m} \end{aligned} \quad (1)$$

(1)式で $m \rightarrow \infty$, $C/m = dx$, $i/m = x$ とすれば、リーマン積分の適用が可能となり、その結果、(2)式のように合成抵抗が計算される。

$$R_{TOTAL} = \frac{C}{\mu B \log \left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (2)$$

(2)式は 4 個に分割された台形をさらに 2 分割して得られた 5 面体の磁気抵抗である。したがって、台形全体としての磁気抵抗は(2)式の磁気抵抗を 2 個直列に接続したものである。すなわち、(3)式で与えられる。

$$R_{Whole-trapezoid} = \frac{2C}{\mu B \log \left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (3)$$

図 7 は(3)式の計算を図式的に示したものである。以上のように、他の台形についても同様に磁気抵抗が計算され、最終的に図 3 に示す中空部分を有する立体形状の円周方向の全磁気抵抗は、(3)式の磁気抵抗を直列に 4 個接続したものであり、(4)式で与えられる。

$$R_{Whole} = \frac{8C}{\mu B \log \left(\frac{A-2C+2C^2}{A-2C} \right)} \quad (4)$$

ここまでで、図 3 に示すような中空四角形の磁気抵抗を我々の提唱する現代磁気回路理論から求めた。ここでは、中空四角形を中空 n 角形へ拡張する。

まず、図 3, 4 に示したように四角形の中空部分を有する四角柱は 4 個の同一形状の台形に分割することができることより、中空 n 角形は n 個の同一形状の台形に分割できることは明らかである。

この n 個の台形を、四角形の場合と同様に、対角線面に沿って 2 個の 5 面体に分割し、それぞれの 5 面体の磁気抵抗を計算する一般化式は(5)式となる。

$$R_{n-5} = \frac{1}{\int_0^C \left[\frac{\mu B}{\frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan \left[\frac{(n-2)}{2n} \right]}} + \frac{\mu B}{\frac{2A}{n} - \left[\frac{2A}{n} - \frac{C}{\tan \left[\frac{(n-2)}{2n} \right]} \right] x} \right] dx} \quad (5)$$

(5)式から、中空 n 角形の全磁気抵抗は(6)式となる。

$$R_{n-total} = R_{n-5} \times 2 \times n \quad (6)$$

2.3 . 中空 n 角形の磁気抵抗の評価

ここで、(4)式から磁気抵抗の単位を考えると、磁気抵抗の単位はインダクタンスの逆数、すなわち、 $1/H$ もしくは、 A/Wb である。

ここでは、本論文で提唱する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求めるインダクタンスと、解析的に求めるインダクタンスを比較することにより、準三次元磁気抵抗の評価を行う。

中空部分を有する立体形状において、外径 0.5m、高さ 1m で一定とし、内径を 0.4m から 0.01m まで変化し、さらに、角数を 4 から 512 まで変化させた場合のインダクタンスの変化を図 8 に示す。

図 8 から、高さ 1m、外径 0.5m、内径 0.01m の中空 512 角形の時にインダクタンスは最大の 32.2541mH となることがわかる。また、外径 1m、内径 0.1m で、角数の如何にかかわらず、インダクタンスはほぼ 32mH で一定値となる。

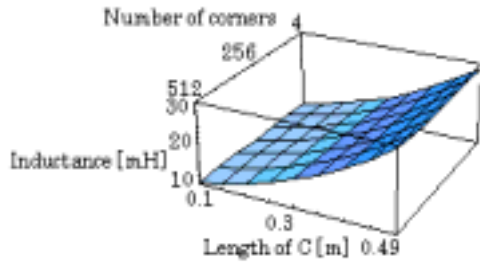


図 8 . 角数と内径を変化させた場合のインダクタンスの変化

(7)式は、半径 0.5m の円形断面をもつ、透磁率 μ の無限長導体において、電流が断面を一樣な密度で流れている場合の単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解である[6]。

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right) \right\} = 39.8087 \text{mH} \quad (7)$$

この半径 0.5m の円形断面をもつ、単位長さ当りの自己インダクタンスの厳密解 39.8087mH と、外径 0.5m, 内径 0.01m, 高さ 1m の 512 角柱に対する現代磁気回路理論による磁気抵抗から求めたインダクタンス 32.2541mH を比較すると、頭一桁の数値は一致する。

つぎに、導体の中心から離れるに従って変化する磁束密度を勘案するために、外径 0.5m, 内径 0.01m, 高さ 1m の 512 角柱を多層の 512 角形へ分割し、合成磁気抵抗を計算し、インダクタンスを計算する。図 9 は、層数とインダクタンスの関係を示す。

