

## ウェーブレット変換を用いた振動データの数値積分・微分法

小口 雄康  
計算科学研究センター

数値積分，微分の原理は簡単であるが，自然地震動のような激しい振動に雑音が重なった記録では必ずしも有効ではない．特に，2階積・微分ではほとんど無力である．これは信号に含まれている低振動数雑音が積分に，高振動数雑音が微分に大きな影響を与えることに起因する．本報では，Mexican Hatを用いた連続ウェーブレット変換・逆変換と Fourier 変換の組み合わせからこの低振動数，高振動数雑音を分離できることを示し，簡単な波形と自然地震波形についての計算例から，その有効性を実証した．

### 1. はじめに

地震波動，地盤振動や構造物振動データを数値的に積分したり，微分したりすることはよく行われることである．しかし，データに含まれている長周期，短周期の雑音が計算で増幅され，信号の識別が難しくなるのが普通である．

ウェーブレット変換ではデータを周期（レベル）ごとに分解し，それらを独立に逆変換して合成できる利点を持つ．この利点を利用して数値積分・微分を行おうというのが本報の目的である．

ウェーブレット変換で積分を用いた例は中野 他 [4]，微分を用いた例は Sakakibara [3] にある．これらは，変換を時間領域で行っているが，本報では，これらを Fourier 変換による振動数領域で行っている．そのために用いたウェーブレット変換は連続ウェーブレット変換である，すでに，計算の母体は小口 [2] によってまとめられている．

数式処理に Fourier 変換を用いるので，本報における定義を示す．

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

### 2. 連続ウェーブレット変換・逆変換

$f(t)$  を実のテスト関数、ウェーブレット  $\phi(t)$  を時間、振動数両領域でコンパクトでアドミッシブル条件を満たすとすると連続ウェーブレット変換・逆変

換は以下で表される．

#### (1) ウェーブレット変換

$$F_a(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi^*(a\omega)} f^*(\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

#### (2) 逆ウェーブレット変換

$$f(t) = \frac{1}{L} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) F_a(b) db$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{da}{a}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} |\phi^*(a\omega)|^2 f^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}$$

$$L = \int_0^{\infty} \frac{|\phi^*(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

$$\text{ここで, } f^*(\omega) = \frac{1}{L} \int_0^{\infty} \frac{da}{a\sqrt{a}} \phi^*(a\omega) F_a^*(\omega)$$

### 3. Mexican Hat によるウェーブレット変換の計算式

ウェーブレットとして Mexican Hat を用いる．Mexican Hat は Gauss 関数を 2 階微分して作られるので，解析的計算が可能であり，時間領域で 0, 1 次モーメントが 0 という利点がある．

#### 3.1 Mexican Hat

Mexican Hat は  $\alpha$  をパラメータとして以下の式で

与えられる .

$$\begin{aligned}\phi(t) &= C(1 - 2\alpha t^2)e^{-\alpha t^2} \\ C &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\end{aligned}$$

これから , 以下が解析的に計算できる .

$$(1) \quad \phi^*(\omega) = D\omega^2 e^{-\omega^2/4\alpha}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{3}\alpha}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{1/4}$$

$$(2) \quad L = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

### (3) ウェーブレット変換の計算式

Mexican Hat によるウェーブレット変換の計算式は以下となる .

$$\begin{aligned}F_a(b) &= \frac{1}{\sqrt{3}\alpha}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{1/4}a^2\sqrt{a} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \cdot \omega^2 e^{-a^2\omega^2/4\alpha} e^{i\omega b} d\omega \right\}\end{aligned}$$

### (4) 逆ウェーブレット変換の計算式

また , 逆ウェーブレット変換は以下で与えられる .

