

# VRML による正多面体とアルキメデスの多面体の表示

松山 佐和  
法政大学計算科学研究センター

ここでは、正多面体とアルキメデスの多面体について、多面体間の相互関係を示しながら、VRML を用いて立体的に表示する手法を示す。VRML(Virtual Reality Modeling Language)は、画面上に奥行きをもつ仮想の三次元空間を表現し、その空間上に、静止立体や動的な立体を表示できる。また、VRML ファイルは、簡単な機能のテキストエディタがあれば作成でき、ブラウザソフトによりディスプレイ画面上に表示できるため、最も手軽に誰でも使用できるツールである。この手法はこれらの多面体のみならず様々な立体に応用できる。

## 1. はじめに

正多面体やアルキメデスの多面体は、形は幾何学的で単純ではあるが、その美しさに魅せられて、多くの文献や著書で紹介されている。また、児童書などでも図入りで丁寧に解説されている。これらの多面体は見る方向によっていろいろな形に見える。また、多面体間で相互に多くの関係を持っている。著者は 10 年ほど前に、これらの多面体の特徴や多面体間の関係を分かりやすく説明するため、プロッター出力用ソフトを用いて任意の方向から見た多面体の透視図や、任意の大きさの展開図を画用紙に出力する FORTRAN プログラムを開発した<sup>[5]</sup>。その後、急速なパソコンの機能向上と普及に伴いディスプレイ画面上に立体図形を簡単に表示できるようになった。そこで、今回は正多面体とアルキメデスの多面体をパソコンの画面上に三次元表示し、任意の方向から観察することにより、特徴を立体的に捉えることを目的として、新たに VRML(Virtual Reality Modeling Language)を用いた三次元表示用コードを作成した。

## 2. 頂点の座標と面の構成データ

多面体を、VRML を用いて画面に表示するには、多面体の各頂点の三次元座標と多面体の各面の構成データ（面を構成する頂点と面の表裏（多面体の外側か内側か）を示すデータ）が必要である。正多面体間や正多面体とアルキメデスの多面体の相互関係を示しながら、多面体の頂点の座標の求め方と面の構成データの作成方法を以下に記す。

### 2.1 正多面体

正多面体は正 4 面体、立方体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の 5 個である。正多面体の各頂点の三次元座標と面の構成データは幾何学的に比較的簡単に求められる。ここでは、立体の中心を原点として各頂点の座標を求めている。形の立体的特徴を捉えやすい方向から見た正多面体の VRML 表示画面を Fig.1 に示す。

正多面体をある方向から見ると正多角形に見える。この正多角形をペトリ-多角形という。5 個の正多面体をペトリ-多角形に見える方向から見た VRML 表示画面を Fig.2 に示す。正 4 面体は正方形に、立方体と正 8 面体は正 6 角形に、正 12 面体と正 20 面体は正 10 角形に見える。

