

# 固体力学における自然要素補間に対する考察

小野 啓太郎

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

固体力学において有限要素法(FEM)はよく知られた補完スキームである。一方、自然要素法(NEM)は最近になって注目されてきた補間スキーム(Sibson 補間)であり、Voronoi 図と Delaunay 三角形を背景とした自然近傍座標を基礎としたメッシュレス解法である。この論文では従来の Sibson 補間に加え、自然要素法の新しい補間(非 Sibson 補間)を導入し、数値解析を通してその有用性について検討する。

## 1. はじめに

工学で対象とする様々な力学現象を解析する際、現在広く用いられている近似解法はメッシュモデルを用いた有限要素法(Finite Element Method: FEM)である。それに対し、自然要素法(Natural Element Method: NEM)は最近開発されたメッシュレスモデルを用いた近似解法であり、亀裂の進展や板の曲げ、超大型現象のモデル化のような特定の問題に特に有効である。二次元問題における自然要素補間は Voronoi 図形と Delaunay 三角形を背景とした自然近傍領域による補間を基礎とし、従来は面積を測度とする Sibson 補間を用いた近似解法が用いられてきたが、本研究では面積ではなく、線長を新たな測度とした非 Sibson 補間スキームについて論じる。

## 2. Delaunay 三角分割と Voronoi 分割

Delaunay 三角分割とは、平面上の節点の支配する凸部分領域を三角形集合で覆う分割方法であり、三角形の外接円内には他のいずれの節点も含まれないという特徴を持つ。更に Delaunay 三角形の外心で結んだ多角形で分割する方法を Voronoi 分割と呼び、与えられた節点の勢力範囲で領域を分割したものとなる。(図 1)

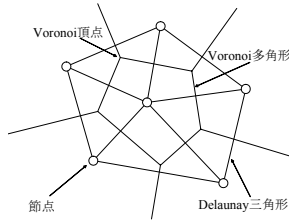


図 1 Delaunay 三角形と Voronoi 多角形

## 3. 自然要素法

ここでは、自然要素法の補間関数と、補間関数構築の基礎となる自然近傍補間について述べる。

### 3. 1. 自然近傍

図 2 のような点  $x$  に関する Delaunay 三角形分割要素について考える。図における白丸の節点は点  $x$  に対する自

然近傍節点と呼ばれ、この節点で構成された三角形を自然近傍三角形、その外接円を自然近傍外接円、その全体領域を自然近傍定義域と呼ぶ。点  $x$  に対する自然近傍節点、自然近傍三角形の判別は式(1)で実行される。

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o^{(e)}\| < r_o^{(e)} \quad : \quad e = 1 \sim M \quad (1)$$

ここで、 $M$ は Delaunay 三角形の総数、 $\mathbf{x}_o^{(e)}$ は要素  $e$  の外接円中心位置ベクトル、 $r_o^{(e)}$ は要素  $e$  の外接円半径である。

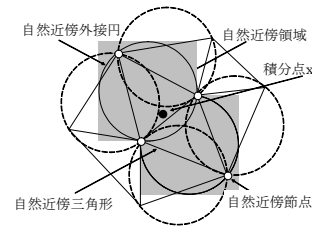


図 2 積分点と自然近傍節点

### 3. 2. 自然近傍補間関数

自然要素法において、点  $x$  の変位  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  はその点の近傍節点の値を用いて補間され、自然近傍節点の数を  $n_x$  とすると、式(2)によって示される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_x} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2)$$

ここで、 $\phi_I(\mathbf{x})$  は点  $x$  に関する  $a$  番目の自然近傍節点に関する補間関数であり、 $\mathbf{u}_I$  は点  $x$  に関する  $I$  番目の自然近傍点における変位ベクトルである。

## 4. Sibson 補間

自然近傍 (Sibson) 補間において、自然近傍座標は補間関数として用いられ、平面上の点  $x$  に対する自然近傍座標を定義するために図 3 のような自然近傍を構築する。