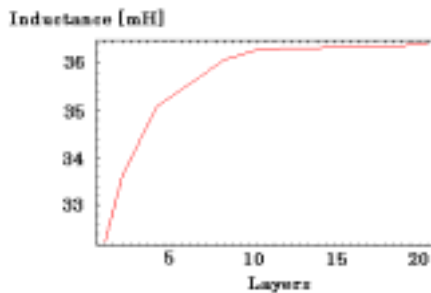


図 9 . 層数の増加に伴うインダクタンスの収束過程

図 9 より、層数の増加に伴い、インダクタンスの値がより厳密解へ収束していることが確認できる。すなわち、磁束の広がりや並列の準三次元磁気抵抗によって勘案され、解析解へ収束したものと思われる。

よって、本論文で提案した準三次元磁気抵抗の妥当性が検証された[7]。

2.4 . 現代磁気回路理論による磁束分布

多層の 512 角形へ分割した各層の磁気抵抗に流れる磁束を計算することにより、断面の磁束分布を求めることができる。図 10 に層数を変化させたときの各磁束分布を示す。図 10 より、層数が多いほど精度のよい磁束分布が得られていることがわかる。

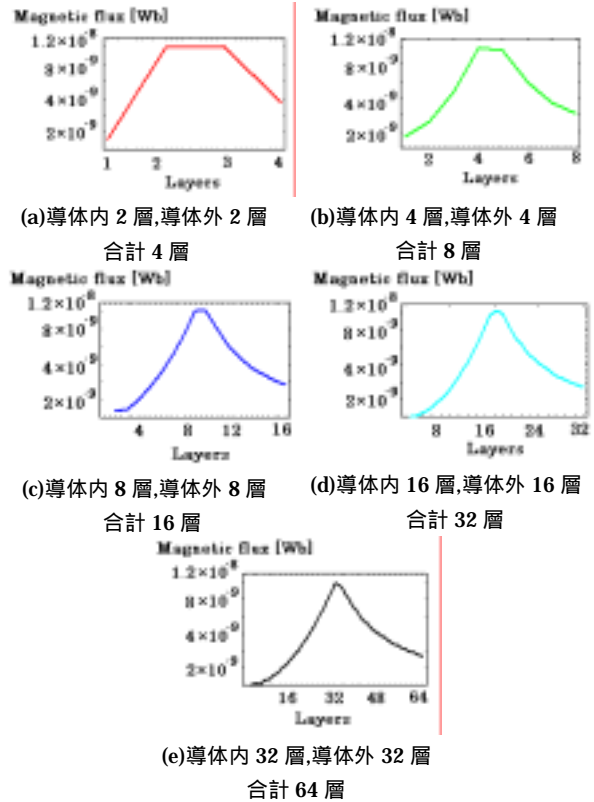
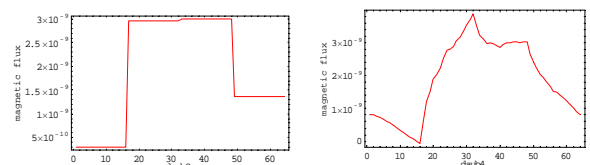


図 10 . 磁束分布

3 . ウェーブレット変換の適用

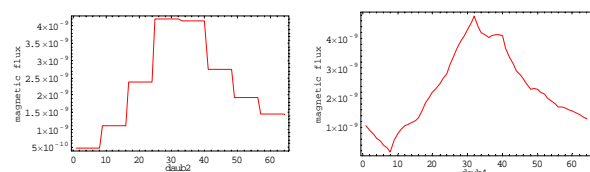
本章では、ウェーブレット変換を用いて 64 層の磁束分布を、4,8,16 層の磁束分布から再構成することを考える。基本的な考え方は、以下に述べる通りである。

まず、4,8,16 層の磁束分布のウェーブレットスペクトラムをそれぞれ計算する。次に、それらのウェーブレットスペクトラムが 64 次になるように 0 を追加する。最後に、その 64 次にしたウェーブレットスペクトラムをウェーブレット逆変換することにより、4,8,16 層から 64 層の磁束分布を再構成する。図 11-13 は再構成した磁束分布を示したものである。

