

非線形最適化法による実験モード解析

石井 孝志

法政大学大学院工学研究科機械工学専攻

岩原 光男 御法川 学

法政大学工学部機械工学科

実験周波数応答関数から統計的に最も確からしいモード特性を同定できる非線形最適化法を使用し、モード特性を求める。ユーザによる使い易さを MATLAB によりプログラミングされた実験モード解析システムを使用する。本研究では、切り込みが入った円筒と RV リアパネルに適用し、同定されたモード特性と有限要素法による結果を比較・考察する。また、実験データの精度向上のために打撃試験装置を作製し、その有効性を検証する。

1. はじめに

現在でも多くの製品が、エンジニアの経験と勘により設計され、試作と実験の繰り返しにより開発されている。しかし、今後さらに厳しくなる設計条件を満たし、開発の効率化を図るためには従来の手法より精度を上げ、新たな手法を生み出したい。実験モード解析は、振動試験によって周波数応答関数を実験的に求め、その中に含まれる系の動的な性質をモード特性の形で抽出する一連の方法であり、振動解析の基盤技術として広く使用されている。また、コンピュータやソフトウェアの急速な進歩によって、設計段階における振動のシミュレーション解析の利用が身近になりつつある。本研究では、モード特性同定法である非線形最適化法を使用し、実験対象のモード特性を求める。実験と同時に、対象物を有限要素でモデル化し、計算によりモード特性を求める。第一段階として実験結果と計算結果が一致するように正確に行いたく、切り込みが入った鉄製の円筒を対象にした。小型 RV 車の鉄板製後部床板（リアパネル）でも同様にモード特性を求め、実験と計算の比較を行う。

Fig.1 に本研究の実験モード解析手法を示す。本研究で使用した実験モード解析システムは、モード特性を同定する非線形最適化法の部分は FORTRAN で、ユーザーインターフェイスと描画の部分は MATLAB で構築されており、モードアニメーションを見ることができる。

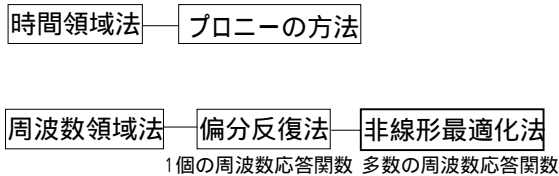


Fig.1. Experimental modal analysis technique

2. 非線形最適化法

モード特性同定に使用した非線形最適化法を簡略に説明する。コンプライアンス周波数応答関数（FRF）の理論式を G とすると、 G は角振動数 ω とモード特性 $\{ \}$ の関数として理論的に定式化される。一方、周波数点 ω_i における FRF の理論式 G_i に対応する実験データを

y_i で表す。多点応答の場合に、同時に参照する FRF の数を m 、対象周波数範囲内の周波数点の数を N とする。FRF は複素数なので、実部を $i = 1 \sim N$ 、虚部を $i = N + 1 \sim 2N$ に対応させる。複数の FRF を同時に処理するために、これらのデータを直列に並べれば、全データ数は $2Nm$ となる。

周波数応答関数の表現式に含まれるモード特性を振動試験により得られる周波数応答関数の実験データに最も適合するように同定する。まず実験データ y_i と FRF の理論式 G_i との差を実験データに混入する誤差とみなし、その影響を最小にすることを考える。そのためには、実験で得られる周波数応答関数に混入している誤差が正規分布であると仮定すれば、次に示す尤度 R が最大になればよい。

$$R = \prod_{i=1}^{2Nm} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu_i} \exp \left\{ -\frac{(y_i - G_i)^2}{2\mu_i^2} \right\} \right] \quad (1)$$

μ_i は、角振動数 ω_i における実験データ y_i の母分散である。有限回の実験では、母分散の厳密な値を得ることはできないので、ここではその代わりに、実験で得られる y_i の分散を μ_i の近似値として使用する。式(1)における尤度 R が最大になるためには、次の重みつき残差 2 乗和 S が最小になればよい。

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2Nm} W_i (y_i - G_i)^2 \quad (2)$$

ここで h を比例定数として

$$W_i = \frac{h}{\mu_i^2} \quad (3)$$

W_i は、式(2)の最小 2 乗法の重み係数とみなされる。式(3)より、モード特性の同定に使用する重み係数としては分散の逆数に比例する量を採用すると、統計的に正しいことがわかる。

式(2)の重みつき残差 2 乗和 S が最小となるように、理論式 G におけるモード特性 $\{ \}$ を繰り返し計算で求める方法が偏分反復法である。この方法は精度良くモード

