$\boldsymbol{n}$次元双直交ウェーブレット変換とその応用

松山　佐和
法政大学計算科学研究センター

本論文では、離散値系ウェーブレット変換における数学的・物理的特徴を、1 次元、2 次元、3 次元ウェーブレット変換についての考え方を順に示す中で明らかにし、最終的に $\boldsymbol{n}$次元ウェーブレット変換へ発展させる。ここではドビッシーの 2 次基底関数を用いているが、各現象において適切な基底関数を選ぶことにより、周波数解析や画像処理への多次元ウェーブレット変換の可能性について述べる。

1. はじめに

ウェーブレット変換は、不連続関数を周波数領域でグルーピングした正弦波・余弦波を抽出する機能を有する。この機能を用いて必要なスペクトラムを抽出するにあたり、特別な予備知識を必要としないため、現在、工学・理学で最も広汎な応用が期待され、多くの研究が発表されている。しかし、ウェーブレット変換は用いる基底関数により抽出されるグルーピング周波数が異なるため、基底関数の選択法が難しく、現時点では試行錯誤の段階である事は否めない。本論文では、任意の直交基底関数の組み合わせを可能とする $\boldsymbol{n}$次元双直交ウェーブレット変換コードを開発したので、その有用性を幾つかの例題を用いて報告する。

2. ウェーブレット変換

2.1 離散値系ウェーブレット変換の考え方

2 個の数値データ x_1, x_2 からなるベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2)^T \tag{1}$$

の特徴をとらえるため、ベクトル $\mathbf{x}$ にある変換を施してベクトル $\mathbf{x}$ の要素を平均的情報と変化率情報に並びかえることを考える。

ベクトル $\mathbf{x}$ の平均的情報 x_s を要素 x_1 と x_2 の重み付き平均、変化率情報 x_d を要素 x_1 と x_2 の重み付き差分とすると x_s および x_d は

$$\begin{aligned} x_s &= c_0 x_1 + c_1 x_2 \\ x_d &= c_2 x_1 - c_3 x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

と表される。ただし、c_0, c_1, c_2, c_3 は重み定数である。式(2)の x_s, x_d を要素とするベクトル $\mathbf{x}'$ を変換行列 C による変換

$$\mathbf{x}' = C\ \mathbf{x} \tag{3}$$

と表すと、$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_s \\ x_d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix}$ である。次に、

$$\mathbf{x} = C^T \mathbf{x}' \tag{4}$$

が成り立つ、すなわち、ベクトル $\mathbf{x}'$ を変換行列 C の転置行列 C^T により変換することで、元のベクトル $\mathbf{x}$ を復元できるとすると、式(4)は $\mathbf{x} = C^T C\mathbf{x}$ と書き直せる。これより

$$C^T C = \begin{pmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & -c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。式(5)とベクトル $\mathbf{x}$ の要素 x_1, x_2 が等しいときには変化率情報 x_d を $\mathbf{0}$、すなわち微分を $\mathbf{0}$ にする条件

$$c_2 = c_3 \tag{6}$$

より c_0, c_1, c_2, c_3 を求めることができる。2 次式であるため解は複数個あるが、

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を選ぶと、変換行列は

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。式(7)の変換行列 C をドビッシー(Daubechies)の 2 次基底関数と呼ぶ。

次に、4 個の数値データからなるベクトル

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T \tag{8}$$

についてドビッシーの 2 次基底関数を使って各要素を平均的情報と変化率情報に並びかえることを考える。まず変換行列

$$W^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によりベクトル $\mathbf{x}$ を変換すると、

$$\mathbf{x}^{(1)} = W^{(1)}\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

でありベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素はベクトル $\mathbf{x}$ 全体の平均的情報および変化率情報を表しているとはいえない。そこで、重みつき和の要素を前方の要素へ、重みつき差の要素を後方の要素へ並びかえる変換行列、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