$\kappa(\mathbf{x})$  は  $T_{\mathbf{x}}$  の Lubergue 測度 (1 次元や 2 次元, 3 次元各々における長さ, 面積, 体積) とし, 2 次元において, 測度は面積であるので, ここでは  $A(\mathbf{x}) \equiv \kappa(\mathbf{x})$  や  $A_I(\mathbf{x}) \equiv \kappa_I(\mathbf{x})$  と示す. 自然近傍  $I$  に関する自然近傍座標は, Voronoi セルの  $T_I$  と  $T_x$  の重複した領域を  $x$  の全 Voronoi 領域で割った比率として定義される.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{A_I(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})} \quad (3)$$

ここで,  $I$  の範囲は 1 から  $n$  までであり, また

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n A_J(\mathbf{x}) \text{ である.}$$

よって, 図 3 のような場合の積分点  $x$  に対する点  $a$  の形状関数は次の式(4)ようになる. ここで  $\Delta(p,q,r)$  の演算子は三角形  $pqr$  の面積をあらわす.

$$\phi_a(x) = \frac{\sum_{e=1}^{m_a} \Delta(x_o^b, x_o^c, x_o^e)}{\sum_{b=1}^{n_x} \phi_b(x)} \quad (4)$$

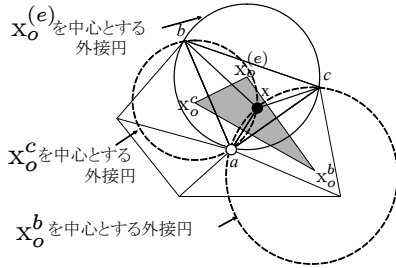


図 3 Sibson 補間関数の構築

## 5. 非 Sibson 補間

ここで, 非 Sibson 補間の定義について厳密に述べる.  $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$  を  $\mathbf{R}^d$  における個別の節点集合とし,  $T_I = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), J = I \text{ である } T_I \}$  による節点  $\mathbf{x}_I$  の Voronoi セルを示す. さらに  $t_{IJ} = \{\mathbf{x} \in T_I \cap T_J, J = I\}$  と定義し,  $d(\cdot, \cdot)$  はユークリッド測,  $\bar{T}_I = T_I \cup \partial T_I$  は閉じた集合  $T_I$  であり,  $t_{IJ}$  においては空集合となる可能性がある. ここで  $d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J) = 0$  の場合

$$\sum_{J=1}^n \frac{|t_{IJ}| x_J}{d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)} = \mathbf{x} \sum_{J=1}^n \frac{|t_{IJ}|}{d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)} \quad (5)$$

ここで  $|\cdot|$  は  $\mathbf{R}^{d-1}$  の Lebesgue 測を示す. 上式を用いた観点から, ここでは 2 次元問題に限定して, 非 Sibson 形状関数  $\phi_I(\mathbf{x})$  は次に定義される.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\frac{|t_{xI}|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)}}{\sum_{J=1}^n \frac{|t_{xJ}|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)}} \quad (6)$$

例として図 4 のような節点配置において, 点  $x$  は 4 つの自然近傍を持ち, Voronoi セルとその近傍について示されている. 距離  $s_I(\mathbf{x})$  は, 節点  $I$  に関する Voronoi 辺の Lebesgue 測 ( $\mathbf{R}^2$  における長さ) であり,  $h_I(\mathbf{x})$  は節点  $I$  の Voronoi 辺から点  $x$  までの垂線距離である. 非 Sibson(nS)形状関数  $\phi_I(\mathbf{x})$  は以下によって定義される.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_I(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(\mathbf{x})}, \quad \alpha_J(\mathbf{x}) = \frac{s_J(\mathbf{x})}{h_J(\mathbf{x})} \quad (7)$$

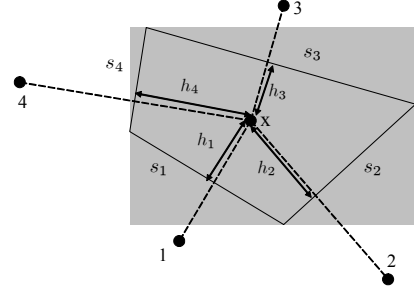


図 4 非 Sibson 補間関数の構築

$\mathbf{R}^2$  において表記されている  $nS$  の複雑な計算は, 線形領域により分割した  $\mathbf{R}$  の Lebesgue 測度に依存している. 一般的な  $d$  次元の配置条件において, 相互関係は線形領域によって分割した  $\mathbf{R}^{d-1}$  の Lebesgue 測度にある. 自然近傍形状関数の直接比較は,  $\mathbf{R}^d$  において自然近傍補間は同等の次元 ( $d$  次元量) であり, 一方非 Sibson 補間に対しては次元少ない ( $n-1$  次元量) という計算効果となる.