特性を同定できるが、周波数応答関数の数が増加すると求めるモード特性の数が増加する。そのため計算時間が急増し、計算が収束しなくなる欠点がある。

2.1 変数の縮小

全モード特性 { } を F R F の理論式における線形項 { } (元数 u) と非線形項 { } (元数 v) に分ける。線形項は固有モード形状と剰余項に、非線形項は固有振動数とモード減衰比に対応する。周波数応答関数の数が増加すると線形項 { } の元数 u は増加するが非線形項 { } の元数 v は増加しない。非線形項 { } が求めれば、線形項 { } は繰り返し計算することなく線形最小 2 乗法により一度の計算で求めることができる。

非線形項 { } が求めた場合の線形項 { } をニュートン法で求める

$$[F]\{\alpha\} = -\frac{\partial S}{\partial \{\alpha\}} \quad (4)$$

$S/\{ \}$ は $S/\{ \}_i$ を成分にする列ベクトルであり、上式は線形最小 2 乗法の別表現である。ここで、行列 $[F]$ の s 行 t 列の要素は

$$F_{st} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_t} \quad (5)$$

$[F]$ の逆行列 $[F]^{-1}$ が存在すれば

$$\{\alpha\} = -[F]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \{\alpha\}} \quad (6)$$

式(6)右辺は非線形項 { } の関数なので、式(6)により線形項 { } は、重みつき残差 2 乗和 S の極小条件下で非線形項 { } の関数となる。F R F の理論式 $G_i(\{ \}, \{ \})$ において { } を { } で表したものを H_i とする。

$$H_i(\{\beta\}) = G_i(\{\alpha(\{\beta\}), \{\beta\}) \quad (7)$$

式(7)を k で微分すると

$$\frac{\partial H_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial G_i}{\partial \beta_k} + \sum_{j=1}^u \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial \beta_k} \quad (8)$$

$[F]$ が { } に関して一定という仮定下で、

$$\frac{\partial H_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial G_i}{\partial \beta_k} - \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \quad (9)$$

$(i=1 \sim 2Nm, k=1 \sim v)$

$\left\{ \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_s} \right\}$: s 行成分が $\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_s}$ である列ベクトル

$\left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\}$: s 行成分が $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k}$ である列ベクトル

式(9)により、理論式 H_i の k による微分係数を求め、ガウス・ニュートン法を使用して { } を求めることができる。 $[F]$ が { } に関して一定という仮定下なので、繰り返し計算を収束するまで行う。

2.2 入力データの縮小

入力データは、F R F 行列として与えられる。F R F 行列を縮小する方法としては、今までに特異値分解による方法と主成分分析による方法が知られている。しかし、これらは共に数学的に基底ベクトルを算出するものであり、その物理的意味は必ずしも明確ではない。また、これらの縮小自体にかなりの計算時間と記憶容量を必要としている。そこで、入力データに含まれる情報を保存したままで F R F を縮小するための、簡明で物理的意味が明確な方法を以下に示す。

各点の F R F を列ベクトルとして並べた F R F 行列 $[P]$ を次式で縮小する。

$$[Q] = [P][R] \quad (10)$$

$[P]$: 実験で得られた F R F 行列 2 N 行 m 列
 $[Q]$: 縮小された F R F 行列 2 N 行 n 列
 $[R]$: 縮小のための行列 m 行 n 列

n : 採用固有モード数
 N : 周波数点の数
 m : 周波数応答関数の数

行列 $[R]$ の作り方は、まず行列 $[P]$ (2 N 行 m 列) のうち各固有モードの共振峰に対応する虚数部分だけを取り出して行方向に並べた行列を作成する。次にこの行列の各成分の符号は同じで大きさだけを 1 に変える。このようにして作成した行列を $[R]^T$ にする。

式(10)の計算は、ある固有モードの共振峰付近の虚数部分の符号が同一になるように全 F R F を重ね合わせるようになる。この意味は、F R F 行列を測定する時の基準点を応答点として、ある固有モードが最も励起される様に各点の力の方向を調整して、同時に打撃加振する時の F R F を測定することに対応する。従って、固有モードの数に等しい数の F R F に、元の F R F 行列を縮小できる。実際に、あるモードが最も励起される様に各点を適正に加振することは大変困難である。しかし、各点毎の打撃試験等で F R F を多数取得しておけば、式(10)を用いて同時衝撃加振に相当する測定結果を容易に得ることができる。

式(10)の処理は各 F R F に - 1 または + 1 を掛けて加算することである。加算係数の絶対値が 1 なので、加算後の F R F においては不規則雑音は相殺されて減少する。いかに F R F の数が多くても、式(10)により、抽出する固有モードの数と同一の本数に F R F を縮小できる。

