

# 飽和粘性土の圧密降伏関数と3次元弾塑性 - 圧密連成問題に関する研究

大橋 正未知

法政大学大学院工学研究科建設工学専攻

草深 守人

法政大学計算科学研究センター

竹内 則雄

法政大学工学部土木工学科

飽和した多孔質弾性体の線形圧密問題に関する支配方程式が Biot によって導かれた。しかしながら、この方程式は、地盤を弾性体として扱うなど実際の圧密特性を十分に表現していない仮定を含んでいる。本研究では、土粒子骨格構造を弾塑性体として扱うものとし、降伏関数として限界状態論に基づく Cam-clay モデルを拡張した新たなモデルを示し、具体的に3次元弾塑性 - 圧密有限要素プログラムに導入した。また、その実用性を評価するために、弾塑性解と線形弾性解の比較を行った。その結果、弾塑性解析から評価される圧密速度は、線形弾性解に比べかなり遅く、かつ線形弾性解による圧密沈下量は過小評価されることを示した。

## 1. はじめに

飽和土の圧密現象の理論解析は、Terzaghi によって初めて行われた。しかし、その圧密理論には、実際の圧密現象を十分に表現していないような仮定が含まれている。それにもかかわらず、Terzaghi の導いた圧密支配方程式は非常にすっきりした形で表現されていて、数値解を得るのが比較的容易であったため、現在に至るまで、多くの圧密、地盤沈下の理論的研究の基礎をなしてきた。Terzaghi 以後、多くの研究者によって圧密理論式が導かれてきた。1941 年には、飽和した多孔質の弾性体の線形圧密問題が Biot によって解かれた。

一方、粘性土の代表的な降伏関数の一つである Cam-clay モデルは、優れたモデルであるにもかかわらず、適用範囲が限定されていた。様々な粘性土に適用できるようにするため、草深、板垣らによって限界状態論をもとにした降伏関数が提案された(法政モデル)。法政モデルは、Cam-Clay モデルを拡張した関数である。しかしながら、せん断変形によって土が降伏し、破壊状態の後に限界状態に至るという過程が考慮されていなかった。そこで、この問題を考慮に入れた、法政モデルの拡張モデルも提案された(修正法政モデル)。

本研究の目的は、降伏関数として修正法政モデルを組み込んだ3次元弾塑性 - 圧密有限要素プログラムを作成し、その実用性を評価・検討することである。

## 2. 圧密支配方程式

弾性体を仮定した土粒子骨格構造の構成方程式を応力の釣り合い条件式に代入し整理することで、次の土粒子骨格構造の変位に関する支配方程式が得られる。

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \alpha \frac{\partial \phi_p}{\partial x_i} + F_i = 0 \quad (1)$$

ここで、 $u_i$  は変位の  $i$  方向成分、 $\phi_p$  は圧力ポテンシャル、 $F_i$  は物体力の  $i$  方向成分、 $G$  はせん断弾性係数、 $\lambda$  は体積

弾性係数である。

また、間隙水の流速と圧力に関する構成式が Darcy 則に従うものと仮定して、連続の条件式に代入し整理すると、間隙水の流れに関する支配方程式は次式ようになる。

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\phi$  は全ポテンシャル、 $k$  は透水係数、 $\gamma_w$  は水の単位体積重量、 $t$  は時間である。

具体的にコンピュータプログラムの開発を行うためには、圧密支配方程式を有限要素離散化する必要がある。有限要素法による離散化手法には、さまざまな手順が存在するが、ここでは、圧密支配方程式をガラーキン法に基づいて有限要素離散化する。

圧密支配方程式では、間隙水圧に  $p$  を用いたが、以下では、添字の混雑を避けるために添字  $p$  を省略して単に  $\phi$  と表現することとする。 $N_I$  は補間関数であり、 $n$  は節点総数である。全領域  $\Omega$  を  $m$  個の有限要素の集合体と考え、変位の支配方程式を離散化すると次式ようになる。

$$\sum_{e=1}^m \left\{ \int_{\Omega^e} \left[ G \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \left( \frac{\partial N_J}{\partial x_j} u_{jJ} + \frac{\partial N_J}{\partial x_i} u_{iJ} \right) + \lambda \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} u_{iJ} + \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \phi_J \right] d\Omega^e + \int_{\Gamma_\sigma^e} N_I S_i d\Gamma^e \right\} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} N_I F_i d\Omega^e \quad (I, J = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