## 6. 自然要素法の定式化

ここでは弾性静的問題を自然要素法を用いて解析するための, コンピュータ・アルゴリズムの構築を念頭に入れた離散定式化について論じる. なお, ここでは仮想仕事の原理を基本とした Galerkin 型定式化を行う.

### 6. 1. 仮想仕事の原理とその離散形式

仮想仕事の原理は次式によって与えられる.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \delta W_{ext} \quad (8)$$

ここで,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  はひずみテンソル,  $\mathbf{D}$  は構成テンソルを表し,  $\Omega$  は全領域,  $\delta W_{ext}$  は外力のなす仮想仕事である. ここで上式を要素毎に積分し, その総和をとるものとする次式が得られる.

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right\} = \delta W_{ext} \quad (9)$$

ここで  $\Omega^{(e)}$  は要素  $e$  の領域である. さらに個々の要素に関する積分を数値積分法を用いて計算するものとする, 次のように表される.

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \sum_{g=1}^{N_g} \delta \varepsilon : (\mathbf{x}_g^{(e)})^T \mathbf{D}(\mathbf{x}_g^{(e)}) : \varepsilon(\mathbf{x}_g^{(e)}) \omega(\mathbf{x}_g^{(e)}) \Omega^{(e)} \right\} = \delta W_{ext} \quad (10)$$

ここで  $N_g$  は一要素の積分の数値積分点総数、 $\mathbf{x}_g^{(e)}$  は要素  $e$  の積分点  $g$  の位置ベクトル  $\omega$  は重み係数である。

## 6. 2. 自然近傍を用いた積分点の変位とひずみの補間

式(2)を要素  $e$  の積分点  $g$  で表しマトリックス表現する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_g^{(e)}) = [\mathbf{N}_g^{(e)}] \{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\} \quad (11)$$

ここで  $\{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\}$  は要素  $e$  の積分点  $g$  に関する近傍節点における変位を全てまとめた列ベクトルであり、近傍節点の総数を  $n_{eg}$  とすると  $2n_{eg}$  の成分から構成され、 $[\mathbf{N}_g^{(e)}]$  は対応する補間関数を並べた  $2 \times 2n_{eg}$  のマトリックスであり、次のとおりである。

$$[\mathbf{N}_g^{(e)}] = \begin{bmatrix} \phi_1^{(eg)} & 0 & \phi_2^{(eg)} & 0 & \dots & \phi_{n_{eg}}^{(eg)} & 0 \\ 0 & \phi_1^{(eg)} & 0 & \phi_2^{(eg)} & \dots & 0 & \phi_{n_{eg}}^{(eg)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで  $\phi_a(\mathbf{x})$  は要素  $e$  の積分点  $g$  に対する  $a$  番目の近傍節点に関する補間関数である。

式(11)よりひずみは次のように表される。

$$\varepsilon(\mathbf{x}_g^{(e)}) = [\mathbf{B}_g^e] \{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\} \quad (13)$$

ここで

$$[\mathbf{B}_g^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^{(eg)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_{n_{eg}}^{(eg)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1^{(eg)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_{n_{eg}}^{(eg)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1^{(eg)}}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1^{(eg)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_{n_{eg}}^{(eg)}}{\partial y} & \frac{\partial \phi_{n_{eg}}^{(eg)}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 6. 3. 積分点剛性マトリックス

式(13)を式(10)に代入することにより次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \sum_{g=1}^{N_g} \delta \{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\}^T [\mathbf{k}_g^{(e)}] \{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\} \right\} = \delta W_{ext} \quad (15)$$

ここで  $[\mathbf{k}_g^{(e)}]$  は要素  $e$  の積分点  $g$  に関する剛性マトリックスであり、次のとおりである。

$$[\mathbf{k}_g^{(e)}] = [\mathbf{B}_g^{(e)}]^T [\mathbf{D}_g^{(e)}] [\mathbf{B}_g^{(e)}] \omega_g^{(e)} \Omega^{(e)} \quad (16)$$