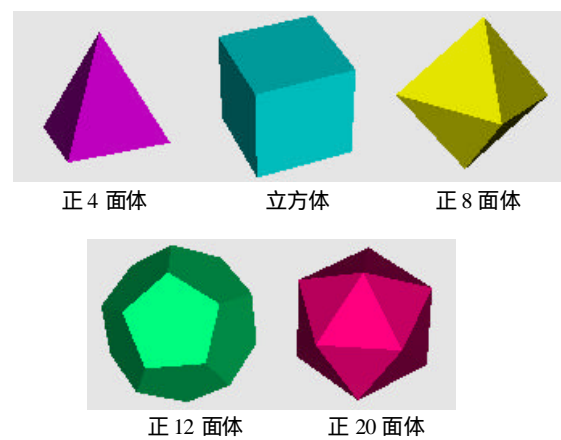


Fig.1 正多面体

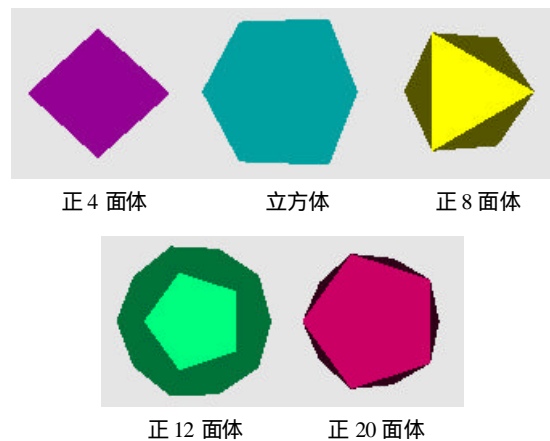


Fig.2 ペトリ-多角形

各正多面体の双対多面体の VRML 表示画面を Fig.3 に示す。双対多面体は正多面体の各面の中心を結んでできる多面体で、正 4 面体では正 4 面体が、立方体では正 8 面体が、正 8 面体では立方体が、正 12 面体では正 20 面体が、正 20 面体では正 12 面体ができる。Fig.3 では、それぞれの正多面体と双対多面体との関係が分かりやすく表示できている。



正4面体      立方体      正8面体



正12面体      正20面体

Fig.3 双対多面体

## 2.2 アルキメデスの多面体

### 2.2.1 切頭多面体

正多面体の各頂点（頭）を切り落としてできる立体を切頭多面体という。Fig.4に示すように、正4面体、正8面体、正20面体では正3角形の各面を正6角形になるように切り落とし、立方体では正方形の面を正8角形になるように切り落とし、正12面体では正5角形の面を正10角形になるように切り落とす。



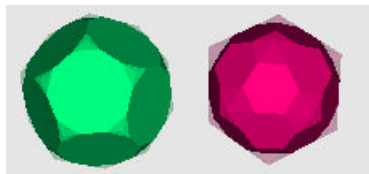
正3角形の面      正方形の面      正5角形の面

Fig.4 切頭多面体の面の切り口

5個の正多面体からそれぞれできる切頭多面体をもとの多面体とともにVRML表示した画面がFig.5である。正多面体の面上に新しい頂点と新しい面ができ、もとの正多面体の頂点を切り落としたあとに、新しい正多角形の面ができる。正4面体、立方体、正12面体では、1つの頂点に3個の面が集まっているので頂点を切り落としたあとに正3角形の面ができる。正8面体では1つの頂点に4個の面、正20面体では5個の面が集まっているのでそれぞれ正方形、正5角形の面ができる。



正4面体      立方体      正8面体



正12面体      正20面体

Fig.5 切頭多面体

Fig.4に示した面の切り口から、もとの正多面体の辺の長さ、頂点が切り落とされてできる切頭多面体の辺の長さとの比が決まるので、切頭多面体の各頂点の座標が求められる。また、切頭多面体の面はもとの正多面体の面上にできる面と頂点を切り落としたあとにできる面であるので、面の構成データも作成できる。

### 2.2.2 6-8面体と20-12面体

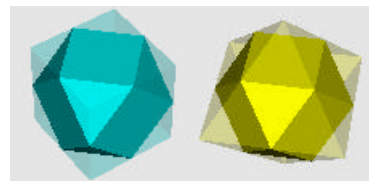
正多面体の各面をFig.6に示すように、各辺の中点を結び面で切り落としてできる立体が6-8面体と20-12面体である。前節の切頭多面体よりも深く切り落としている。



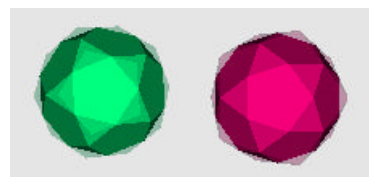
正3角形の面      正方形の面      正5角形の面

Fig.6 6-8面体と20-12面体の切り口

立方体を切り落としてできる立体と、正8面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、6-8面体と呼ばれる。同様に正12面体を切り落としてできる立体と、正20面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、20-12面体と呼ばれる。これをVRMLで表示した画面がFig.7である。正多面体の面上に新しい頂点と新しい面（もとの面と同じ形）ができる。さらにもとの正多面体を切り落としたあとに、切頭多面体と同様に新しい正多角形（正3角形、正方形、正5角形）の面ができる。



(立方体)      (正8面体)



(正12面体)      (正20面体)

Fig.7 6-8面体と20-12面体

Fig.6に示した面の切り口の関係から、もとの正多面体の辺の長さ、切り落とされてできる6-8面体および20-12面体の辺の長さとの比が決まるので、切頭多面体と同様の手順で各頂点の座標と面の構成データが作成できる。