ここで、 $S_i$  は荷重境界、 $\Omega^e$  は有限要素領域、 $\Gamma_\sigma^e$  は要素境界面である。

同様に、流の支配方程式を離散化すると次式ようになる。

$$\Gamma = \frac{pf}{p_0} = \frac{1}{2 - \Lambda} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left[ \left( N_I \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \right) u_{iJ}^{t+\Delta t} - \frac{1}{\gamma_w} \left( \chi N_I N_J - \theta \Delta t k_{[i]} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \right) \phi_J^{t+\Delta t} \right] d\Omega \\ &= \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left[ \left( N_I \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \right) u_{iJ}^t - \frac{1}{\gamma_w} \left( \chi N_I N_J + (1 - \theta) \Delta t k_{[i]} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \right) \phi_J^t \right] d\Omega \\ & - \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} \left( \Delta t k_{[i]} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} h_z \right) d\Omega + \sum_{e=1}^m \left[ \int_{\Gamma_q^e} N_I \bar{q} \Delta t d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $t$  は時間増分、上付きの $(t + \Delta t)$ は現在の時間、上付きの $t$ は現在より1つ前の時間、 $\Delta t$ は時間増分に関する重み係数である。

プログラムでは、式(3)、(4)を次のように整理して組込んだ。

$$\sum_{e=1}^m [H]^e \{V\}_{t+\Delta t}^e = \sum_{e=1}^m \{R\}_t^e \quad (5)$$

ここで、 $[H]$ は、変位と流れに関する剛性マトリクスであり、 $\{V\}$ は、節点変位と間隙水圧ベクトルである。 $\{R\}$ は、荷重と流量ベクトルである。

### 3. 降伏関数

降伏関数は、本研究室で提案した修正法政モデルを用いた。

修正法政モデルは、降伏キャップを楕円形の一部と仮定し、かつ限界状態線とこの楕円が接すると仮定した。また、この降伏キャップにおける頂点を破壊状態として、新たに破壊状態線を導入した(図1参照)。

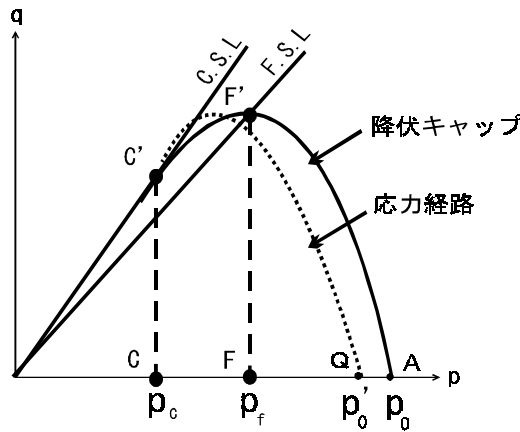


図1 応力経路と降伏曲面(修正法政モデル)

以上の仮定により、降伏から破壊、限界状態に至る過程を表現できる修正法政モデルが次式のように導かれた。

$$\begin{aligned} f &= \Gamma M^2 p^2 - 2\Lambda \Gamma M^2 p_0 p \\ & - (1 - 2\Lambda) \Gamma M^2 p_0^2 + (\Lambda - \Gamma) q^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $M$ は限界状態線の勾配、 $\Lambda$ は材料パラメータ、 $p_0$ は降伏キャップの移動を表す等方圧密応力を表す。図1において $p_0$ と $p_f$ の比を材料パラメータ  $\Gamma$  とすると次式の関係が要求される。

### 4. 解析モデルと条件

解析モデルを図2に示す。対象領域は、広さ50m×50m、深さ10mとし、この領域全体で地盤は一樣な粘土であると仮定した。排水条件は、上面からの排水のみを可能とした。荷重は、地盤中央20m×20mに500kPaの等分布荷重を作用させた。解析は、対称性を考慮して、このモデルを1/4にした領域(図2のabcdefgh)を726節点によって500要素に分割して行った。

開発したプログラムは、実際の施工過程のシミュレーションを可能とするため、段階的に圧密荷重を増やすことができる。しかし、今回の解析は、総ステージ数を2とし、第1ステージで載荷、第2ステージで時間増分計算を行う1段階の圧密解析とした。