による変換を行うと、

$$\mathbf{x}^{(2)} = P\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

となる。ここでさらにベクトルの第 1 要素と第 2 要素にドビッシーの 2 次基底による変換を行う。変換行列は

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、この変換の結果は

$$\mathbf{x}^{(3)}=W^{(2)}\mathbf{x}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2+x_3+x_4)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}((x_1+x_2)-(x_3+x_4))\\ x_1-x_2\\ x_3-x_4\end{pmatrix}$$

となり、ベクトル $\mathbf{x}^{(3)}$ は元のベクトル $\mathbf{x}$ の全体的な平均情報、変化率情報を要素に持つといえる。この変換を

$$\mathbf{x}^{(3)}=W\mathbf{x}$$

と表せば

$$W=W^{(2)}PW^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\qquad(9)$$

である。式(9)の変換行列 W はドビッシーの 2 次基底関数のデータ数が 4 個の場合のウェーブレット変換行列である。また、

$$W^TW=I_4$$

が成り立つので、変換後のベクトル $\mathbf{x}^{(3)}$ から元のベクトル $\mathbf{x}$ を厳密に復元することができる。

次に冗長であるが 8 個の数値データからなるベクトル

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_6&x_7&x_8\end{pmatrix}^T\qquad(10)$$

についてドビッシーの 2 次基底関数を使って各要素を平均的情報と変化率情報に並びかえることを考えてみる。まず変換行列

$$W^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

によりベクトル $\mathbf{x}$ を変換すると、

$$\mathbf{x}^{(1)}=W^{(1)}\mathbf{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\\x_3+x_4\\x_3-x_4\\x_5+x_6\\x_5-x_6\\x_7+x_8\\x_7-x_8\end{pmatrix}$$

である。ここで、重みつき和の要素を前方の要素へ、重みつき差の要素を後方の要素へ並びかえる変換 $P^{(1)}$ と、前方へ並びかえられた重みつき和の要素について、さらに重みつき和と差をとる変換 $W^{(2)}$ を行う。ここで、

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$W^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&0&0&0&0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

である。この変換は

$$\mathbf{x}^{(2)}=W^{(2)}P^{(1)}\mathbf{x}^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\\x_5+x_6+x_7+x_8\\x_5+x_6-x_7-x_8\\\sqrt{2}(x_1-x_2)\\\sqrt{2}(x_3-x_4)\\\sqrt{2}(x_5-x_6)\\\sqrt{2}(x_7-x_8)\end{pmatrix}$$

となる。さらに並びかえ $P^{(2)}$ と、重みつき和と差をとる変換 $W^{(3)}$ を行う。ここでは $P^{(2)}$ と $W^{(3)}$ の行列要素の記述は省略する。この変換は

$$\mathbf{x}^{(3)}=W^{(3)}P^{(2)}\mathbf{x}^{(2)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8\\x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8\\\sqrt{2}(x_1+x_2-x_3-x_4)\\\sqrt{2}(x_5+x_6-x_7-x_8)\\2(x_1-x_2)\\2(x_3-x_4)\\2(x_5-x_6)\\2(x_7-x_8)\end{pmatrix}$$

となり、ベクトル $\mathbf{x}^{(3)}$ は元のベクトル $\mathbf{x}$ の全体的な平均情報、変化率情報を要素に持つといえる。この変換を $\mathbf{x}^{(3)}=W\mathbf{x}$ と表せば

$$W=W^{(3)}P^{(2)}W^{(2)}P^{(1)}W^{(1)}\qquad(11)$$

である。式(11)の変換行列 W はドビッシーの 2 次基底関数のデータ数が 8 個の場合のウェーブレット変換行列である。また、これまでと同様に $W^TW=I_8$ が成り立つ。