2.3 他の特徴

ヤコビアン行列の計算式を整理し、計算効率を向上させた。同定対象周波数外の固有モードの影響を除去するために、従来の剰余質量と剰余剛性に加えて境界外に 1 個の擬似モードを導入する。これにより、遠方の固有モード群を剰余質量と剰余剛性で、境界付近の固有モード

群を1個の擬似モードで表現することになり、境界付近の同定誤差5~10%が1%以下になる。対象周波数範囲を自動最適分割することにより、多数の固有モードを同時に同定できる。

3. 実験モード解析

実験対象である切り込みが入った鉄製の円筒を軽量な紐で懸架し、自由支持状態にした。長さ249mm、外径166mm、内径148mm、切り込み角度28.76度である。Fig.2に実験対象を示す。振動試験は、インパルス・ハンマによる打撃加振で行う。計測には、3軸加速度ピックアップを用いた。加速度ピックアップは固定し、加振点移動で打撃試験を行った。FFT分析器に入力されたインパルス・ハンマと加速度ピックアップによる2つの信号は、毎回フーリエ変換し、各加振点での(応答/加振)の伝達関数として記録した。加振点によっては、2方向または3方向で加振できる点があるので、その実験データを追加した。よって、振動モード形状は一部だけ2次元、3次元で得られる。

RVリアパネルは、上下1379mm、左右886.5mm、板厚0.8mmの軟鋼プレス成形品である。Fig.3に示す。小型RV車の後部荷物室の床板の一部であり、上部と下部は車輪との干渉を避ける形状になっている。左右方向に剛性増加のための補強リブがプレスに入っている。リアパネルは東京都立大学で実験されたものであり、本研究では非線形最適化法を使いモード特性を求める。実験条件は2本の紐で懸架して自由自由境界条件。インパルス・ハンマによる加振点移動で打撃試験を行い、加速度ピックアップにより1方向374点の応答を測定されたものである。



Fig.2. Cylinder containing the slit



Fig.3. RV rear panel

MATLAB言語を使用して構築した実験モード解析システムでは、まず、今回の実験対象用に加振点のXYZ座標、加振の方向余弦のデータを作成する。これは、同定により得られたモードアニメーションを見るために必要である。実測と理論的に加振の方向余弦を作成した。Fig.4に円筒の1,2次固有モード形状を、Fig.5にRVリアパネルの3次固有モード形状を示す。

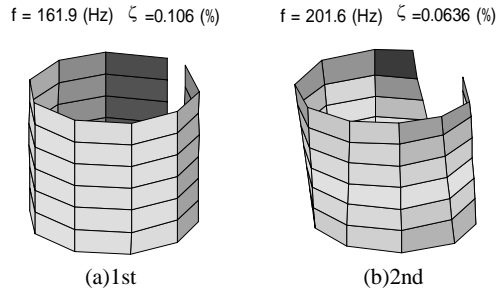


Fig.4. Experimental modal shape of the cylinder containing the slit

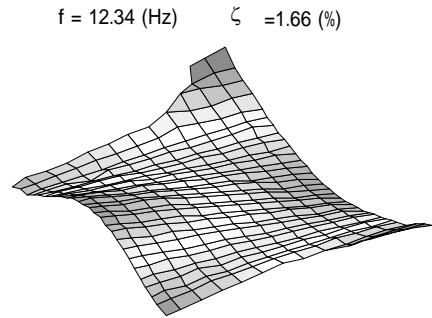


Fig.5. Experimental modal shape of RV rear panel

4. 有限要素法による計算と実験の比較

4.1 有限要素モデル

ALTAIR/HyperMeshで有限要素モデルを作成した。計算にはMSC/NASTRANを使用した。Fig.6に、切り込みが入った円筒のFEMモデルを示す。接点数9828、要素数1380である。Fig.7に、RVリアパネルのFEMモデルを示す。接点数3583、要素数3943である。

