

自然要素法の固体力学問題への応用

松尾悟志

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

自然要素法は、最近開発された数値解法であり、高精度のメッシュレス解法を構築するための基礎として、固体力学の問題に対して応用されている。二次元問題に対して、この方法は Voronoi 図と Delaunay 三角形を背景とした自然近傍補間節点をを用いた補間を基礎とするもので、地球物理現象の多変量データ補間の方法として誕生している。ここでは、自然要素法の固体力学問題への応用について、基本的な解析実験を行い、その結果と考察を行った。また、自然近傍を台とする他の補間方法として、non-Sibsonian 補間について簡単に述べる。

1. まえがき

工学で対象とする様々な力学現象を解析するために、現在最も広く用いられている近似解法は有限要素法 (Finite Element Method : FEM) である。それに対し、自然要素法 (Natural Element Method : NEM) は最近開発された近似解法である。ここでは、二次元における離散モデルに対する自然要素法と有限要素法との比較、平面応力場における曲げ問題などの固体力学問題に対して、自然要素法の有用性とその応用の可能性について考察を行う。また、自然近傍補間を基礎とした新しい補間スキームである non-Sibsonian 補間について述べる。

2. 自然要素法

ここでは、自然要素法の補間関数と、補間関数構築の基礎となる自然近傍補間について述べる。

(1) 自然近傍

ここでは、点 x に関する自然近傍と自然近傍節点について考える。簡単のために、図 1 に示すような 3 個の節点により構成される Delaunay 三角形の外接円が内部に点 x を含む場合を例に挙げる。

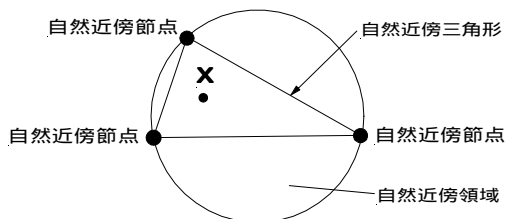


図 1 自然近傍領域と自然要素領域

3 個の点は点 x に対する自然近傍節点と呼ばれ、ここで構成された三角形は自然近傍三角形と呼ばれる。点 x に対する自然近傍節点、自然近傍三角形の判別は式 (1) で実行される。

$$kx \cdot x_0^{(e)} k < r_0^{(e)} \quad : \quad e = 1 \sim M \quad (1)$$

ここで、 M は Delaunay 三角形の総数、 $x_0^{(e)}$ は要素 e の外接円中心位置ベクトルであり、 $r_0^{(e)}$ は要素 e の外接円半径である。

(2) 自然近傍定義域

まず、有限要素補間と自然近傍補間の定義域について示す。例として節点 I を一つの節点として構成される幾つかの三角形要素を用いる。図 2 において、節点 I に対する有限要素定義域は節点 I を頂点にもつすべての三角形内部であるのに対し、自然近傍定義域はそのすべての三角形の外接円内部である。

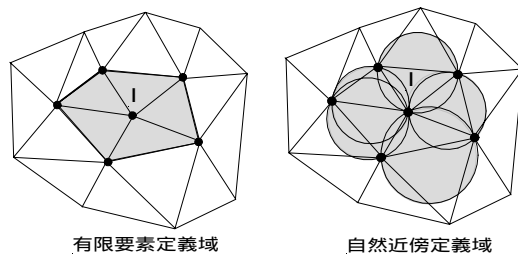


図 2 節点 I に対する有限要素定義域と自然近傍定義域

次に積分点を点 x とした場合の近傍節点と、それに対する定義域の例を図 3 に示す

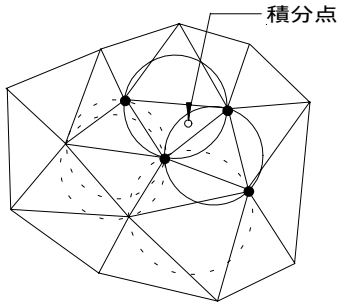


図3 積分点と自然近傍節点

(3) 自然近傍補間関数

自然要素法において、点 x の変位 $u(x)$ はその点の近傍節点の値を用いて補間され、自然近傍節点の数を n_x とすると、式(2)によって示される。

$$u(x) = \sum_{a=1}^{n_x} \hat{U}_b(x) \hat{u}_x^a \quad (2)$$

ここで、 $\hat{U}_b(x)$ は点 x に関する a 番目の自然近傍節点に関する補間関数であり、 \hat{u}_x^a は点 x に関する a 番目の自然近傍節点における変位ベクトルである。補間関数は次式によって求められる。

$$\hat{U}_b(x) = \frac{\sum_{e=1}^{m_a} 4(x_0^b; x_0^c; x_0^e)}{\sum_{d=1}^{n_x} \hat{U}_b(x)} \quad (3)$$