弾性解析は、弾性-弾塑性を判別するサブルーチン内の一部分を変更し、常に弾性体になるようにして、同じプログラムを用いて行った。

解析に用いた材料定数を表1に示す。修正法政モデルに導入された材料パラメータ  $\Lambda$  および  $\Gamma$  は、本研究室で行われた圧密非排水三軸試験結果から、まず  $\Lambda$  を0.6と設定した。それによって、 $\Gamma$  との関係を用いて  $\Gamma$  を0.714と決定した。

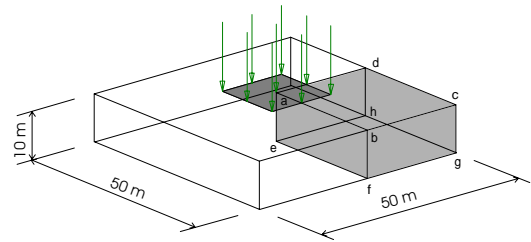


図2. 解析モデル

表1. 解析に用いた材料定数

|           |             |                      |
|-----------|-------------|----------------------|
| 限界状態線の傾き  | $M$         | 1.5                  |
| 正規圧密曲線の傾き | $\lambda$   | 0.2                  |
| 過圧密曲線の傾き  | $\kappa$    | 0.02                 |
| 初期圧密圧力    | $P_0$ [kPa] | 200                  |
| 材料パラメータ   | $\Lambda$   | 0.6                  |
| 材料パラメータ   | $\Gamma$    | 0.714                |
| ポアソン比     | $\nu$       | 0.25                 |
| ヤング係数     | $E_0$ [kPa] | 5000                 |
| 透水係数      | $k$ [cm/s]  | $1.0 \times 10^{-6}$ |

### 5. 解析結果の比較と考察

開発したプログラムを評価するため線形弾性解と弾塑性解の比較・検討を行った。

#### (1) 圧密沈下量

載荷面中央点からの距離  $r$  と地表面沈下量の関係を図3に示す。図3(a)は、載荷直後の瞬時変形の様子を示したものである。瞬時変形では、作用荷重のほとんど全てが間

隙水で受け持たれるため、有効応力の増加はない。そのため、弾塑性解析も線形弾性解析と一致している。なお、地盤中央の瞬時沈下量は約 35cm となっている。

図 3 (b)は、圧密完了後の地表面沈下を示したものであり、地盤中央での沈下は、線形弾性解で約 60cm、弾塑性解で約 78cm となっている。

### (2) 圧密度と時間係数

圧密度と時間係数の関係を図 4 に示す。同一圧密度に達するまでの圧密所要時間は、弾塑性解に比べ線形弾性解ではかなり早いことが分かる。実際の軟弱粘性土地盤を考えた場合、線形弾性解よりも弾塑性解のほうが実現象をよりよく表現していると期待することはそれほど無理な仮定ではない。このことから、線形弾性解析は地盤内の過剰間隙水圧の消散を実際よりも早めに評価する危険が常に付きまとう。

### (3) 過剰間隙水圧の分布

図 2 の abfe 断面で見た過剰間隙水圧の分布を図 5(a) ~ (g) に示す。同図の左側が線形弾性解析、右側が弾塑性解析による過剰間隙水圧の分布を表す。

載荷直後の過剰間隙水圧の分布は、載荷面直下部の比較的限定された領域で過剰間隙水圧が上昇し、その影響が周囲へ広がっている様子が分かる。また、この過剰間隙水圧は、時間の経過に伴って上部から次第に逸散していく様子が表現されている。また、載荷面直下の地盤底部領域に発生した過剰間隙水圧は、他の領域に比べその逸散が著しく遅れている。これらの傾向は、線形弾性解よりも弾塑性解で顕著に現われている。

### (4) 有効せん断応力の分布

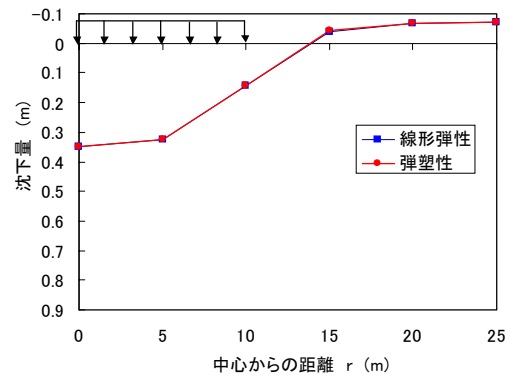
図 2 の abfe 断面で見た有効せん断応力の分布を図 6(a) ~ (f) に偏差応力の第 2 不変量で示す。同図の左側が線形弾性解析、右側が弾塑性解析による解析結果である。