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^{\infty} \frac{da}{a} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^4}{2\alpha^2} f^*(\omega) \cdot \omega^4 \right. \\ &\quad \left. \times e^{-a^2\omega^2/2\alpha} \cdot e^{i\omega t} d\omega \right\}\end{aligned}$$

## 3.2 離散値化

ウェーブレット変換 , 逆変換の計算には数式を離散化せねばならない . このとき , 物理量の次元の考察が必要である . ここでは , FFT で処理する前提で変数を離散値化する . 離散値化のために , データ数 , 時間間隔 , 振動数間隔を , それぞれ ,  $N(2$  のべき) ,  $\Delta t$  ,  $\Delta\omega$  とし , 以下の関係から出発する .

$$\Delta t \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$$

### (1) 基礎変数の離散値化 ( [ ] は次元を表す )

$$t = (m-1)[\Delta t] \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$$b = (m-1)[\Delta t] \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$$\omega = (n-1)[\Delta\omega] \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

$$\alpha = A[\Delta t]^{-2}$$

$$D = D_0[\Delta t]^{5/2} : D_0 = \frac{1}{\sqrt{3}A}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{1/4}$$

### (2) Fourier 変換、逆変換 (FFT 用)

$$\begin{aligned}F^*(n-1) &= \sum_{m=1}^N f(m-1)e^{-i2\pi(m-1)(n-1)/N} \\ f(m-1) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F^*(n-1) \\ &\quad \times e^{i2\pi(m-1)(n-1)/N}\end{aligned}$$

### (3) ウェーブレット変換

以下 , 全ての変数の次元を  $[\Delta t]$  で統一する . また ,  $f^*(\omega)$  の離散値部分を  $F^*(n-1)$  と表す .

$$\begin{aligned}F_a(m-1) &= \frac{1}{\sqrt{3}A}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{1/4}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 a^2 \sqrt{a} \\ &\times \frac{1}{N} \sum_n F^*(n-1)(n-1)^2 \\ &\quad \times e^{-a^2(n-1)^2(2\pi/N)^2/4A} \\ &\quad \times e^{i2\pi(n-1)(m-1)/N} \cdot (\Delta t)^{1/2}\end{aligned}$$

### (4) 逆ウェーブレット変換

初めに ,  $da$  を求める . これは  $a$  の取り方によるが , 本報では  $a = 2^{(j-1)}$  ( $j = 1, 2, \dots, J_{max}$ ) として計算した . したがって ,

$$a = 2^{(j-1)} \Rightarrow da/a = \log(2)$$

逆変換を離散値化する .

$$\begin{aligned}f(m-1) &= \sum_j \log(2)(2\pi/N)^4 \\ &\times \frac{1}{N} \sum_n \frac{a^4}{2A^2} F^*(n-1)(n-1)^4 \\ &\quad \times e^{-a^2(n-1)^2(2\pi/N)^2/2A} \\ &\quad \times e^{i(n-1)(m-1)(2\pi/N)}\end{aligned} \quad (1)$$

われわれの目的は ,  $x(t)$  を未知として既知の  $x^*(\omega)$  から  $x(t)$  を求めることにある . すなわち ,  $x^*(\omega) = X^*(\omega)\Delta t = X^*(n-1)\Delta t$  と置いて ,  $X^*(n-1)$  を (1) 式の  $F^*(n-1)$  へ代入すれば  $x(m-1)$  が求められる .

4. 加速度データから変位 , 速度を求める計算  
地盤振動の記録は加速度で与えられることが多い . 従来 , いろいろな数値積分法で変位 , 速度が求められているが , ウェーブレット変換によっても計算することができる . ウェーブレット変換による長所は低振動数での計算の不安定を回避できる点である . ウェーブレットに Mexican Hat を用いると , band-pass であるから低振動数の卓越したデータ , 高振動