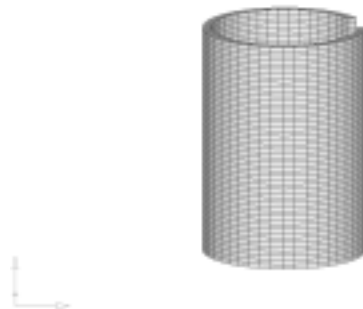


Fig.6. FEM model of the cylinder containing the slit

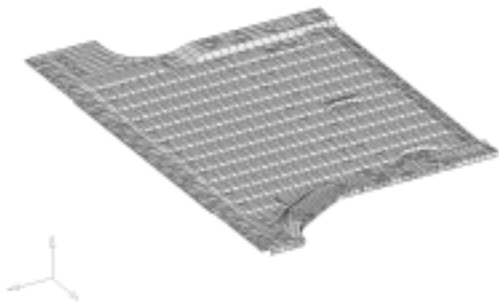


Fig.7. FEM model of RV rear panel

4.2 固有振動数の比較

Fig.8, 9に実験, 計算で得られた固有振動数の比較を示す. 図中, 点線は誤差+5%, 0%, -5%の線である. 切り込みが入った円筒は, 9次固有振動数, 約2kHzまで実験と計算が良く一致している. リアパネルは9次固有振動数, 約50Hzまでは実験と計算が良く一致している.

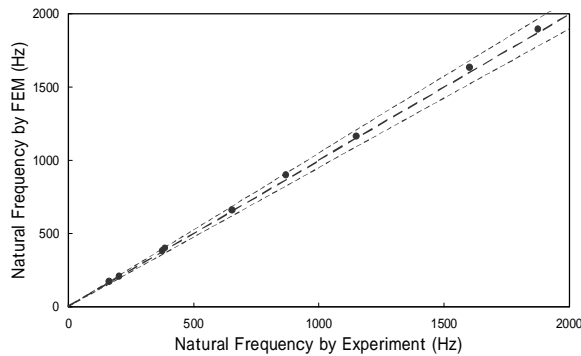


Fig.8. Comparison of natural frequency of the cylinder containing the slit

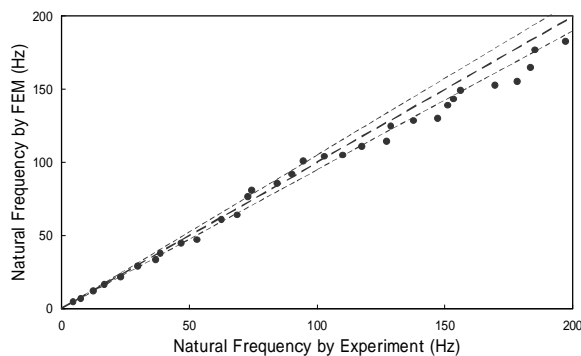


Fig.9. Comparison of natural frequency of RV rear panel

4.3 固有モード形状の相関性

MAC(Modal Assurance Criterion)の値は 実験固有モード形状と計算固有モード形状の相関を表す. これは, 実験固有モードを複素モードから実モードに変換し, 実験, 計算固有モードベクトルを正規化した後の内積の2乗である. Table 1に切り込みが入った円筒のMAC値を, Table 2にRVリアパネルのMACの値を示す. 円筒は2次元又は3

次元で得られた加振点でのMAC値である. 第2次固有モードは若干低い, 第1~9次固有モードまで1に近い値でよく実験と計算が一致している. 第2次モードは, 実験固有モードを完全に3次元で得られれば第2次固有モードのMAC値は改善されると考えられる. リアパネルは, 第1~5固有モードまでは1に近い値であるが, 第6固有モードから急に悪化する. 第6固有モード以上で実験と計算が一致しないのは, 計算に問題がある, と予想する.

Table 1. MAC value of the cylinder containing the slit

Mode No.	MAC
1	0.849
2	0.673
3	0.872
4	0.938
5	0.956
6	0.922
7	0.934
8	0.923
9	0.935

Table 2. MAC value of RV rear panel

Mode No.	MAC
1	0.927
2	0.949
3	0.980
4	0.978
5	0.970
6	0.882
7	0.592

5. 誤差対策

5.1 実験データの精度向上

実験モード解析における振動試験では, 加振力と応答を測定して, これらをフーリエ変換することにより周波数応答関数を得る. ここで, 質の良い周波数応答関数を得ることができれば, 適切な手法を使用して, 正確なモード特性を同定することができる. 逆に質の悪い周波数応答関数を実験で得た場合には, どのような方法を使用しても正確なモード特性を得られない場合が多い. よって, 実験データの質の重要性は高い. そこで, インパルス・ハンマを使った打撃試験装置を作製し, それを使用した場合の有効性を検証してみた. Fig.10に装置を示す. インパルス・ハンマを手で扱って振動試験を行った場合と打撃試験装置を使って振動試験を行った場合の関連度関数のグラフを Fig.11に示す. 5回の平均化処理を行った. 両者を比較すると打撃試験装置を使ったほうが入力と出力の線形的な相関を示す関連度関数の改善が見られる. 特に, 2kHz 付近からそれ以上の高周波数領域の改善が大きい. したがって, 打撃試験装置を使用した場合, より質の良い実験データを得られることができる. また人の負担も軽減できる. この装置は加振点移動には適していないので加振点移動で行った本研究の実験には使用できず, 検証するにとどまった.

