

線形ポテンシャル場を用いた有限体積法による地下水浸透問題の解析法

石垣 智明

法政大学大学院工学研究科

竹内 則雄 草深 守人

法政大学工学部土木工学科

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

線形ポテンシャル場を用いた有限体積法による地下水浸透問題の解析法を提案する。有限体積法(FVM)は、非直交格子を用いた有限差分近似として流体力学や移動現象論などの分野において広く用いられている。特に、地盤環境の問題である地下水による汚染拡散のような水以外との連成問題を解く手法として利用されている。これらの方法は、主に、水頭場を一定として取り扱っている。しかし、FVMは非Galarkin重みを有する有限要素法(FEM)の特殊なケースと考えることができるため、水頭場の次数を高めることで、より精度の高い解析が可能となる。本研究では、FEMの四角形要素と同一の水頭場を仮定し、FEMの概念を導入した定式化を試みた。さらに、本手法によって得られる解の特性を検討するため、簡単な数値計算例によりFEM解との比較検討を行った結果を示す。

1. はじめに

有限体積法(FVM)は、非直交格子を用いた有限差分近似として流体力学や移動現象論などの分野において広く用いられている[1]-[3]。特に、地盤環境の問題である地下水による汚染拡散のような水以外との連成問題を解く手法として実績がある。また、近年になって、固体力学の分野においてもFVMを見直す動きがみられるようになってきており、著者らもFVMとFEM、剛体ばねモデル(RBSM)の関係や、進行型破壊の解析のために、FVMの統一的展開を行った[4]-[6]。FVMは非Galarkin重みを有する有限要素法(FEM)の特殊なケースと考えることができ、両者を要素分割や補間法の立場から検討した研究も行われている[7]。

しかし、その定式化は統一的とはいえず、その結果として計算効率の比較等に多くの誤解を招きやすい。そこで、本研究では、FVMによる浸透問題の解析法に関する統一的展開を行うことを目的として、FEMの四角形要素と同等の線形水頭場を仮定し、さらに、FVMにFEMの概念を導入した定式化を示す[8]-[10]。また、簡単な数値計算例によって、本手法により得られる解の精度についても検討を加える。

2. 浸透流の支配方程式と弱形式

定常浸透流の支配方程式が次式で与えられる。

$$L^t v + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$v = -k d \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$d = L h \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで、 f は湧水、 h は水頭であり、 v 、 d 、 k は、それぞれ流速、動水勾配、透水係数を表わしており、マ

トリックスで表すと、以下の関係にある。

$$v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}, d = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix}, k = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

式(1)に幾何学的境界条件を満たす任意の重み W を乗じて領域 Ω について積分すると、次式が得られる。

$$\int \int_{\Omega} [LW]^t v d\Omega + \int \int_{\Omega} W f d\Omega = 0 \quad (4)$$

いま、領域 Ω は、閉境界 $\Gamma^{(e)}$ で囲まれた n 個の部分領域 $\Omega^{(e)}$ から構成されているものとする。このとき、式(4)は離散領域に対して以下のように表わすことができる。

$$\sum_{e=1}^n \int \int_{\Omega^{(e)}} W (L^t v + f) d\Omega = 0 \quad (5)$$

ここで、式(5)の左辺第1項にガウスの発散定理を適用すると、離散領域に対する弱形式が次のように得られる。

$$\sum_{e=1}^n \left(- \int \int_{\Omega^{(e)}} [LW]^t v d\Omega + \int \int_{\Omega^{(e)}} W f d\Omega + \oint_{\Gamma^{(e)}} W n v d\Gamma \right) = 0 \quad (6)$$

3. 有限体積法による定式化

ここでは、従来から一般に用いられている有限体積

法の定式化に対して、コンピュータ・インプリメンテーションを念頭に入れた統一的な展開により定式化を論ずる。

図1に示す網掛け部分はセル中心スキームにおける制御点 r に関する制御体積を示したものである。図中、 $\Omega^{(r)}$ が制御体積で、 $\Gamma^{(r)}$ がその閉境界を示している。また、印が制御点を、印が着目制御点と隣接する制御点とを結んだ線分の中心を、 \times 印が着目制御点と隣接制御点で囲まれた領域の図心を表わしている。