数のみのデータに対しては無効であると予想されるが逆にこの部分を除去して欲しい結果が得られる特徴を持つとも考えられる。

#### 4.1 加速度データの再現性の検討

初めに、計算が正しいことを確かめるため加速度そのものを逆変換式で計算し、入力データと比較、再現性を調べる。すなわち、逆変換式(1)の $F^*(n-1)$ の代わりに $\ddot{X}^*(n-1)$ を代入し、かつ、 $A, J_{max}$ を与えて計算する。

$$\begin{aligned} \ddot{X}^*(n-1) &= \sum_j \log(2)(2\pi/N)^4 \\ &\times \left\{ \frac{1}{N} \sum_n \frac{a^4}{2A^2} \ddot{X}^*(n-1)(n-1)^4 \right. \\ &\times \left. e^{-a^2(n-1)^2(2\pi/N)^2/2A} \cdot e^{i(n-1)(m-1)(2\pi/N)} \right\} \end{aligned}$$

#### 4.2 加速度から変位を求める計算

$$x^*(\omega) = \frac{1}{-\omega^2} \ddot{x}^*(\omega)$$

から、

$$X^*(n-1) = -\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(n-1)^2} \ddot{X}^*(n-1)(\Delta t)^2$$

を逆変換式(1)へ代入すればよい。

$$\begin{aligned} X(n-1) &= -\log(2)(2\pi/N)^2 \\ &\times \sum_j \left\{ \frac{1}{N} \sum_n \frac{a^4}{2A^2} \ddot{X}^*(n-1) \cdot (n-1)^2 \right. \\ &\times \left. e^{-a^2(n-1)^2(2\pi/N)^2/2A} \right. \\ &\times \left. e^{i(n-1)(m-1)(2\pi/N)} \right\} \cdot (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

#### 4.3 加速度から速度を求める計算

$$\dot{x}^*(\omega) = \frac{1}{i\omega} \ddot{x}^*(\omega)$$

から、前項の $-\omega^2$ の代わりに $i\omega$ を代入すればよい。

$$\begin{aligned} \dot{X}^*(n-1) &= -\log(2)(2\pi/N)^3 \\ &\times \sum_j \left\{ \frac{i}{N} \sum_n \frac{a^4}{2A^2} \ddot{X}^*(n-1) \cdot (n-1)^3 \right. \\ &\times \left. e^{-a^2(n-1)^2(2\pi/N)^2/2A} \right. \\ &\times \left. e^{i(n-1)(m-1)(2\pi/N)} \right\} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

### 5. 計算例

データから $N = 2^{J_{max}}$ 、 $\Delta t(\text{sec})$ が与えられる。計算で、初めに与えねばならない量として、 $\alpha$ がある。これは Mexican Hat の時間軸の分解能 $2\Delta t$

から、以下のように決める。

$$2\Delta t = 2\sqrt{\frac{7}{12\alpha}} \geq \Delta t \Rightarrow A \leq \frac{7}{3}$$

次に、各レベルごとに逆変換して波形を調べ、用いるレベルを経験的に決める。

以下では、 $\Delta t = 1$ 、 $N = 1024$  ( $J_{max} = 10$ )、 $A = 7/3$ として計算した。用いたレベルは場合によって異なる。

また、速度、変位を解析的に求めた波形を理論波形、ここで述べた数値計算から得られた波形を計算波形ということにする。

#### 5.1 加速度から加速度を求める計算

##### (1) Haar 関数

Mexican Hat は振動型で、直線的な Haar 関数を積分するのは精度が悪いと考えられる。

Fig.1 に計算例を示した。数パーセントの誤差で

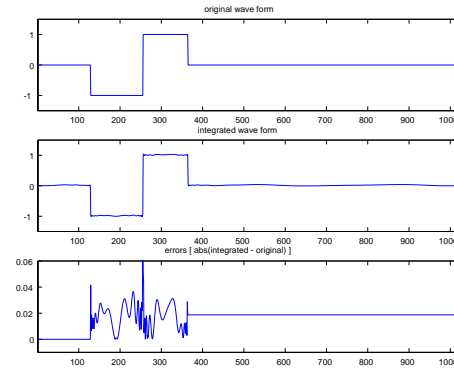


Fig. 1. Haar 関数の積分:(上) 元波形, (中) 計算波形, (下) 誤差

復元している。

##### (2) sin 波

sin 波の積分の誤差が大きいと地震波の積分には使えない。Fig.2 に結果を示した。記録の頭部、尾部にやや大きな誤差が見られるが中心部では良い近似を与えている。