### 2.2.3 小菱形6-8面体と小菱形20-12面体

正多面体の各面をFig.8に示すように、頂点と辺を切り落としてできる立体が小菱形6-8面体と小菱形20-12面体である。もとの正多角形の正3角形の面には正3角形が、正方形の面には正方形が、正5角形の面には正5角形ができ、各辺に沿って切り落とす時にできる面は正方形である。この条件からもとの正多面体の辺の長さ、新しい立体の辺の長さとの比が決まり、新しい頂点の座標が求

められる。



Fig.8 小菱形6-8面体と小菱形20-12面体の切り口

立方体を切り落としてできる立体と、正<sub>8</sub>面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、小菱形<sub>6-8</sub>面体と呼ばれる。同様に正<sub>12</sub>面体を切り落としてできる立体と、正<sub>20</sub>面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、小菱形<sub>20-12</sub>面体と呼ばれる。これをVRMLで表示した画面がFig.9である。正多面体の面上に新しい頂点と新しい面(もとの面と同じ形)ができ、もとの正多面体の頂点を切り落としたあとに、新しい正多角形(正<sub>3</sub>角形、正方形、正<sub>5</sub>角形)の面ができる。さらに辺に沿って切り落としてできる面は正方形になる。これらのことから、面の構成データが作成できる。

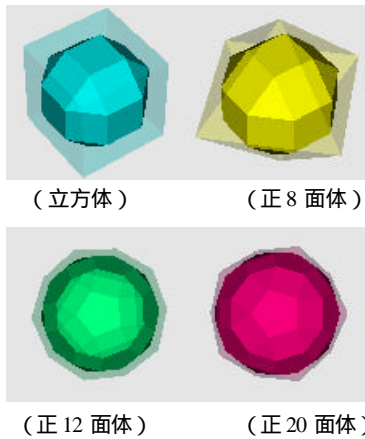


Fig.9 小菱形6-8面体と小菱形20-12面体

#### 2.2.4 大菱形<sub>6-8</sub>面体と大菱形<sub>20-12</sub>面体

正多面体の各面をFig.10に示すように、頂点と辺を切り落としてできる立体が大菱形<sub>6-8</sub>面体と大菱形<sub>20-12</sub>面体である。もとの正多角形の正<sub>3</sub>角形の面には正<sub>6</sub>角形が、正方形の面には正<sub>8</sub>角形が、正<sub>5</sub>角形の面には正<sub>10</sub>角形ができる。各辺に沿って切り落とす時にできる面は正方形である。この条件からもとの正多面体の辺の長さ、新しい立体の辺の長さとの比が決まり、新しい頂点の座標が求められる。



Fig.10 大菱形6-8面体と大菱形20-12面体の切り口

立方体を切り落としてできる立体と、正<sub>8</sub>面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、大菱形<sub>6-8</sub>面体と呼ばれる。同様に正<sub>12</sub>面体を切り落としてできる

立体と、正<sub>20</sub>面体を切り落としてできる立体はまったく同じ形であり、大菱形<sub>20-12</sub>面体と呼ばれる。これをVRMLで表示した画面がFig.11である。正多面体の面上に新しい頂点と新しい面(正<sub>6</sub>角形、正<sub>8</sub>角形、正<sub>10</sub>角形)ができ、もとの正多面体の頂点を切り落としたあとに、新しい正多角形(正<sub>6</sub>角形、正<sub>8</sub>角形、正<sub>10</sub>角形)の面ができる。さらに辺に沿って切り落としてできる面は正方形になる。これらのことから、面の構成データが作成できる。

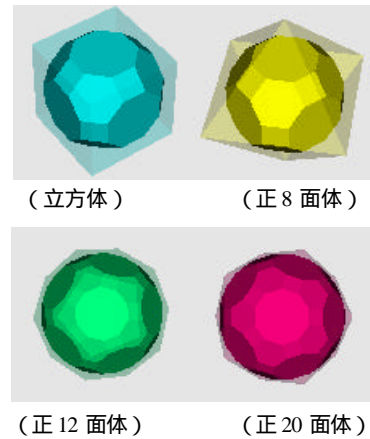


Fig.11 大菱形6-8面体と大菱形20-12面体

#### 2.2.5 ねじれ立方体とねじれ<sub>12</sub>面体

立方体または正<sub>12</sub>面体の各面(正方形と正<sub>5</sub>角形)について、Fig.12に示すように、面の中に面の中心を回転の中心として回転させた新しい面を作る。もとの正多面体の辺の両側にできた新しい4個の頂点を2つの正<sub>3</sub>角形の面で結ぶ。さらに、もとの正多面体の頂点を切り落としたあとに正<sub>3</sub>角形の面ができる。