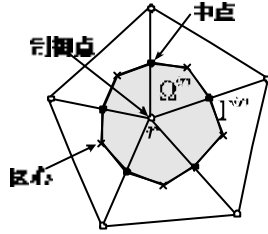
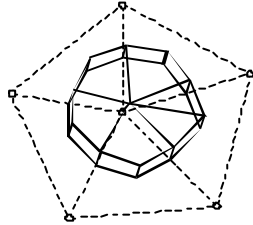


図1 制御点と制御体積

いま、図2に示すように、一定な重み関数 $W^{(r)}$ を



$\Omega^{(r)}$ 内では一定、その他では0と仮定し、制御点 r の値で代表されることを考慮すると式(6)は以下のようになる。

$$\sum_{r=1}^R \left[W^{(r)} \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n v d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (7)$$

図2 有限体積法で用いられる一定な重み関数

一方、境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の全水頭 h は近似的に制御点 r および近傍制御点の節点水頭 $\bar{h}^{(r)}$ を用いて次のように補間できるものとする。

$$h \approx \hat{h}^{(r)} = N^{(r)} \bar{h}^{(r)} \quad (8)$$

ここで、 $\hat{h}^{(r)}$ は近似された全水頭、 $N^{(r)}$ は基底関数である。このとき、動水勾配は、次のように表わされる。

$$d = L \hat{h}^{(r)} = L N^{(r)} \bar{h}^{(r)} = B^{(r)} \bar{h}^{(r)} \quad (9)$$

ただし、 $B^{(r)} = L N^{(r)}$ である。したがって、式(7)は、式(9)を用いて以下のように整理される。

$$\sum_{r=1}^R \left[W^{(r)} \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n(-k) B^{(r)} d\Gamma \bar{h}^{(r)} + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (10)$$

いま、全制御点における重みを並べた一次元配列を \widetilde{W} とすると、制御点 r における重み関数 $W^{(r)}$ は以下のように関係付けられる。

$$W^{(r)} = \mathcal{T}^{(r)} \widetilde{W} \quad (11)$$

ここで $\mathcal{T}^{(r)}$ は全制御点における重みの配列と制御点 r の重みを関係付ける行列である。同様に、制御点 r に関する節点水頭 $\bar{h}^{(r)}$ と全制御点における節点水頭を並べた一次元配列 H との間に次の関係が成立する。

$$\bar{h}^{(r)} = \mathcal{A}^{(r)} H \quad (12)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(r)}$ は全制御点における節点水頭と着目制御点に関する節点水頭を関係付ける行列である。式(10)に式(11)、(12)の関係を代入し、重み \widetilde{W} が任意であることを考慮すると次の支配方程式が得られる。

$$KH = P \quad (13)$$

ただし K および P は、次のとおりである。

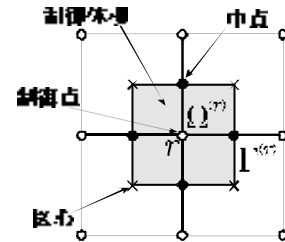
$$K = \sum_{r=1}^R \left(\mathcal{T}^{(r)} \right)^t k^{(r)} \mathcal{A}^{(r)} \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (14)$$

$$k^{(r)} = \oint_{\Gamma^{(r)}} n(-k) B^{(r)} d\Gamma$$

$$P = \sum_{r=1}^R \left(\mathcal{T}^{(r)} \right)^t p^{(r)} \left. \vphantom{\sum} \right\} \quad (15)$$

$$p^{(r)} = \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega$$

このように、有限体積法の支配方程式は離散化された連立一次方程式(13)に帰着し、左辺係数行列 K は、各制御点毎にその寄与 $k^{(r)}$ を組み合わせることにより構築する。同様に、右辺既知ベクトル P についても各制御点毎の寄与 $p^{(r)}$ を組み合わせることによって構築