##### (3) 振幅変調 sin 波

sin 波にゆっくりした sin 型の包絡線を掛けた波についての計算例を Fig.3 に示す。

良い再現性を示している。

##### (4) 自然地震の加速度波形

自然地震の加速度記録の初動部分の積分再現性とレベルごとの逆変換波形を Fig.4, 5 に示した。全体としての再現性は十分満足できるものであり、成分を見ると、レベル  $j = 3, 4, \dots, 7$  に地震情報が含まれていると考えられる。Fig.6 にレベル  $j = 3, 4, \dots, 7$

から得られた波形を示した．地盤の雑振動の成分が除去されていると考えられる．

以上の計算から Mexican Hat による数値積分が

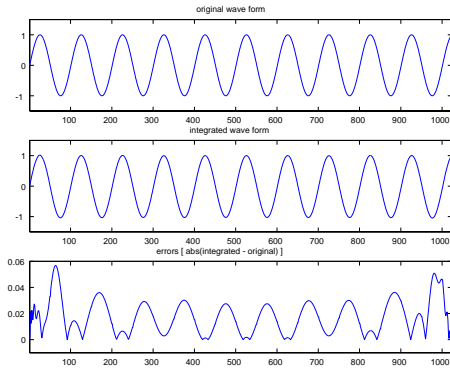


Fig. 2. sin 波の積分:(上) 元波形, (中) 計算波形, (下) 誤差

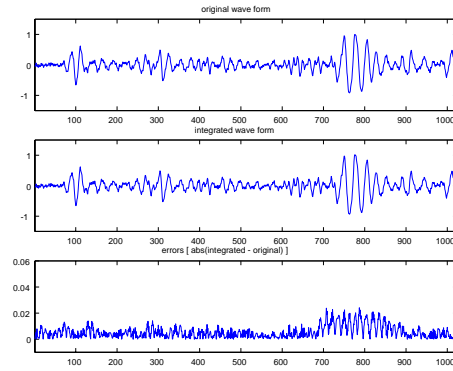


Fig. 4. 加速度波形の積分:(上) 元波形, (中) 計算波形, (下) 誤差

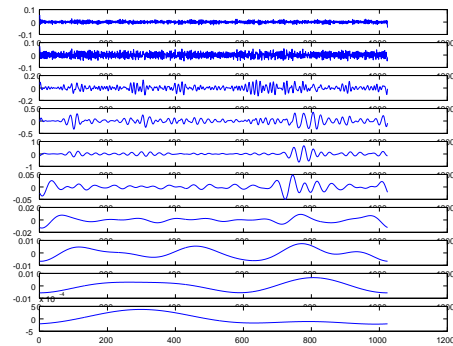


Fig. 5. 加速度波形の成分分解:上から  $j = 1, 2, \dots, 10$

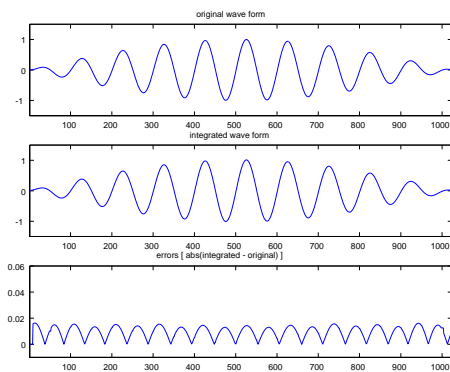


Fig. 3. 振幅変調 sin 波の積分:(上) 元波形, (中) 計算波形, (下) 誤差

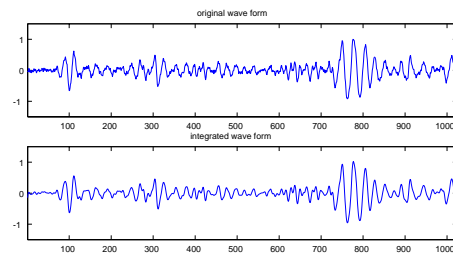


Fig. 6. 雑振動を除去した地震波形

正しい逆変換の値を与えることが示された．

## 5.2 変位波形

以下, 関数は加速度記録であるとして, 変位を求めた計算例を示す．これは, 2 階積分に当たり, 計算誤差が増大することが予想される．