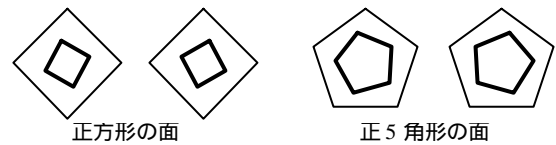


Fig.12 ねじれ立方体とねじれ<sub>12</sub>面体の切り口

新しくできる面が正<sub>3</sub>角形であることから、もとの正多面体の辺の長さ、新しい立体の辺の長さとの比、面の回転の角度が決まる。

立方体を変形してできる立体をねじれ立方体と呼び正<sub>12</sub>面体を変形してできる立体をねじれ<sub>12</sub>面体と呼ぶ。ねじれ立方体とねじれ<sub>12</sub>面体をFig.13に示す。もとの面に対する新しい面の回転の向きにより鏡像関係にある2つの立体ができる。

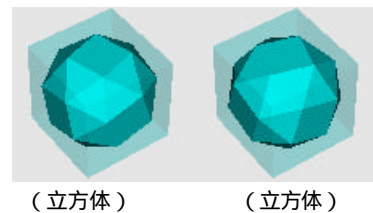
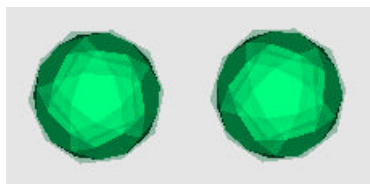


Fig.13 ねじれ立方体とねじれ<sub>12</sub>面体(続く)



(正 12 面体) (正 12 面体)

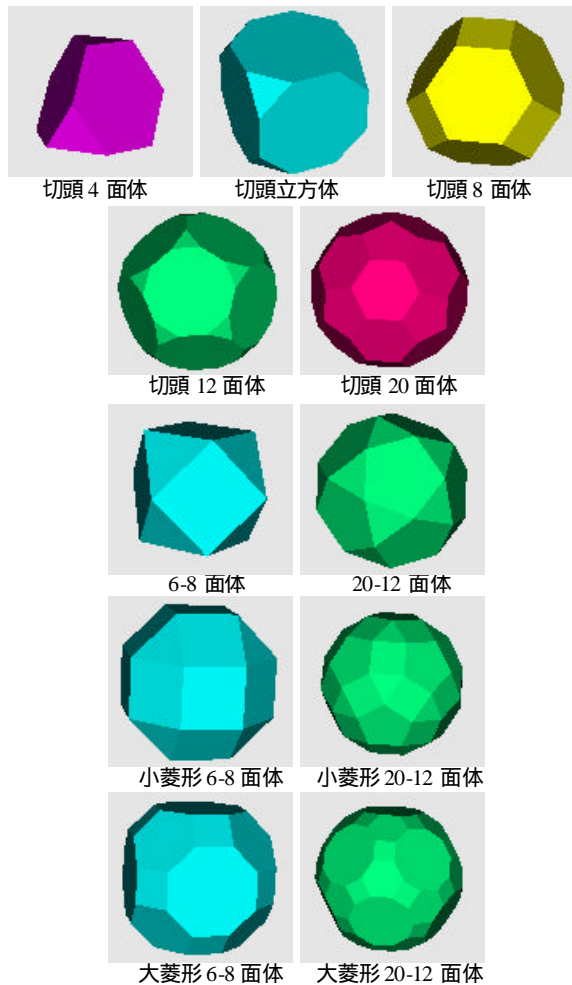
Fig.13 ねじれ立方体とねじれ 12 面体 (続き)

### 3. 多面体の VRML 表示

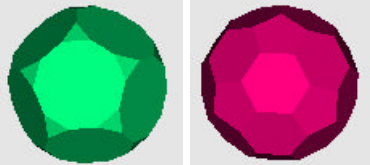
前章では、正多面体とアルキメデスの多面体の各頂点の座標と面の構成データの求め方を示した。多面体の形状や特徴、多面体間の相互関係等を分かりやすく手軽に表現するには、VRML が適している。