ベクトル $\mathbf{x}^{(3)}$ の第 1 要素をマザーウェーブレットスペクトラムと呼ぶ。この要素はベクトル $\mathbf{x}$ の全要素の平均的情報を持ちレベル 0 のスペクトラム、第 2 要素はベクトル $\mathbf{x}$ の前半の要素と後半の要素の変化率情報を持ちレベル 1、第 3,4 要素は前半の要素の変化率情報と後半の要素の変化率情報を持ちレベル 2、第 5 から 8 要素はそれぞれ隣接する要素の変化率情報でありレベル 3 のスペクトラムと呼ぶ。レベル 0 は一定値(直流分)、レベル 1,2,3 はそれぞれ第 1,2,3 次高調波成分に対応する。各レベルのウェーブレットスペクトラムをそれぞれ個々に逆変換すれば、ベクトル $\mathbf{x}$ の一定値(直流)と各高調波成分を分離して取り出すことができる。これをウェーブレット変換の多重解像度解析という。多重解像度解析で得られたそれぞれの成分の和は元のベクトル $\mathbf{x}$ を再現する。

2.2 高次の基底関数

ここで、係数 4 個 c_0,c_1,c_2,c_3 をもち、周期性を仮定した変換行列(2 のべき乗の正方行列)

$$C=\begin{pmatrix}c_0&c_1&c_2&c_3&0&0&.&0&0&0&0\\c_3&-c_2&c_1&-c_0&0&0&.&0&0&0&0\\0&0&c_0&c_1&c_2&c_3&.&0&0&0&0\\0&0&c_3&-c_2&c_1&-c_0&.&0&0&0&0\\.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.\\0&0&0&0&0&0&.&c_0&c_1&c_2&c_3\\0&0&0&0&0&0&.&c_3&-c_2&c_1&-c_0\\c_2&c_3&0&0&0&0&.&0&0&c_0&c_1\\c_1&-c_0&0&0&0&0&.&0&0&c_3&-c_2\end{pmatrix}\qquad(12)$$

を考える。式(12)の行列は係数 c_0,c_1,c_2,c_3 を順番に並べたものと、逆順に並べて偶数番目の係数の符号をかえたものを組み合わせ、それを 2 要素毎にずらせ、最後は折り返して並べたものである。2 のべき乗個の数値データを

要素とするベクトル **x** に対して、行列 C による線形変換 $\mathbf{x}' = C\mathbf{x}$ では、ベクトル $\mathbf{x}'$ の第 1 要素は **x** の要素 1 から 4 までの係数 c_0, c_1, c_2, c_3 による重みつき和であり、第 2 要素は **x** の要素 1 から 4 までの係数 c_0, c_1, c_2, c_3 による重みつき差である。言い換えれば式(12)の行列の第 1 行は重みをつけた積分演算に対応するデジタルフィルターであり、第 2 行は重みをつけた微分演算に対応するデジタルフィルターである。第 3,4 行はそれぞれ要素 3 から 6 までに対する積分と微分演算を行うことを意味する。したがって、積分演算、微分演算は 2 次基底関数の場合と同様にベクトルの 2 要素ずつ循環する形で行われる。

　ここで、逆変換を可能とするため次の条件

$$C^T C = I \tag{13}$$

を満たすとする。ここで I は C と同じ次数を持つ単位行列である。式(13)に次の 2 つの条件

$$c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0 \tag{14}$$

$$0c_3 - 1c_2 + 2c_1 - 3c_0 = 0 \tag{15}$$

を追加する。式(14)は隣り合った 4 個のデータが同じ(一定値)であれば、重みつき差分は 0 になること、式(15)は隣り合った 4 個のデータが単調増加であれば重みつき差分は 0 になることを意味する。すなわちデータが 2 次関数以上の変化率を持つとき、第 1 段階の差分演算(前節の $W^{(1)}$ の変換)を受けた項は非ゼロの値をもつ。したがって、第 2 段階の差分演算($W^{(2)}$ の変換)では、第 1 段階の重みつき和で 2 次関数以上の変化率を抽出することになる。ここで式(13),(14),(15)より、関数の対称性を考慮して係数