する。それぞれの寄与は、制御体積 $\Omega^{(r)}$ および、閉境界 $\Gamma^{(r)}$ について積分することにより求めることができる。

4. FEMの概念を導入した有限体積法による定式化

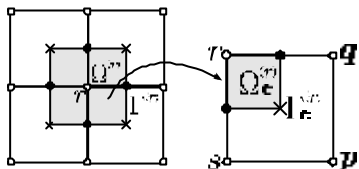
(1) 双一次水頭場

ここでは、水頭場を双一次と仮定し、有限要素の概念を導入した有限体積法の定式化を行う。

図3 制御点と制御体積

図3は双一次水頭場での制御点と制御体積の関係を示した図である。ここで、閉境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の全水頭関数 $\hat{h}^{(r)}$ を定義するにあたり、図4の太線で示す4つの制御点 r, p, q, s で構成される四角形網 e の領域 $\Omega_e^{(r)}$ を考える。

閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に四角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるものとする。いま、4つの制御点で囲まれた四角形網内における境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の全水頭関数 $\hat{h}_e^{(r)}$ を、それぞれの制御点における節点水頭 $\bar{h}_e^{(r)}$ に



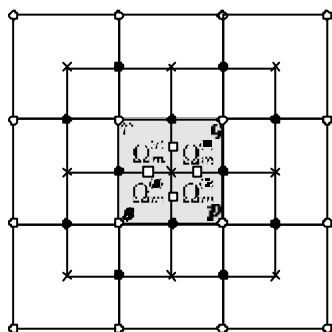
より以下のように表わす。

$$\hat{h}_e^{(r)} = N_e^{(r)} \bar{h}_e^{(r)} \quad (16)$$

$$N_e^{(r)} = [N_r \quad N_p \quad N_q \quad N_s]$$

$$\bar{h}_e^{(r)} = [\bar{h}(r) \quad \bar{h}(p) \quad \bar{h}(q) \quad \bar{h}(s)]^t$$

ここで、 N_r は有限要素法の場合と同様に次の関係にある。



$$N_r = a_r + b_r x + c_r y + d_r xy \quad (17)$$

図4 双一次水頭場を仮定する四角形網

(2) FEMの概念の導入

ここでは、有限体積法に有限要素法を導入し、通常の有限要素アルゴリズムの範囲で有限体積法を取り扱うために一般的な定式化について論ずる。また、水頭場には、先に示した双一次水頭場を用い、四角形網に着目して有限体積法の定式化を整理する。

図5 有限要素と制御体積の関係

さて、FVMでは全領域 Ω を部分領域 $\Omega_m^{(r)}$ の集合で考えていた。一方、領域 Ω を M 個の四角形網、すなわち有限要素の集合と見なすこともできる。部分領域 Ω_m は、図5に示すように4つの制御点 r, p, q, s に関する制御体

積の一部($\Omega_m^{(r)}, \Omega_m^{(p)}, \Omega_m^{(q)}, \Omega_m^{(s)}$)から構成されており、これらを Ω_m の部分領域と考えると以下の関係が成立する。

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m = \bigcup_{m=1}^M (\Omega_m^{(r)} \cup \Omega_m^{(p)} \cup \Omega_m^{(q)} \cup \Omega_m^{(s)}) = \bigcup_{m=1}^M \left(\bigcup_{l=1}^4 \Omega_m^{(l)} \right) \quad (18)$$

制御体積の境界の和集合と、四角形網内の部分領域の境界を全ての四角形網について考えたものとの関係は以下のように表すことができる。

$$\bigcup_{r=1}^R \Gamma^{(r)} = \bigcup_{r=1}^R \left(\bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Gamma_e^{(r)} \right)$$

$$= \bigcup_{m=1}^M (\Gamma_m^{(r)} \cup \Gamma_m^{(p)} \cup \Gamma_m^{(q)} \cup \Gamma_m^{(s)})$$

$$= \bigcup_{m=1}^M \left(\bigcup_{l=1}^4 \Gamma_m^{(l)} \right) \quad (19)$$

これらの関係を考慮して有限体積法に関する弱形式(7)を書き改めると次のようになる。

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 \left(\int_{\Gamma_m^{(l)}} W n v d\Gamma + \int_{\Omega_m^{(l)}} W f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (20)$$