有効せん断応力は、載荷面直下の地表面に近い領域よりは底部に集中しており、載荷幅 (2.0 m) に比べ粘土層の厚さ (1.0 m) が小さい場合は、基盤面を含む底部破壊面が形成され、比較的大規模な側方流動を伴う破壊形態を示す危険を示唆している。

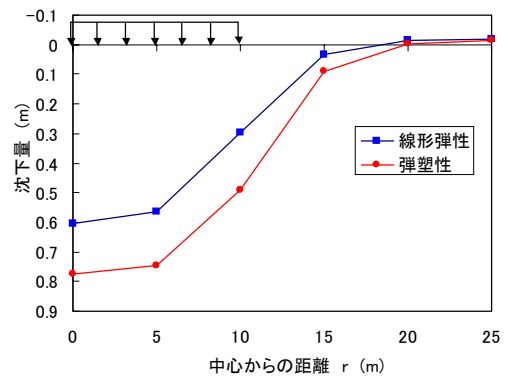
## 5. あとがき

圧密降伏関数として修正法政モデルを用いて、Biot の圧密理論に基づく 3 次元弾塑性 - 圧密連成解析の計算プログラムを開発した。また、開発したプログラムを用いてモデル解析を行い、線形弾性解析と弾塑性解析の比較・検討を行った。その結果、過剰間隙水圧の逸散過程や圧密沈下量における、線形弾性解析と弾塑性解析の違いを示した。

さらに、修正法政モデルが圧密降伏関数として適用できるかどうかや開発プログラムが実際問題に対して有効かどうかなどを今後も検討を続ける必要がある。そのために、実施工におけるデータあるいはモデル試験によるデータを入手し、その結果と解析結果との比較・検討を行うことが望まれる。



(a) 載荷直後



(b) 圧密完了後

図 3 . 中心からの距離 r と沈下量の関係

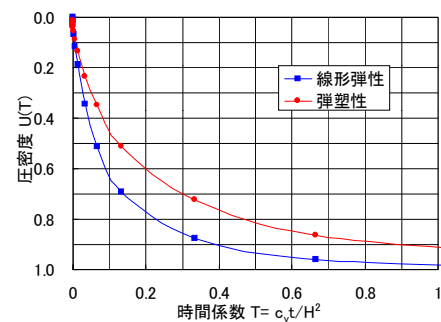
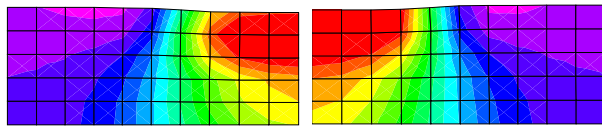
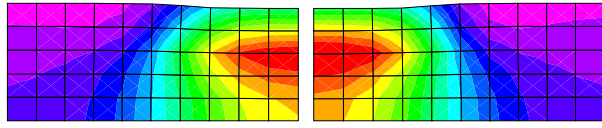