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

を決める。これをドビッシーの 4 次基底関数と呼ぶ。ドビッシーは 2 次基底関数の条件として追加した式(6)や 4 次基底関数の条件として追加した式(14),(15)のように低次の変化分を系統的に 0 とする条件を付加することで高次の基底関数を導き出している。

　4 次基底関数の変換ではデータがどのように並びかえられているかをみると、データが 4 個の場合では、変換後のベクトルの第 2 要素(第 2^{2-1} 要素)までが重みつき和でレベル 0 のスペクトラムであり、残りの要素が隣り合った 4 個のデータの重みつき差分でレベル 1 のスペクトラムである。データが 8 個の場合では、変換後のベクトルの第 2 要素(第 2^{2-1} 要素)までが重みつき和でレベル 0、次の要素から第 4 要素(第 2^2 要素)までが重みつき差分でレベル 1、残りの要素が隣り合った 4 個のデータの重みつき差分でレベル 2 のスペクトラムである。一般にデータ数が 2^n 個、基底関数の次数が 2^k 次のとき、レベル 0 のスペクトラムは第 1 から 2^{k-1} 要素、レベル 1 は第 $2^{k-1}+1$ から 2^k 要素、レベル 2 は第 2^k+1 から 2^{k+1} 要素、・・・、レベル l ($l = n-k+1$)は第 $2^{n-1}+1$ から 2^n 要素である。

2.3　1次元ウェーブレット変換の応用

　ここでは 250hPa 高度の風データを使用したウェーブレット変換の例を示す。Fig.1 は 140E,35N 地点の 1989 年 5 月から 1994 年 8 月の月平均風速(東西成分)である。

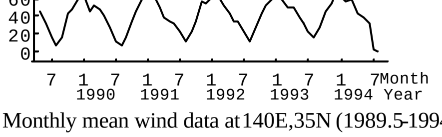

Fig.1 Monthly mean wind data at 140E,35N (1989.5-1994.8)

このデータをドビッシーの 2 次と 4 次基底関数でウェーブレット変換し、変換後のスペクトラムを 0.5 に圧縮して復元した風のデータが Fig.2、Fig.3 である。

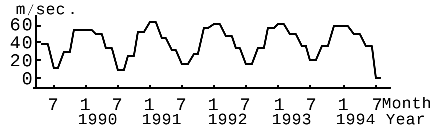

Fig.2 Recovered wind data by the 2nd-order base function

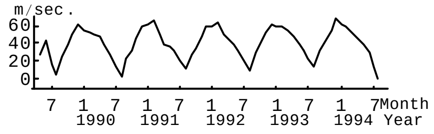

Fig.3 Recovered wind data by the 4th-order base function

基底関数にドビッシーの 2〜8 次を使用し圧縮・復元後の復元率(元のデータと復元後のデータの相関係数)を Fig.4 に示す。このデータでは基底関数の次数を増しても相関係数は大きくならないことがわかる。