式(3)において、 m_a は節点 a を一つの節点とする Delaunay 三角形の総数であり、 (x_1, x_2, x_3) は x_1, x_2, x_3 を三つの頂点とする三角形の面積を表す。また x_0^c は節点 c, a と x を三つの頂点とする三角形の外接円中心位置ベクトルであり、 x_0^b は節点 a, b と x を三つの頂点とする三角形の外接円中心位置ベクトルである。

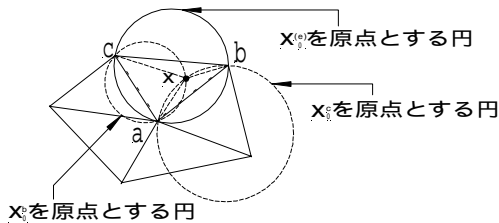


図4 自然近傍補間関数の構築

(4) 補間関数の性質

次に自然近傍補間関数の性質について要約する。自然要素法における補間関数は節点において C^0 の連続性であるのに対し、節点以外の至る所では C^1 の連続性を保つ。次に

補間関数が保持している基本的な性質を示す。

$$0 \leq \hat{U}_b(x) \leq 1 \quad (4a)$$

$$\hat{U}_b(x_b) = \hat{U}_{ab} \quad (4b)$$

$$\sum_{a=1}^{n_x} \hat{U}_b(x) = 1 \quad \text{in } \Omega \quad (4c)$$

$$x = \sum_{a=1}^{n_x} \hat{U}_b(x) x_a \quad (4d)$$

式(4a)は形状関数の定義により自明な性質である。式(4b)は自然近傍補間が節点の値を通過することを意味しており、有限要素補間関数もこの性質を共有する。式(4a)と式(4c)により形状関数は一の分割を形成する。この意味はこれらの形状関数を基礎として構築される補間関数は厳密に一定値関数を表すことができることを意味している。また、式(4d)は線形整合性を示しており、自然近傍形状関数はこの局所座標の性質を満足し、幾何学的な座標を厳密に表すことができることを意味している。

3. 自然要素解析アルゴリズム

自然要素解析アルゴリズムは有限要素解析アルゴリズムと殆ど同一である。また、有限要素法と自然要素法の解析基本入力データは、有限要素メッシュが Delaunay 三角形で構成される場合には全く同一である。計算アルゴリズム上の本質的な差異は、有限要素法では要素内部の積分点における状態変数の補間がその要素を構成する節点だけに依存するのに対し、自然要素法では要素内部の積分点における状態変数の補間はその要素を構成する節点以外の自然近傍節点にも依存することである。

4. 数値解析

ここでは、自然要素法の有用性を調査するために、自然要素法を基本的な固体力学問題に応用し、その結果の考察を行う。

(1) 片持ち梁の曲げ問題

図5に示される末端荷重をかけた片持ち梁について解析を行った。

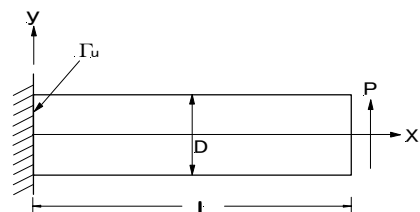


図5 片持ち梁モデル

解析に用いた梁のモデルは、長さを $L = 100\text{mm}$ 、高さを $D = 10\text{mm}$ 、厚さを単位厚さとし、平面応力状態であると仮定する。また、ヤング率を $E = 1000\text{kgf/mm}^2$ 、ポアソン比を $\nu = 0.3$ 、荷重 $P = 1.0\text{kgf}$ とする。まず、片持ち梁の末端における変位について、自然要素法と三角形有限要素法との比較を行った。ここで、Y 方向の変位ベクトルに対する厳密解は以下の式で与えられる。

$$u_y = \frac{P}{6EI} C_3 \omega^2 (L - x)^3 + (3L - x) x^2 \quad (5a)$$

ここで I は梁の慣性モーメントであり以下で示される。

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (5b)$$

解析実験には、モデルを Y 軸方向に 10 分割し、X 軸方向に 10 分割ずつ増やした入力データを用いた。結果を図 6 に示す。

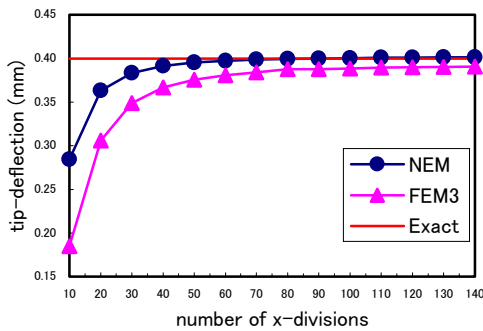


図 6 片持ち梁の末端における Y 方向への変位

図 6 より、X 方向の分割数が増えるにつれ、NEM 解析結果は三角形有限要素法に比べ厳密解 0.4 に早い段階で近づくことがわかる。つまり、自然要素法は三角形有限要素より少ない節点数で高精度の結果を得られることが言える。