## 6. 4. 全体支配方程式

全体支配方程式を導くために、要素  $e$  の積分点  $g$  に関するすべての近傍節点における変位  $\{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\}$  を全体節点の

変位  $\{\mathbf{U}\}$  を用いて次のように表す。

$$\{\check{\mathbf{u}}_g^{(e)}\} = [\mathbf{A}_g^{(e)}] \{\mathbf{U}\} \quad (17)$$

ここで、 $[\mathbf{A}_g^{(e)}]$  は全体節点を要素  $e$  の積分点  $g$  の全ての近傍節点に関連付ける論理マトリックスである。式(17)を式(15)に代入し、 $\{\mathbf{U}\}$  は全ての要素の全ての積分点に共通であることを考慮すると次のようになる。

$$\delta \{\mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \delta W_{ext} \quad (18)$$

ここで  $[\mathbf{K}]$  は全体剛性マトリックスであり、次のとおりである。

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^M \left( \sum_{g=1}^{N_g} [\mathbf{A}_g^{(e)}]^T [\mathbf{k}_g^{(e)}] [\mathbf{A}_g^{(e)}] \right) \quad (19)$$

ここで等価節点荷重ベクトルを  $\{\mathbf{P}\}$  とすると

$$\delta W_{ext} = \delta \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{P}\} \quad (20)$$

と表されるので、最終的な支配方程式は次のようになる。

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (21)$$

以上より自然要素解析アルゴリズムは有限要素法とほとんど同一であり、有限要素メッシュが Delaunay 三角形で構成される場合には、解析のための基本入力データは有限要素法と自然要素法は全く同一である。

## 7. 数値解析

ここでは Java により開発した自然要素法、及び Delaunay 自動三角分割プログラムを用いて、自然要素補間の有用性の検証を行う。なお、自然要素法の要素内部積分点は4つとして開発を行った。

### 7. 1. 片持ち梁の曲げ問題に対する適用

図5に示すような片持ち梁に対する数値解析を行い、3節点有限要素法(FEM3)と比較することによって自然要素法の有用性を示す。左端を固定し右端に荷重をかける。

解析には格子状に節点を配置し、Y軸方向の分割数をそれぞれ1と3に固定、X軸方向の分割数をさまざまに変化させて解析を行った。その結果、それぞれの右端のY軸方向変位は図6と図7のようなグラフとなった。



図5 片持ち梁モデル

図8 円盤モデル

解析を5回ずつ行い、その平均値を計算時間とした結果、表1のようになった。実験に使用したPCは、CPU:450MHz, RAM:192MB, OS:Windows2000の環境を使用した。

表1 自然要素補間 補間関数計算時間

	Sibson 補間 計算時間	NonSibson 補間 計算時間	時間 比率
片持ち梁	1212 ms	543 ms	45 %
円盤	1662 ms	647 ms	39 %

この結果より、非 Sibson 補間は Sibson 補間に比べて、片持ち梁では45%、円盤では39%の時間で補間関数が計算されている。これは面積を測度とする Sibson 補間に対し、1次元少ない線長を測度とする非 Sibson 補間の特徴が出ていると言える。

### 8. まとめ

ここでは、楕円型変微分方程式の解法に対する、Voronoi 図形と Delaunay 三角形を背景とする自然近傍を基礎とした補間 (Sibson, 非 Sibson) の使用について論じた。また、自然要素法の計算アルゴリズムを理解するためにその一般的な定式化と補間関数について、特に有限要素法と比較することにより論じた。

実際の数値解析においては、Java によるオブジェクト指向プログラムを作成し、3 節点有限要素法と比較することによって自然要素法の有用性を示した。更に、面積を測度とする Sibson 補間と、辺長を測度とする非 Sibson 補間とを用いた自然要素補間を比較することにより非 Sibson 補間の高速性を示した。