まず, sin 波の例を Fig.7 に示した．上段は理論変位波形, 中段は計算変位波形である．下段は誤差を

示してある．頭部，尾部は誤差が大きくて使えないが，中間部は誤差も2%以内と小さく，十分実用になると考えられる．また，位相ずれは全くない．

次に，振幅変調 sin 波形の理論変位波形と計算変

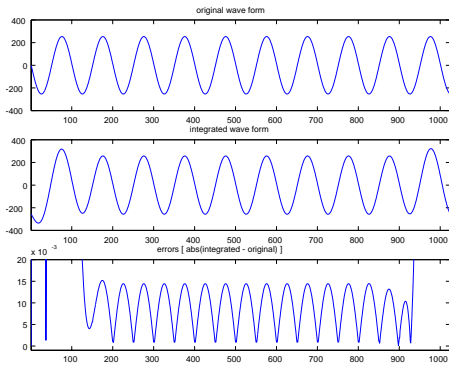


Fig. 7. sin 波の理論 (上)，計算 (中) 変位波形と誤差 (下)

位波形を Fig.8 に示した．理論値と計算値とが良い一致を示す．

自然地震波形から理論変位波形を求めることはで

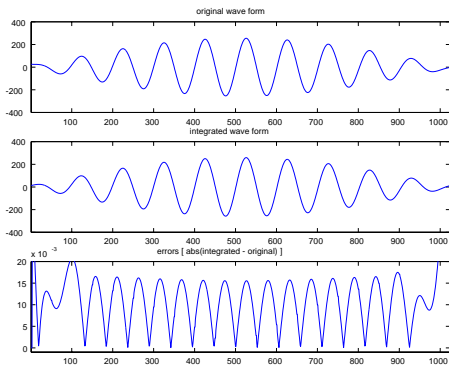


Fig. 8. 振幅変調 sin 波の理論 (上)，計算 (中) 変位波形と誤差 (下)

きないので，加速度波形と計算変位波形を Fig.9 に示した．従来の数値積分で見られるゼロ線の傾きは生じていない．

### 5.3 速度波形

速度波形の計算例を Fig.10—13 に示した．変位波形と同様な結果が得られている．

以上の例で示したように加速度振動波形から変位，速度を求める計算は良い結果を与える．しかし，Haar 関数などの超低振動数波形の積分はできなかった．

### 5.4 大崎による変位，速度の計算例

ウェーブレット変換による計算と比較するために大崎の方法 [1] による計算例を示した．大崎は直接

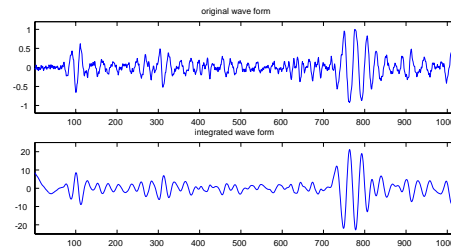


Fig. 9. 地震波の加速度波形 (上) と変位波形 (下)

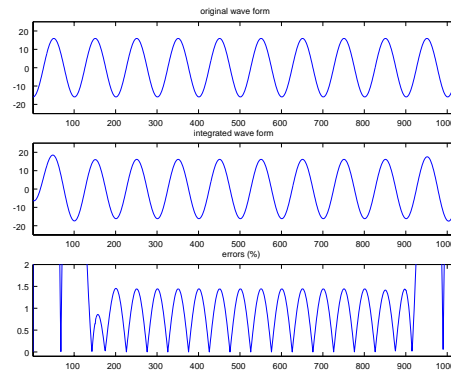


Fig. 10. sin 波の理論 (上)，計算 (中) 速度波形と誤差 (下)