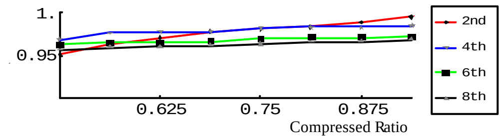

Fig.4 Correlation Coefficients

　また、多重解像度解析の結果をドビッシーの 2 次、4 次基底関数についてそれぞれ Fig.5、Fig.6 に示す。

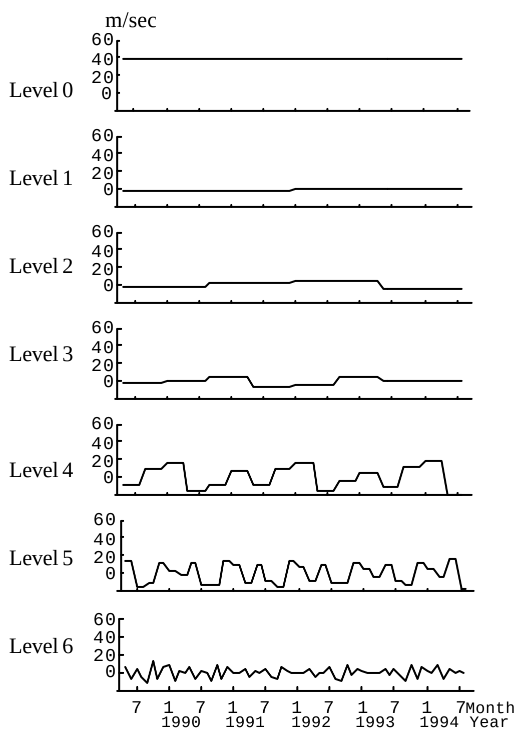

Fig.5 Multiresolution analysis by the 2nd-order base function

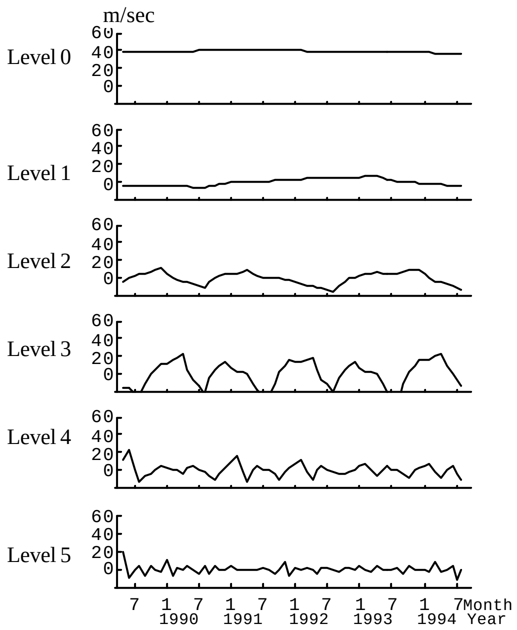

Fig.6 Multiresolution analysis by the 4th-order base function

3. 2次元ウェーブレット変換

3.1 正方行列のウェーブレット変換

一般に X が $n\times n$ 個の数値データからなる正方行列であるとき X のウェーブレット変換は

$$X^{'} = (W(WX)^T)^T = WXW^T \tag{16}$$

とかける。ここで W は $n\times n$ のウェーブレット変換行列である。式(16)の変換について、変換過程を追ってみる。

2×2 の正方行列 X をドビッシーの 2 次基底関数の変換行列 W を用いてウェーブレット変換する。ここで、

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},\ W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。まず、 X に W を左から掛ける演算 WX は X の列をそれぞれウェーブレット変換したもので、

$$WX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ x_{11}-x_{21} & x_{12}-x_{22} \end{pmatrix}$$

である。WX のそれぞれの列の第 1 要素は X の列要素の重みつき和、第 2 要素は重みつき差になっている。次に行をウェーブレット変換するため WX の転置行列に W を掛けた後、再度、転置する。この演算は

$$(W(WX)^T)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22} & x_{11}+x_{12}-x_{21}-x_{22} \\ x_{11}-x_{12}+x_{21}-x_{22} & x_{11}-x_{12}-x_{21}+x_{22} \end{pmatrix} \tag{17}$$

である。式(17)の要素(1,1)に X の各要素の全平均的情報、その他の要素に変化率的情報が配置されるのは、前節のベクトルのウェーブレット変換とまったく同じである。要素(1,1)がレベル 0、他の要素がレベル 1 のウェーブレットスペクトラムである。ここでは 2 次元の変換で列を先に変換したが、逆に行から先に変換する演算は

$$W(WX^T)^T = WXW^T \tag{18}$$

であり、式(17)と全く同じである。すなわち行の方向と列の方向の変換はどちらを先に行っても同じ結果となる。

3.2 長方行列のウェーブレット変換

正方行列の場合と同様に行方向と列方向についてウェーブレット変換を行う。行と列数が異なるから 2 個のウェーブレット変換行列、すなわち双直交（bi-orthogonal）行列が必要である。まず列をウェーブレット変換し、次に行をウェーブレット変換する。この変換は、X を $m\times n$ の長方行列とすると、