### 参考文献

[1] N.Sukumar, R.Moran and T.Belytschko, 'The natural element method in solid mechanics', *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, 43, 839-887 (1998).  
 [2] R.Sibson, 'A brief description of natural neighbor Interpolation', in V.Barnett (ed.) *Interpreting Multivariate Data*, Wiley, Chichester, 21-36 (1981).  
 [3] 武田, 竹内, 草深, 佐藤, '自然要素法の一般的定式化', 日本計算工学会講演論文集, 4, (1999).  
 [4] 松尾, 武田, '自然要素法の固体力学への応用', 日本計算工学会講演論文集, 5, (2000).  
 [5] V.V.Belikov, V.D.Ivanov, V.K.Kontorovich, S.A.Korytnik and A.Y.Semenov, 'The non-Sibsonian Interpolation: a new method of Interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, textbf37(1), 9-15 (1997).  
 [6] N.Sukumar, B.Moran, A.Yu Semenov and V.V.Belikov, 'Natural neighbour Galerkin methods', *Int.J.Numer. Meth.Engng.*, textbf50, 1-27 (2001).  
 [7] 杉原厚吉, '計算幾何プログラミング', 岩波書店

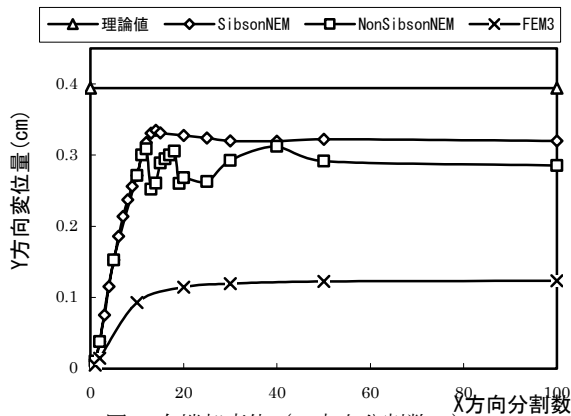


図6 右端部変位 (Y方向分割数1)

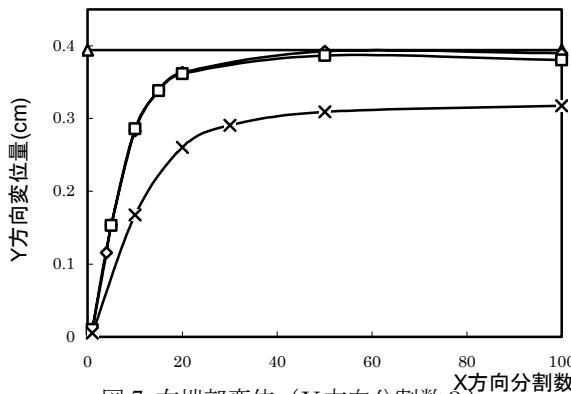
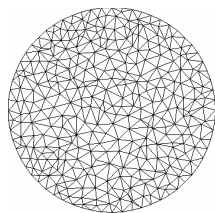


図7 右端部変位 (Y方向分割数3)

2つのグラフより、自然要素法は3節点有限要素法に比べ、非常に良い精度を出していると言える。3節点有限要素法は2000分割程度まで分割数を増せば理論値に非常に近い値を出す。自然要素法はグラフにあるような分割数でほぼ理論値に一致し、収束の立ち上がりがきわめて早いと言える。

### 7. 2. 非 Sibson 補間の有用性の検証

数値解析 7. 1と同じ片持ち梁と、図8のような半径4cm、厚さ1cmの円盤状の材料において、ランダムに節点を配置し、Sibson補間と非Sibson補間のコンピュータの補間関数計算時間を測定する。それぞれの材料の節点数と要素数 (Delaunay 三角形数) は、片持ち梁が節点数306, 要素数500。円盤が節点数359, 要素数652とした。



キーワード.

自然要素法、Sibson 補間、非 Sibson 補間

-----

Summary.

**Some Considerations on the Natural Element Interpolations**

Keitaro Ono

Division of Engineering, Specialize In System Engineering, Hosei University Graduate School

Hiroshi Takeda

Faculty of Engineering, Department of Systems Control Engineering, Hosei University

In solid mechanics, finite element method(FEM) is well-used interpolation scheme. On the other hand, natural element method(NEM) is lately developed interpolation scheme. In NEM, natural neighbour co-ordinates(Sibsonian interpolation), which are based on the Voronoi tessellation and Delaunay triangles, are an appealing choice to construct meshless interpolants. In this paper, new interpolation scheme (Non-Sibsonian interpolation) of the NEM and practical interpolation functions are reviewed for the purposes of the understanding of the features, the features, the construction of the computational algorithm and the applications of the practical problems.

Keywords.

Natural Element Method, Sibsonian Interpolation, Non-Sibsonian Interpolation