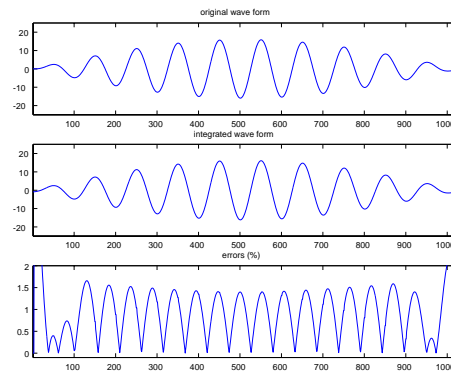


Fig. 11. 振幅変調 sin 波の理論 (上)，計算 (中) 速度波形と誤差 (下)

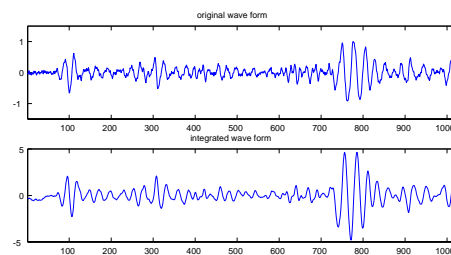


Fig. 12. 地震波の加速度波形 (上) と計算速度波形 (下)

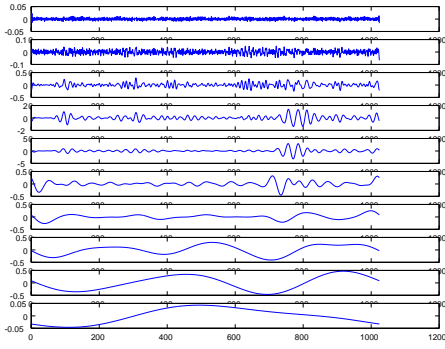


Fig. 13. 地震波のレベルごとの計算速度波形

数値積分で加速度から速度，変位を求めている．計算例を Fig.14, 15 に示す．sin 波では，変位に大きな 0 線の傾きが生ずる．理由は不明である．地震波では，速度波形はウェーブレット変換による波形と同じであるが，やや 0 線の変動が見られる．変位波形は 0 線の変動が激しく変位波形そのものは読み取れない．これらの変動は彼の補正法によっても修正が難しかった．

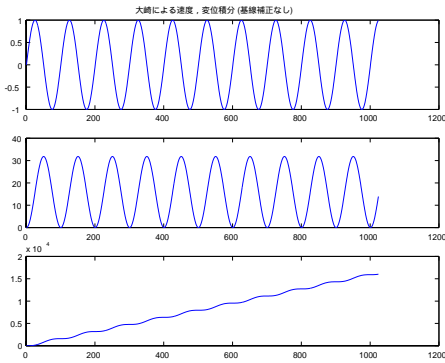


Fig. 14. 大崎法による sin 波 (上) の計算速度 (中)，計算変位 (下) 波形

## 6. 地震波の数値微分

逆ウェーブレット変換による計算波形の再現性が良いこと，積分波形が十分良い精度で推定できること，などを考慮すると数値微分も可能であると予想される．従来，数値微分は高振動数雑音が強調されてよい結果が得られないことが普通であった．特に，2 階微分は波形識別が大変難しいと思われる．しかし，逆ウェーブレット変換で高振動数に関わる低レベルの部分除去すれば効果的な微分が可能になると予想される．