$$X^{'} = (W_n(W_mX)^T)^T = W_mXW_n^{\ T} \tag{19}$$

とかける。ここで W_m, W_n はそれぞれ $m\times m,\ n\times n$ のウェーブレット変換行列である。

ここで、4 行 2 列の長方行列をドビッシーの 2 次基底関数でウェーブレット変換した場合の変換後の要素について具体的にみることにする。

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{23} \\ x_{41} & x_{24} \end{pmatrix},\ W_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & & \\ & & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix},\ W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから、列方向の変換は

$$W_4X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \\ x_{11}+x_{21}-x_{31}-x_{41} & x_{12}+x_{22}-x_{32}-x_{42} \\ \sqrt{2}(x_{11}-x_{21}) & \sqrt{2}(x_{12}-x_{22}) \\ \sqrt{2}(x_{31}-x_{41}) & \sqrt{2}(x_{32}-x_{42}) \end{pmatrix}$$

であり、各列のウェーブレット変換は、前節のベクトルのウェーブレット変換と同じで、第 1 要素が列全体の平均的情報、第 2 要素は前半と後半の変化率情報、第 3,4 要素は隣接する要素の変化率情報を与えている。これをさらに行方向にウェーブレット変換する。正方行列の場合と同様に、転置行列を変換した後、転置すると、

$$X^{'} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \\ +x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \\ -x_{12}-x_{22}-x_{32}-x_{42} \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} x_{11}+x_{21}-x_{31}-x_{41} \\ +x_{12}+x_{22}-x_{32}-x_{42} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{11}+x_{21}-x_{31}-x_{41} \\ -x_{12}-x_{22}+x_{32}+x_{42} \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} \sqrt{2}(x_{11}-x_{21}) \\ +\sqrt{2}(x_{12}-x_{22}) \end{matrix} & \begin{matrix} \sqrt{2}(x_{11}-x_{21}) \\ -\sqrt{2}(x_{12}-x_{22}) \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} \sqrt{2}(x_{31}-x_{41}) \\ +\sqrt{2}(x_{32}-x_{42}) \end{matrix} & \begin{matrix} \sqrt{2}(x_{31}-x_{41}) \\ -\sqrt{2}(x_{32}-x_{42}) \end{matrix} \end{array}\right)$$

となる。要素(1,1)は X の全要素の平均的情報を表し、レベル 0 のウェーブレットスペクトラムである。要素(2,1)、要素(1,2)、要素(2,2)は X を 2 個にわけた部分の変化率情報でレベル 1、残りの要素はレベル 2 のウェーブレットスペクトラムである。一般に、X が $2^i\times 2^j$ の長方行列（正方行列も含む）のウェーブレット変換は２個のウェーブレット変換行列を用いる(双直交変換)が、それぞれが同じ基底関数である必要はなく、データの特徴に応じて任意の基底関数を組み合わせられる。多重解像度解析のレベルはデータの個数と基底関数の次数により決まるもので、前節のベクトルに対するウェーブレット変換のレベルの考え方を２方向に当てはめたものである。

行を先に変換すると X のウェーブレット変換は

$$W_m(W_nX^T)^T = W_mXW_n^{\ T} \tag{20}$$

となり、式(19)と式(20)は同じ結果となる。

4. 3次元ウェーブレット変換

4.1 3次元ウェーブレット変換の考え方

次に 3 次元ウェーブレット変換について述べる。2 次元のウェーブレット変換とまったく同じ考え方で 3 方向についてウェーブレット変換する。一般に X_{lmn} が $l\times m\times n$ 個の数値データからなる 3 次元行列であるとき、X_{lmn} の転置行列 X_{mnl} を $X_{lmn}^{\ T}$ と表すと X のウェーブレット変換は

$$X'_{lmn} = (W_n (W_m (W_l X_{lmn})^T)^T)^T \qquad (21)$$

と書ける。ここで W_l, W_m, W_n はそれぞれ $l \times l,\ m \times m,\ n \times n$ のウェーブレット変換行列である。