次に片持ち梁の曲げ問題に対する応力について数値実験を行った。解析モデルは先に述べた片持ち梁と同様のものを用い、節点を等間隔に 1111 個配置した節点入力データを与えた。測定位置は $x = 5.03$ 上の 10 個の積分点であり、その積分点における応力と厳密解との比較を行った。垂直応力結果を図 7 に示し、せん断応力結果を図 8 に示す。また、垂直応力とせん断応力の厳密解はそれぞれ式 (6a) と式 (6b) に示される。

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\Delta P (L - x)y}{I} \quad (6a)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{P}{2I} \frac{D^2}{4} \Delta y^2 \quad (6b)$$

ここで I は梁の慣性モーメントであり式 (5b) と同様である。

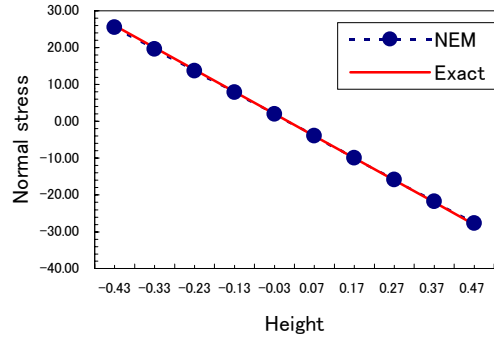


図 7 片持ち梁の垂直応力

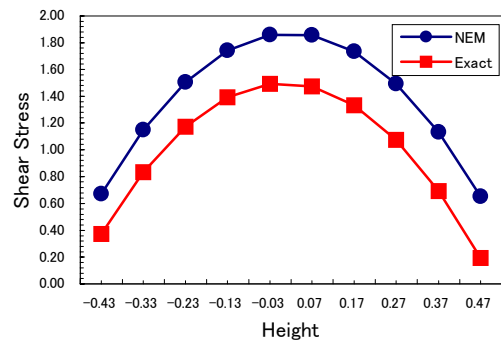


図 8 片持ち梁のせん断応力

図 7 において、NEM による垂直応力は厳密解とよい一致を示している。図 8 におけるせん断応力については、解析解と厳密解に差が見られるが、望ましい解析結果が得られた。

(2) 内圧を受ける肉厚円筒

ここでは図 9 に示した内圧を受ける肉厚円筒モデルについて解析を行った。

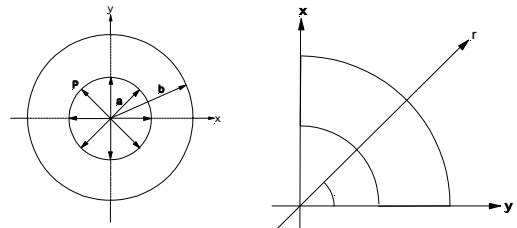


図 9 肉厚円筒モデルと肉厚円筒 1/4 モデル

解析に用いた円筒は内半径が $a=50\text{mm}$, 外半径が $b=100\text{mm}$ であり, 単位厚さのモデルを用いた. また, ヤング率を $E=1000\text{kgf/mm}^2$, ポアソン比を $\nu=0.3$, 内圧を $P=1.0\text{kgf}$ とした. 最初に, 半径方向の変位について NEM と FEM とを比較するために, 節点入力データは表 1 に示した節点数を等間隔に配置したものをを用い, 円筒の外周に配置された一つの節点における半径方向変位の測定を行った. また, この厳密解は次の式で表すことができる.

$$u_r(r) = \frac{a^2 Pr}{E(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (7)$$

表 1 における測定結果により, NEM, FEM 共に節点数の増加に伴い, ほぼ同じ精度で厳密解に近づくことが示される.