上式は、四角形網毎に結合する制御点に関する寄与を計算し、それを一旦組み合わせた後、全四角形網(有限要素的に考えるのなら要素)について重ね合わせている。この手順は有限要素法の剛性行列作成手順と等価である。

式(20)において、重み関数 W は四角形網の l 番目の制御点の重みが用いられるため、これを、 $W_m^{(l)}$ とすると、

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 W_m^{(l)} \left(\int_{\Gamma_m^{(l)}} n v d\Gamma + \int_{\Omega_m^{(l)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (21)$$

一方、境界 $\Gamma_m^{(l)}$ 上の水頭は、部分領域 Ω_m を構成する制御点の水頭により式(16)のように補間できるものとし、以下のように表す。

$$h \approx \hat{h} = N_m \bar{h}_m \quad (22)$$

ここで、 \bar{h}_m は部分領域 Ω_m を構成する全ての制御点における節点水頭を並べた一次元配列であり、 N_m は部分領域 Ω_m に対する式(16)に示した行列である。この時、境界 $\Gamma_m^{(l)}$ 上の動水勾配は、

$$d = \widehat{L}h = LN_m \bar{h}_m = B_m \bar{h}_m \quad (23)$$

となり、流速 - 動水勾配の関係を式(21)に代入すると

以下の関係が得られる．

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 W_m^{(l)} \left(-k_m^{(l)} \bar{h}_m + p_m^{(l)} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

ここで， $k_m^{(l)}, p_m^{(l)}$ は以下のとおりである．

$$k_m^{(l)} = \int_{\Gamma_m^{(l)}} n k B_m d\Gamma \quad (25)$$

$$p_m^{(l)} = \int_{\Omega_m^{(l)}} f d\Omega \quad (26)$$

四角形網(要素) m の l 番目の制御点(節点)の重み $W_m^{(l)}$ は，四角形網を構成する全ての制御点における節点水頭を並べた一次元配列 \bar{h}_m と同様に，重みを並べた一次元配列 W_m から対応するものを選び出せばよいことに着目すると次のように表すことができる．

$$W_m^{(l)} = \mathcal{H}_m^{(l)} W_m \quad (27)$$

ここで， $\mathcal{H}_m^{(l)}$ は制御点 r の重みと三角形網を構成する制御点の重みを関係付ける行列である．式(27)を式(24)に代入することにより次式が得られる．

$$\sum_{m=1}^M [W_m^t (-k_m \bar{h}_m + p_m)] = 0 \quad (28)$$

$$k_m = \sum_{l=1}^4 \left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t k_m^{(l)} \quad (29)$$

$$p_m = \sum_{l=1}^4 \left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t p_m^{(l)} \quad (30)$$

ここで，三角形網 m に関係する制御点の水頭 \bar{h}_m ，重み W_m は全ての制御点における水頭を並べた一次元配列 H と重みを並べた一次元配列 \widetilde{W} により以下のように表わすことができる．

$$W_m = \mathcal{A}_m \widetilde{W} \quad (31)$$

$$\bar{h}_m = \mathcal{A}_m H \quad (32)$$

この関係を式(28)に代入し，重み \widetilde{W} が任意であることより，支配方程式が以下のように得られる．

$$\widehat{K} H = \widehat{P} \quad (33)$$

$$\widehat{K} = \sum_{m=1}^M \mathcal{A}_m^t k_m \mathcal{A}_m \quad (34)$$

$$\widehat{P} = \sum_{m=1}^M \mathcal{A}_m p_m \quad (35)$$

以上の展開により，有限要素の概念を導入した有限体積法は離散化された連立一次方程式(33)に帰着し，左辺係数行列 \widehat{K} は，各要素毎のその寄与 k_m を重ね合わせるによって構築される．同様に，右辺既知ベ

クトル \widehat{P} についても，各要素毎の寄与 p_m を重ね合わせるによって構築することができる．この手順は有限要素法における重ね合わせの手順と全く同じである．