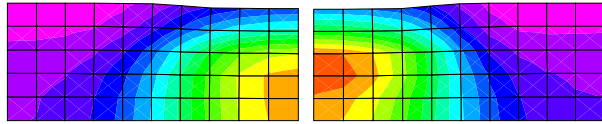
図 4 圧密度と時間係数の関係



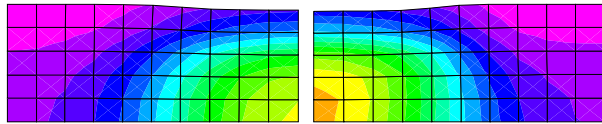
(a) 載荷直後



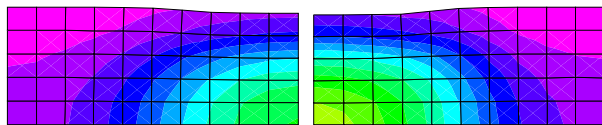
(b) 1日後



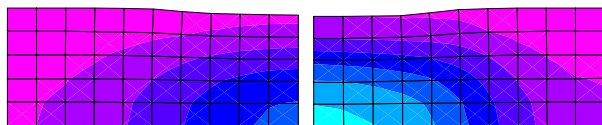
(c) 5日後



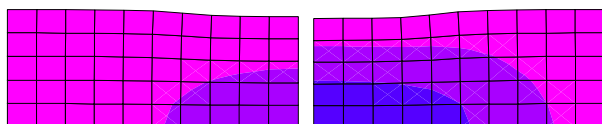
(d) 12日後



(e) 23日後



(f) 46日後



(g) 116日後

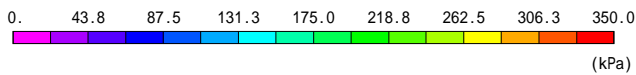
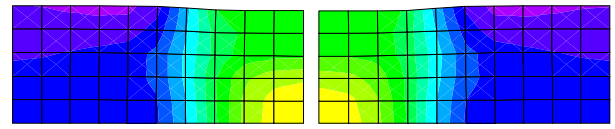
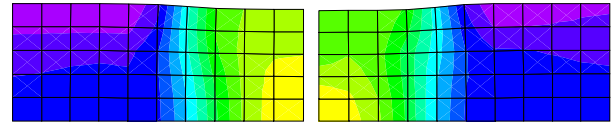


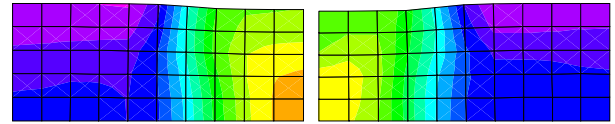
図5 . 間隙水圧の分布図



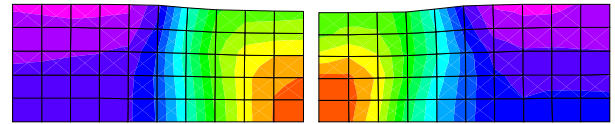
(a) 載荷直後



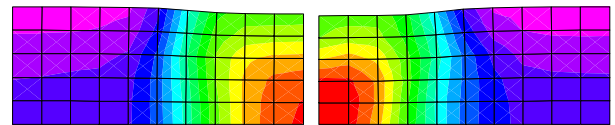
(d) 2日後



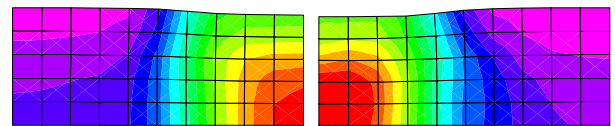
(c) 3日後



(d) 6日後



(e) 116日後



(f) 231日後

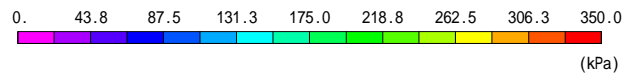


図6 .  $\sqrt{3J_{2D}}$ の分布

参考文献

- [1] C. S. Desai and H. J. Siriwardane : Constitutive Laws for Engineering Materials, Prentice-Hall, 1984
- [2] 土質工学会 : 土質工学ハンドブック, 土質工学会, 1991 .
- [3] 土木学会 : 土木工学ハンドブック, 土木工学会, 1990
- [4] 川本眺万, 林正夫 : 地盤工学における有限要素法, 培風館, 1980 .
- [5] 田中忠次, 鶴飼恵三, 河邑眞, 阪上最一, 大津宏康 : 地盤の三次元弾塑性有限要素解析, 丸善, 1997
- [6] 土質工学会 : 土の強さと地盤の破壊入門, 土質工学会, 1991 .
- [7] D. J. ネイラー, G. N. パンディ 他著 ; 稲田倍徳, 赤石勝 監訳 : 地盤工学における有限要素法, 1989
- [8] 鷲津久一郎, 宮本博 : 有限要素法ハンドブック 基礎編, 培風館, 1993

キ-ワード

圧密, 粘土, 降伏関数, 限界状態, 破壊状態, 数値解析, 有限要素法

-----

**Summary.**

**Consolidation Yield Function of Saturated Clay and 3-D Consolidation Analysis**

Masamichi Ohashi

Department of Civil Faculty of Engineering, Hosei University

Morito Kusabuka

Computational Science Research Center, Hosei University

Norio Takeuchi

Department of Civil Faculty of Engineering, Hosei University

An equation of the linear consolidation theory for saturated and porous elastic body was derived by Biot. However, the equation includes assumptions that are different from real consolidation phenomena

The purpose of this study is to develop a 3-D elasto-plastic FEM program for consolidation problem, and evaluate and examine a practicability. The results show a difference between linear elastic analysis and elasto-plastic analysis to disappearance process of excess porewater pressure and settlement of consolidation, etc.

**Keywords.**

Consolidation, Clay, Yield Function, Critical State, Failure State, Numerical Analysis, FEM