微分は積分の逆算であるから，以下を参考にして (1) 式から微分演算が行われる．

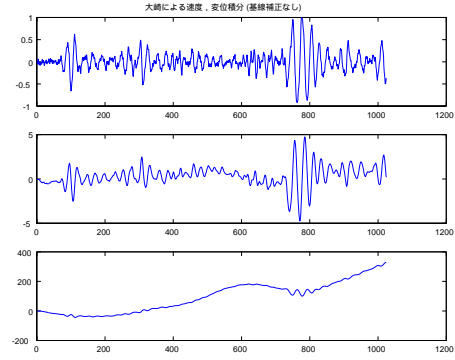


Fig. 15. 大崎法による地震波 (上) の計算速度 (中)，計算変位 (下) 波形

### (1) 1 階微分

$$\dot{x}^*(\omega) = i\omega x^*(\omega)$$

$$\dot{X}^*(n-1) = i(n-1)\left(\frac{2\pi}{N}\right)X^*(n-1)[\Delta t]^{-1}$$

### (2) 2 階微分

$$\ddot{x}^*(\omega) = -\omega^2 x^*(\omega)$$

$$\ddot{X}^*(n-1) = -(n-1)^2\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 X^*(n-1)[\Delta t]^{-2}$$

微分演算では高振動数雑音を除去せねばならないから，積分とは逆に低レベル部分を除いて高レベルだけを用いて 1, 2 階微分を求めた．

以下の計算例に示されるように，十分効果的な結果が得られたと言えよう．

#### 6.1 1 階微分

Fig.16 は，sin 波にランダム雑音を加えた波の 1 階微分である．この波の sin 波部分を理論的に 1 階微分した波形と逆ウェーブレット変換による 1 階微分から雑音部分を除去した ( $j = 6, 7$  のみを用いた) sin 波形を示してある．誤差は十分小さいと言えよう．

Fig.17 は，前節で用いた自然地震を変位記録とみなして速度を求めたものである．微分した波形と，雑音と思われる部分を除去した ( $j = 4, 5, \dots, 10$  を用いた) 波形を示した．地震波形が明瞭に抽出されている．

#### 6.2 2 階微分

2 階微分は高振動数雑音除去なしでは，波形が隠されて，解析することは不可能である．この事情を調べるために，2 つの計算例を示した．

まず，雑音を含む sin 波の 2 階微分を Fig.18 に示した．雑音を含む 2 階微分波形は sin 部分の分別不能である．sin 波部分だけの理論 2 階微分波形と計算微分波形からレベル  $j = 6, 7, \dots, 10$  のみを取り

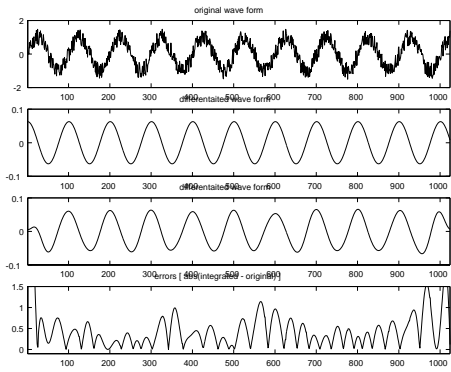


Fig. 16. 雑音を含む sin 波の 1 階微分: (上) 元波形, (中上) sin 波のみの理論微分波形, (中下) 雑音除去した sin 波のみの計算微分波形, (下) 誤差 (%)