また，図6に四角形要素を用いたときの，FEMとの積分スキームの相違を図示する．

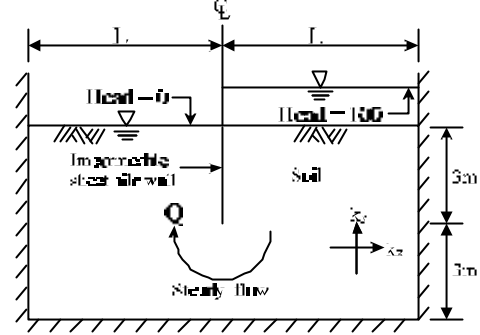


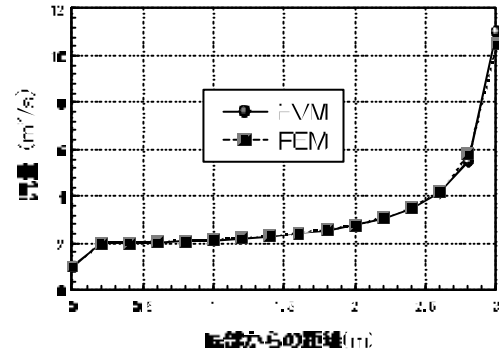
図6 四角形要素の積分スキーム

5. 数値計算例

ここでは，簡単な数値計算を行ない，本手法による解の精度について検討するため，図7に示す不透水矢板壁下の定常浸透問題の解析を行う[11]．

図7 解析モデル

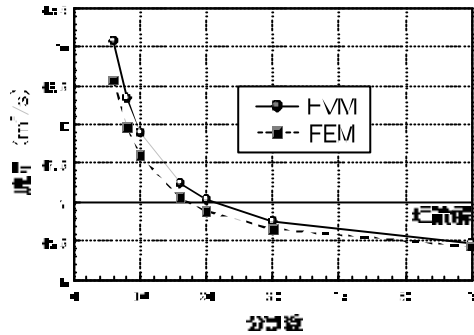
ここで，地盤は均質であり，透水係数は 1m/s である．また，壁を横切る全損失水頭は 100m である．解析領域は，左右対称性を考慮して中央から左半分とする．また，領域幅を $L=6\text{m}$ とし，四角形要素(要素数：72～7200)でモデル化した．境界条件として，損失水頭を矢板壁



下で 50m ，上端表面に沿って 0m とした．その他全てを不透水性な面として解析を行った．解析にあたりPCG法を用いた．これにより，Element-by-Elementに計算を進められ，メモリーや計算効率の向上につながる．

はじめに， $L=30\text{m}$ ，4500要素で行った解析結果を図8に示す．解析領域における局所的な誤差を検討するために，矢板下における底部からの距離と流量の関係をFEMと比較して示す．両者は，底部からの距離 $2.5\sim 3\text{m}$ の辺りで微小な差が見られるが，ほぼ同様な結果が得られた．

図8 底部からの距離と流量の関係



次に、分割数が流量に与える影響を検討した結果を図9に示す。モデルはL=6m、36~3600要素とし、解析領域全体の流量についてFEMおよび理論解と比較して示す。分割数が増えるほど解析値の変化率が小さくなっており、FVM、FEMともに理論解より若干小さな値で収束に向かっている。また、この結果は、解析領域全体に対する流量を比較しているため、図8に示した検討結果よりも多少の誤差が見られたが、その誤差も理論解と比較して1%程度であるため、良好な結果が得られていると思われる。

図9 流量と分割数の関係

6. まとめ

本研究では、FVMによる浸透問題の解析法に関する統一的展開として、双一次水頭場を仮定し、FVMにFEMの概念を導入して定式化を行った。この展開によれば、FVMを有限要素解析アルゴリズムの範疇で取り扱うことができるため、既存のFEMプログラムがそのままFVMのために用いることができるもの考えられる。