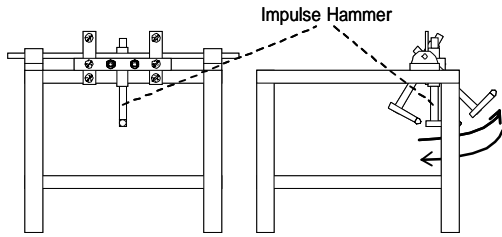


Fig.10. Impact test equipment

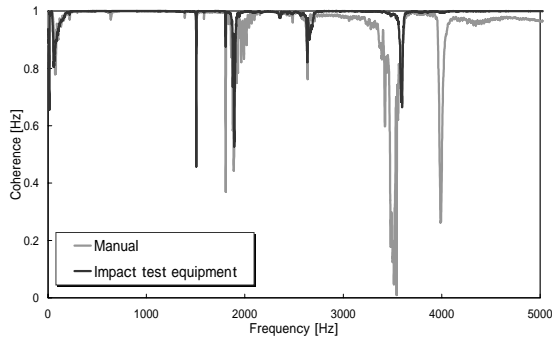


Fig.11. Coherence function of manual and impact test equipment

5.2 位相を考慮した固有モードの重ね合わせ

3軸加速度ピックアップを固定して、加振点移動法を使った場合、3組の固有モードが得られる。3組の固有モードの位相は測定上どうしても同一ではないことが多々ある。そこで、同一位相にして重ね合わせることによってSN比を下げる事ができる。切り込みが入った円筒のMAC値を比較することによって検証してみた。Table 3に、若干の改善がみられた第9次固有モードのMAC値を示す。その他では、ほとんど改善がみられなかった。これは、偶然誤差以外の誤差要因があるためだと考えられる。

Table 3. MAC value in consideration of the phase

Mode No.	MAC
9	0.941

6. まとめ

非線形最適化法を使用し、モード特性を求めた。また、実験と同時に有限要素法により実験対象をモデル化し、計算によりモード特性を求めた。固有モード形状を実験と計算と比較すると切り込みが入った円筒では、弾性モードで第9次まで、RVリアパネルでは、第5次までは実験と計算とが良く一致した。また、打撃試験装置を使用する場合の有効性が確認できた。

参考文献

- [1]岩原,長松, "周波数領域におけるモード特性同定法の研究(第1報)", 日本機械学会論文集(C編)第61巻, pp.4214-4221, 1995年.
- [2]岩原,長松, "周波数領域におけるモード特性同定法の研究(第2報)", 日本機械学会論文集(C編)第61巻, pp.4222-4229, 1995年.
- [3]岩原,長松, "周波数領域におけるモード特性同定法の研究(第3報)", 日本機械学会論文集(C編)第61巻, pp.4230-4237, 1995年.
- [4]長松昭男, "モード解析入門", コロナ社, 1993年.
- [5]モード解析ハンドブック編集委員会, "モード解析ハンドブック", コロナ社, 2000年.

キーワード.

振動、動特性、モード解析、有限要素法、非線形最適化法

.....

Summary.

Experimental Modal Analysis by Nonlinear Optimum Method

Takashi Ishii

Graduate School of Engineering, Hosei University

Mitsuo Iwahara Gaku Minorikawa

Department of Mechanical Engineering, Hosei University

Many products are designed by experience and intuition of engineers and are also developed by the repetition of a trial product and an experiment. However, the design conditions which become future still severer are fulfilled, and in order to increase efficiency of development. Raising accuracy etc. from the conventional technique is wanted to produce a new technique. In recent years, modal analysis is beginning to be effectively used for anticipation and elucidations of a vibration phenomenon. Experimental modal analysis with frequency response functions by vibration testing, is a series of methods of extracting the dynamic characteristics of the system in the form of the modal parameters. It is widely used as base technology of vibration analysis. Moreover, use of the simulation analysis of the vibration in a design step is becoming familiar by rapid progress of computer and software. The purpose of this study is identification of modal parameters with the nonlinear optimum method as the experimental modal analysis technique. This technique is correctly extended to a multi-point response in differential iteration method. User interfaces are constructed with MATLAB in personal computer. This system is applied for the cylinder containing the slit and RV rear panel. And the experimental modal parameters are compared with FEM results. Moreover, the impact test equipment is produced for the improvement in accuracy of experimental data, and the validity is verified.

Keywords.

Vibration, Dynamic Characteristic, Modal Analysis, FEM, Nonlinear Optimum Method