ここで、$2\times2\times2$ の 3 次元行列 X をドビッシーの 2 次基底関数でウェーブレット変換した場合の変換後の X' の要素 x'_{lmn} について具体的にみてみる。3 次元行列は 2 次元で表現できないので、$l=1$ の要素 x'_{1mn} で構成される行列を X'_1、$l=2$ の要素 x'_{2mn} で構成される行列を X'_2 として各要素を表すと、

$$X'_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_{111}+x_{112}+x_{121}+x_{122}+x_{211}+x_{212}+x_{221}+x_{222} & x_{111}-x_{112}+x_{121}-x_{122}+x_{211}-x_{212}+x_{221}-x_{222} \\ x_{111}+x_{112}-x_{121}-x_{122}+x_{211}+x_{212}-x_{221}-x_{222} & x_{111}-x_{112}-x_{121}+x_{122}+x_{211}-x_{212}-x_{221}+x_{222} \end{pmatrix}$$

$$X'_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_{111}+x_{112}+x_{121}+x_{122}-x_{211}-x_{212}-x_{221}-x_{222} & x_{111}-x_{112}+x_{121}-x_{122}-x_{211}+x_{212}-x_{221}+x_{222} \\ x_{111}+x_{112}-x_{121}-x_{122}-x_{211}-x_{212}+x_{221}+x_{222} & x_{111}-x_{112}-x_{121}+x_{122}-x_{211}+x_{212}+x_{221}-x_{222} \end{pmatrix}$$

である。X' の要素 (1,1,1) は X を構成する全要素の平均的情報を表しレベル 0、残りの要素はレベル 1 のウェーブレットスペクトラムである。一般に X が $2^i \times 2^j \times 2^k$ の 3 次元行列のウェーブレット変換は 3 個のウェーブレット変換行列を用いるが、2 次元変換の場合と同様に、それぞれが同じ基底関数である必要はなく、データの特徴に応じて任意の基底関数を組み合わせられる。3 次元ウェーブレット変換の多重解像度解析のレベルについても、ベクトルウェーブレット変換や 2 次元ウェーブレット変換と同様に、データの個数と基底関数の次数により決まるものであり、前節のベクトルに対するウェーブレット変換のレベルの考え方を 3 方向に当てはめればよい。

4.2 3 次元ウェーブレット変換の応用

ここでは 250hPa 高度の風データを使用した 3 次元ウェーブレット変換の例を示す。Fig.7 は 1994 年 1 月の風で北半球、南半球のジェット気流の特徴を示している。

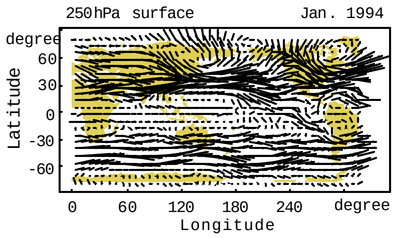

Fig.7 Monthly mean wind data on Jan. 1994

Fig.8 の左は 1994 年 1,4,7,10 月の風データを時系列データとして時間軸方向に並べたもので、右はこのデータを 3 次元ウェーブレット変換したスペクトラムである。基底関数には緯度経度方向にドビッシーの 8 次、時間軸方向にはドビッシーの 2 次を使用している。マザーウェーブレット近傍に大きなベクトルが集約されている。

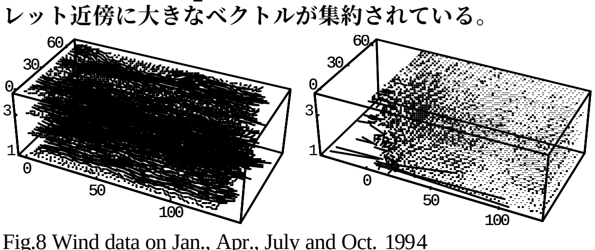

Fig.8 Wind data on Jan., Apr., July and Oct. 1994
Wavelet spectrum vectors by the 2nd-order and 8th-order Daubechies base function