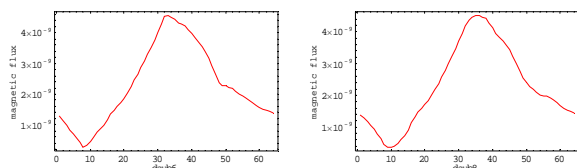


(a)Daubechies 2nd (b)Daubechies 4th

図 11 . 4 層から 64 層への再構成

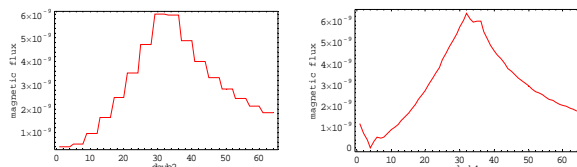


(a)Daubechies 2nd (b)Daubechies 4th

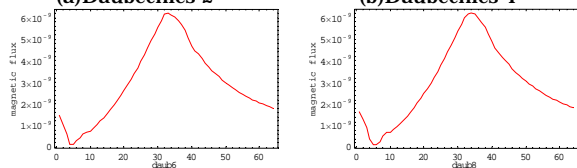


(c)Daubechies 6th (d)Daubechies 8th

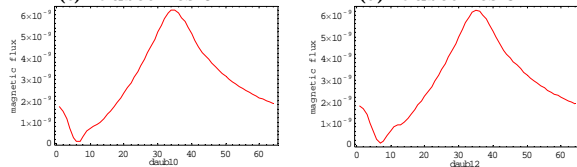
図 12 . 8 層から 64 層への再構成



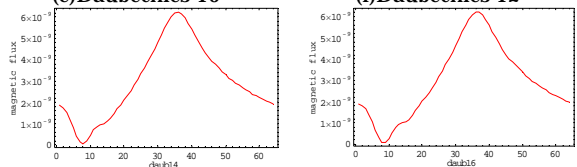
(a)Daubechies 2nd (b)Daubechies 4th



(c)Daubechies 6th (d)Daubechies 8th



(e)Daubechies 10th (f)Daubechies 12th



(g)Daubechies 14th (h)Daubechies 16th

図 13 . 16 層から 64 層への再構成

ここで、図 11-13 に示す再構成された磁束分布の精度を検証するために、それらと図 10(e)に示す厳密な 64 層の磁束分布との相関係数を計算した結果を表 1 に示す。

表 1 . 相関係数

Base Func.	4 → 64	8 → 64	16 → 64
Daub2	0.844373	0.952552	0.986378
Daub4	0.918141	0.981794	0.993918
Daub6	-----	0.974676	0.992275
Daub8	-----	0.943508	0.98625
Daub10	-----	-----	0.976248
Daub12	-----	-----	0.962510
Daub14	-----	-----	0.945276
Daub16	-----	-----	0.924774

相関係数を示す表 1 から、少ない層数の磁束分布をウェーブレット変換で再構成しているにもかかわらず、比較的高精度に 64 層の磁束分布が再構成されていることが確認できる。

4. まとめ

本論文では、有限要素法に基づく現代磁気回路理論を提案した。

最初に、二次元の現代磁気回路理論を提案し、さらに、二次元の現代磁気回路理論を準三次元問題に拡張した。その結果、現代磁気回路理論において、二次元磁気抵抗から準三次元磁気抵抗への拡張は、リーマン積分を解くことに帰することを示した。

次に、準三次元磁気抵抗の妥当性を吟味するため、簡単な例題を通して、インダクタンスの計算を行った。その結果、本論文で提案した準三次元磁気抵抗は、磁束密度の変化を複数個の磁気回路で表現でき、厳密解との比較により極めて良好な精度を有することを述べた。

最後に、この準三次元的な現代磁気回路理論による磁気抵抗から磁束分布を描き、その磁束分布をウェーブレット変換により、多層の磁束分布に再構成することを試みた結果、比較的高精度で再構成することが可能であることが判明した。

参考文献

- [1]P.P Silvester and Ferrari, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge University Press (1990).
- [2]齋藤 兆古, " 応用電磁気学入門, " 法政大学大学院講義資料.
- [3]Y.Saito, "Three - dimensional analysis of nonlinear magnetostatic fields in a saturable reactor," Comp.Meths.Appl.Mech.Eng,Vol.13,No.1,Jan.,1978,North-Holland.
- [4]Y.Saito, "Three - dimensional analysis of nonlinear magnetodynamic fields in a saturable reactor,"Comp.Meths.Appl.Mech.Eng,Vol.22,No.3,June,1980,North-Holland.
- [5]藪並 隼人, 早野 誠治, 齋藤 兆古, "有限要素法に基づく磁気回路解析法", 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-00-118, (2000年6月).
- [6]山田 直平, "電気学会大学講座 電気磁気学(第二改訂版)", オーム社.
- [7]藪並 隼人, 早野 誠治, 齋藤 兆古, "有限要素法に基づく磁気回路解析法 準三次元問題への拡張 - ", 電気学会マグネティクス研究会資料, MAG-00-253, (2000年11月).

キーワード.

有限要素法、磁気回路法、リーマン積分、ウェーブレット変換

.....

Summary.

Magnetic Field Computation with High Accuracy by Wavelets

Hayato Yabunami Seiji Hayano Yoshifuru Saito

Department of Information, Electrical and Electronic Engineering, Hosei University

Previously, in order to carry out the three-dimensional magnetic field analysis in a most efficient manner, we proposed the theory of modern magnetic circuits based on finite elements discretization. This makes it possible to implement the three-dimensional magnetic field computation in a quite efficient manner similar to those of the conventional magnetic circuit theory. In the present paper, we try to apply the wavelet transform to a magnetic flux distribution in order to represent it by small computational effort. As a result, it is shown that the wavelet transform yields a fairly good distribution from small computation.

Keywords.

Finite Elements, Magnetic Circuit Theory, Riemann Integral, Wavelet Transform