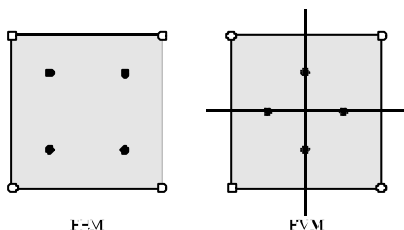
また、簡単な数値計算を行なって本手法による精度を検証したところ、双一次水頭場のときのFVMとFEMの間に若干の誤差が見られたが、これは両者の積分点の位置が異なるためであり、理論解と比較しても良好な結果が得られたものと考えられる。

FVMの利点は、辺を基にしたデータ構造を扱うことにより、隣接した要素によって与えられる情報を、コントロールボリュームの境界辺に沿った境界積分を

用いて要素行列やベクトルを計算することにあるため、本手法は、汚染拡散などのような水以外との連成問題などの問題に対する効果的な解析法の開発につながるものと思われる。今後の課題として、実際問題に近いモデルへの適用を行い、本手法による精度を詳細に検討する必要がある。

参考文献

- 1)Chow and M.Cross : An enthalpy control-volume-unstructured-mesh(CV-UM) algorithm for solidification by conduction only, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.35, pp1849-1870, 1992
- 2)F.Benkhaloudoum and R.Vilsmeier ed. : Finite Volumes for Complex Applications, HERMS, 1996
- 3)R.Helmig : Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, Springer, 1997
- 4). 武田洋, 竹内則雄, 佐藤一雄 : 有限体積法の固体力学への応用, 日本計算工学会計算工学講演論文集, Vol.2, No.2, pp403-406, 1997
- 5)竹内則雄, 武田洋, 佐藤一雄 : 有限体積法とFEM/RBSMの関係, 土木学会構造工学論文集, Vol44A, pp349-358, 1998
- 6)竹内則雄, 武田洋, 佐藤一雄 : 有限体積法を基にした引張破壊に対する非線形解析法, 土木学会構造工学論文集, Vol45A, pp255-262, 1999
- 7)S.R.Idelsohn and E.Onate : Finite volumes and finite element:Two 'good friends', Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.37, pp3323-3341, 1994
- 8)竹内則雄・石垣智明・武田洋・草深守人・佐藤一雄 : 浸透問題におけるFVMとFEMの関係, 計算工学講演会論文集, Vol.4, No.1, pp153-156, 1999
- 9)竹内則雄・石垣智明・武田洋・草深守人 : 線形ポテンシャル場を仮定したFVMによる浸透問題の解析, 日本シミュレーション学会第18回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス発表論文集, pp63-66, 1999
- 10)石垣智明・竹内則雄・武田洋・草深守人 : 双一次のポテンシャル場を用いたFVMによる浸透流解析, 土木学会第54回年次学術講演会講演概要集, -B390, pp780-781, 1999
- 11)I.M.Smith and D.V.Griffiths : Programming the Finite Element Method (3rd ed.), John Wiley & Sons, 1998



キーワード.

有限体積法 , 浸透流 , 線形ポテンシャル場 , 有限要素法

Summary.

Numerical Method for Seepage Flow Problems by the Finite Volume Method using Linear Potential Field

Chiaki Ishigaki

Civil Engineering Major, Division of Engineering, Graduate School, Hosei University

Norio Takeuchi Morito Kusabuka

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

Hiroshi Takeda

Department of System and Control Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

A numerical method of seepage flow problems by finite volume method using the linear potential field is proposed. Finite volume method (FVM) is widely used as a finite difference approximation using the non-orthogonality grids in fields such as fluid dynamics and transport phenomenon. Especially, it is used as the technique which solves the coupled problem like the pollution diffusion by the groundwater which is a problem of the ground environment. In these methods, there are many cases in which the water head field is handled as being constant. However, FVM can be considered to be a particular case of finite elements with a non-Galarkin weighting. Therefore, the analysis accuracy is improved by raising the degree of the water head field. In this paper, water head field which is identical with the quadrilateral element of FEM is assumed, and the formulation which introduced the concept of FEM is developed. In addition, the result of the comparison examination with the FEM solution according to the simple model for examining characteristics of the solution by this method is shown.

Keywords.

Finite Volume Method, Seepage flow, Linear potential field, Finite element method