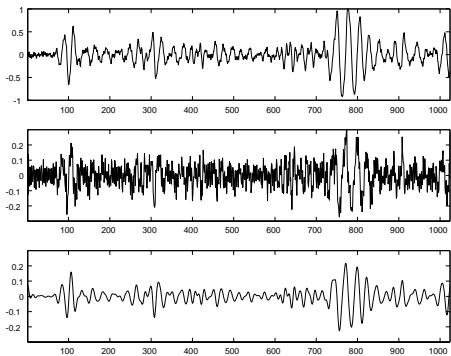


Fig. 17. 自然地震波の 1 階微分: (上) 元波形, (中) 計算 1 階微分波形, (下) 雑音除去計算 1 階微分波形

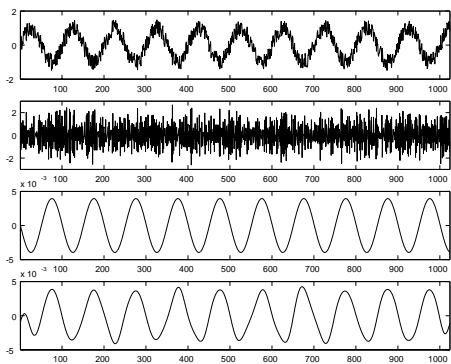


Fig. 18. 雑音を含む sin 波の 2 階微分: (上) 元波形, (中上) 計算 2 階微分波形, (中下) sin 波だけの理論 2 階微分波形, (下) sin 波だけの計算 2 階微分波形

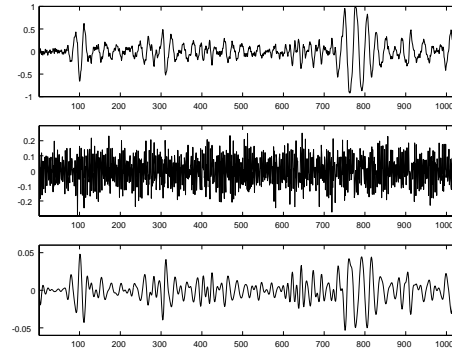


Fig. 19. 自然地震波の 2 階微分: (上) 元波形, (中) 計算 2 階微分波形, (下) 雑音除去計算 2 階微分波形

出して得た計算波形を示してある。明瞭に sin 波が分離されている。

次に、自然地震の 2 階微分を Fig.19 に示した。雑音除去 ( $j = 1, 2, 3$  を除去) なしでは地震波部分の識別は不可能であることがよく分かるであろう。

#### 7. おわりに

複雑な振動波形の数値積・微分を連続ウェーブレット変換と Fourier 変換を組み合わせで行った。ウェーブレットに Mexican Hat を用いると低振動数、高振動数の雑音を効率よく分離できることを示した。また、互いに独立ではないが信号を元、積分、微分波形、それぞれについてレベルごとに分離できる利点もある。以上を利用すると、加速度、速度、変位の線形結合である 2 次振動系の入・出力、および、システム定数の推定が可能であると考えられる。結論として、本報で用いた方法は目的によっては信号解析に非常に効果的であると言える。

#### 参考文献

- [1] 大崎 順彦, "新・地震動のスペクトル解析入門", 鹿島出版会, 1994
- [2] 小口 雄康, "Gabor ウェーブレットによるウェーブレット変換の計算式", 法政大学計算センター研究報告, 第 9 号, 1996
- [3] Susumu Sakakibara, "A Wavelet-Based Technique for Reducing Noises in Laboratory Data", in Wavelets and Their Applications Case Studies edited by Mei Kobayashi, siam, 1998
- [4] 中野 宏毅 他, "ウェーブレットによる信号処理と画像処理", 共立出版株式会社, 1999

## キーワード

信号処理, 数値積分と微分, 連続ウェーブレット変換・逆変換

.....

## Summary

### **Numerical Integrations and Differentiations of Seismic Waves by means of Continuous Wavelet Transform**

Yuko Oguchi

Computational Science Research Center, Hosei University

Numerical integrations or differentiations are not so difficult. In seismology, the necessity of calculations of displacements and/or velocities from acceleration records of ground motions has been occurred frequently. These calculations are usually done in the time domain to have not been derived to accurate results due to the high and low frequency noises contained in the original data. The author has noticed that the Fourier transform of Mexican Hat wavelet has  $\omega^2$  factor and this term will eliminate the low frequency part of data. The high frequency noises are easily omitted from wavelet transform. So, he applied the continuous Mexican Hat wavelet transform to calculate integrations and differentiations of them and have shown this method will be quite effective to some ground vibration data.

## Keywords

Signal processing, Numerical integrations and differentiations, Continuous wavelet transform