#### 3.1 立体座標の VRML 化

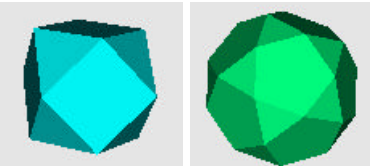
VRML では多面体の頂点の三次元座標値と面の構成データを指定することにより、任意の方向から見た多面体を仮想三次元空間上に表示できる。また、画面上に表示された立体をブラウザソフトによりいろいろな視点から表示し直して見ることができる。Fig.14 に VRML で表示したアルキメデスの多面体の一覧を示す。



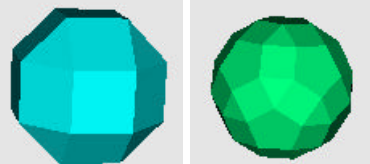
切頭 4 面体 切頭立方体 切頭 8 面体



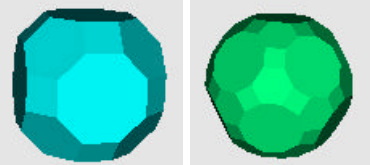
切頭 12 面体 切頭 20 面体



6-8 面体 20-12 面体

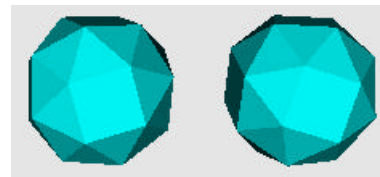


小菱形 6-8 面体 小菱形 20-12 面体



大菱形 6-8 面体 大菱形 20-12 面体

Fig.14 アルキメデスの多面体 (続く)



ねじれ立方体



ねじれ 12 面体

Fig.14 アルキメデスの多面体 (続き)

#### 3.2 立体の回転とアニメーション

前節の VRML コードにセンサーとインターポレーターの機能を設定して、アルキメデスの多面体を自動的に回転させて表示するアニメーションを作成した。Fig.15 はねじれ 12 面体を回転させたものである。

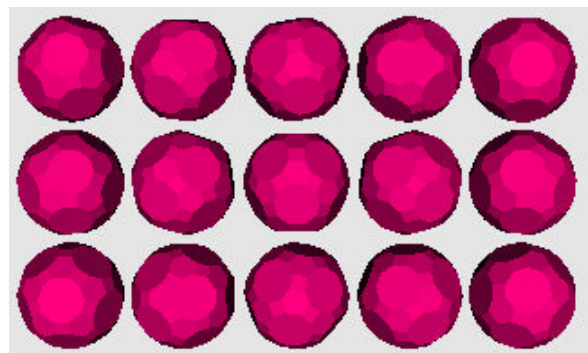


Fig.15 ねじれ 12 面体の回転

### 4. おわりに

正多面体とアルキメデスの多面体について、その幾何学的特徴や多面体間の相互関係を分かりやすく画面上に表示することを目的として、VRML コードを作成した。この方法は、正多面体とアルキメデスの多面体に限らず、立体の頂点の三次元座標と面を構成する頂点のデータを作成できれば、いろいろな立体に応用し、その特徴を仮想空間上に視覚的に示すことができる。

#### 参考文献

[1]Magnus J. Wenninger, "POLYHEDRON MODELS", Cambridge University Press, 1971.  
 [2]細谷治夫, "化学をつかむ", 岩波ジュニア新書.  
 [3]一松信, "正多面体を解く", 東海大出版会, 1983.  
 [4]宮下龍象, "正多面体 アルキメデスの多面体 星の多面体", 1992.  
 [5]松山佐和, "正多面体とアルキメデスの多面体", 法政大学計算科学研究センター研究報告, Vol. 6, 1993.

キーワード.

正多面体、アルキメデスの多面体、3次元表示、VRML

-----

Summary.

**Regular Polyhedra and Archimedean Polyhedra visualized by VRML**

Sawa Matsuyama  
Computational Science Research Center, Hosei University

This paper proposes the numerical method which visualizes Regular polyhedra and Archimedean polyhedra used by VRML (Virtual Reality Modeling Language). VRML is an effective representing language for static and animated dynamic 3D objects. VRML browsers, as well as authoring tools for the creation of VRML files, are widely available for many different platforms. The method can be applied to the visualizing of the various solid.

Keywords.

Regular polyhedron, Archimedean polyhedron, Three-dimensional visualization, VRML