表 1 半径方向変位の比較

number of node	nem	fem
169	1.01966E-03	1.01754E-03
361	1.52907E-03	1.52690E-03
625	2.03813E-03	2.03613E-03
1369	3.05664E-03	3.05500E-03
1849	3.56607E-03	3.56456E-03
Exact	4.33333E-03	

5. non-Sibsonian 補間

現在までは Sibson 補間を用いた自然要素法について述べてきたが, ここでは自然近傍を基礎とした補間関数の一つである non-Sibsonian 補間を示す.

(1) non-Sibsonian 補間関数

図 9 に示すような 4 個の自然近傍を持つ点 x と, それに対する Voronoi セルを考える.

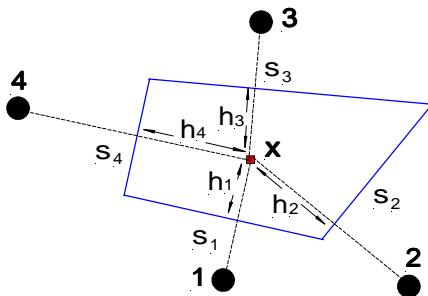


図 9 non-Sibsonian 補間

距離 $s_i(x)$ は節点 I に関する Voronoi 辺の Lebesgue 測度であり $h_i(x)$ は節点 I の Voronoi 辺から点 x までの垂線距離である. これらを基に non-Sibsonian 形状関数は次の式に

よって定義される.

$$\hat{u}_i(x) = \frac{\bar{a}_i(x)}{\sum_{J=1}^n \bar{a}_J(x)}; \quad \bar{a}_J(x) = \frac{s_J(x)}{h_J(x)} \quad (8)$$

このことより二次元平面問題では, Sibson 補間は \mathbf{R}^2 における一階の Voronoi 多角形の重複面積を基礎としているのに対し, non-Sibsonian 補間は \mathbf{R}^1 の Lebesgue 測度によって構築されることがわかる. これは形状関数を一般的な d 次元で考えると, \mathbf{R}^d における Sibson 補間は同次元 (d 次元量) であるが, 一方 non-Sibsonian 補間は次元数 $d-1$ の次元量の計算によるものであり, 計算パフォーマンスの向上が考えられる. また, 関数値 $u(x)$ のベクトル値に対する補間スキームは先に示した式 (2) と同様に表せられる.

(2) 性質

non-Sibsonian 補間は自然近傍の概念を基礎としているため, non-Sibsonian 補間の性質は自然近傍補間の性質を殆ど共有している. 先に述べた一階の分割や線形整合性, 形状関数の台や規則性といった性質が両方の補間に共通している.

6. まとめ

ここでは自然要素法とその有用性, 及び自然近傍を台とした補間関数である non-Sibsonian 補間について述べた. 自然要素法の有用性を調査するために, Delaunay 三角形メッシュを持つ片持ち梁や肉厚円筒といった離散モデルを対象に解析を行った. 解析により自然要素法が一定ひずみ三角形有限要素に比べ, 良い精度の解析解が得られた. このことより, 自然要素法は将来有望な数値解法であると言える. また, 自然近傍を基礎とする補間関数の多様性の一つとして示した non-Sibsonian 補間は, 自然要素法従来の Sibson 補間に比べ, 計算効率における有効性と解析解に対する精度の向上が期待できる.

参考文献

- 1) N.Sukumar, B.Moran and T.Belytschko, 'The natural Element method in solid mechanics', Int.J.Numer.Meth. Engng., 43, 839-887 (1998).
- 2) R.Sibson, 'A brief description of natural neighbor interpolation', in V.Barnett(ed.) Interpreting Multivariate Data, Wiley, Chichester, 21-36(1981).
- 3) N.Sukumar, B.Moran, A.Yu Semenov, and V.V.Belikov, 'Natural neighbor Galerkin Methods', Int.J.Numer.Meth. Engng., (2000).

キーワード

自然要素法、自然近傍補間、non-Sibsonian 補間

Summary.

Application of Natural Element Method to the Solid Mechanics

Satoshi MATSUO

Division of Engineering, Specialize In System Engineering, Hosei University Graduate School

Hiroshi TAKEDA

Faculty of Engineering, Department of Systems Control Engineering, Hosei University

In this paper, we assess the potential and capabilities of a recently developed numerical method-coined as Natural Element Method. The interpolation scheme used in NEM is known as natural neighbor interpolation. The application of NEM to the solution of elliptic boundary value problems in solid mechanics, governed by the equation of equilibrium in elastostatics, is explored. In the application of NEM to the solution of the equilibrium equation of elastostatics, a displacement-based Galerkin implementation is used, and the trial and test function are constructed using natural neighbor interpolation.

Key Words.

Natural Element Method, Natural Neighbor Interpolation, Non-Sibsonian Interpolation