次に、多重解像度解析結果のレベル 0 から 2 を Fig.9 に示す。レベル 3 から 5 はベクトルが非常に小さいため省略する。レベル 0 はデータの平均的特徴を示している。

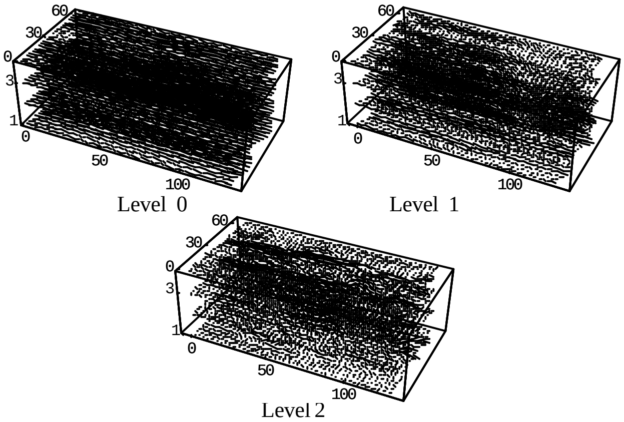

Fig.9 Multiresolution analysis

5. n 次元ウェーブレット変換

3 次元ウェーブレット変換の考え方を発展させれば、4 次元行列のウェーブレット変換は

$$X'_{klmn} = (W_n (W_m (W_l (W_k X_{klmn})^T)^T)^T)^T \qquad (22)$$

であり、最終的に、n 次元行列のウェーブレット変換は、

$$X'_{l_1 l_2 \cdots l_n} = (W_{l_n} (\cdots (W_{l_2} (W_{l_1} X_{l_1 l_2 \cdots l_n})^T)^T \cdots)^T)^T \qquad (23)$$

である。

6. おわりに

本稿では、離散値系ウェーブレット変換に関して、ドビッシーの考え方を紹介し、***n*** 次元ウェーブレット変換パッケージの構築法を具体的な例題を用いて紹介した。

信号・画像解析に携わる研究者・技術者が、ウェーブレット変換を用いる場合、物理的意味やアルゴリズムの把握に一助となれば幸いである。

参考文献

[1] 斉藤兆古, "Mathematica によるウェーブレット変換", 朝倉書店, 1996.

[2] 松山佐和, 小口雄康, 宮原晋一郎, 斉藤兆古, "三次元ウェーブレット変換の応用", 日本シミュレーション学会 第 19 回電気・電子工学シンポジウム論文集, 1998, 211-214.

[3] 松山佐和, 小口雄康, 斉藤兆古, 國井利泰, "ウェーブレット変換による動的カラー画像のハンドリング", 可視化情報, Vol.19, Suppl., No.1, 83-86, 1999.

[4] 松山佐和, 小口雄康, 松山志保, 斉藤兆古, 國井利泰, "ウェーブレット変換によるベクトル動画像の生成", 可視化情報, Vol.20, Suppl., No.1, 145-148, 2000.

キーワード.

離散値系ウェーブレット変換、*n*次元、双直交

Summary.

N^{th} Dimensional Bi-Orthogonal Wavelets Transform and Its Applications

Sawa Matsuyama
Computational Science Research Center, Hosei University

This paper describes that key idea to introduce wavelets transform, one-.two- and. three-dimensional wavelets transforms are introduced by means of Daubechies 2^{nd} order base function. Finally, n^{th} order bi-orthogonal wavelets transform algorism is derived in terms of tensor notation. As a result, it is clarified the mathematical as well as physical meaning of the discrete wavelets transform. Thus, this paper suggests that various signal and image processing problems can be carried out by the discrete wavelets transform.

Keywords .

Discrete wavelets transform, n^{th} dimension, Bi-orthogonal