

# 引張破壊現象に対する有限体積法による非線形解析法

竹内 則雄  
法政大学工学部土木工学科

武田 洋  
法政大学工学部システム制御工学科

有限体積法を基にして、非構造メッシュを用いた引張破壊解析手法を提案する。有限体積法は、要素境界面に沿った境界積分を行うため、体積積分に基づく有限要素法より進行型破壊の扱いが簡単である。非線形解析法としては、荷重増分法に基づく $r_{min}$ 法を応用したTension-crack解析法を用いる。また、数値解析では、Voronoi多角形を用いて解析領域を分割する。はじめに、簡単な数値計算例によって、本手法による弾性解が有限要素法による解と同じ精度を有していること示す。続いて、引張破壊における破壊荷重が剛体ばねモデルや有限要素法などの既往の手法と同程度の値になることを示す。

## 1. はじめに

有限体積法(FVM)は、非直交格子を用いた有限差分近似として流体力学や移動現象論などの分野において広く用いられている[1]-[3]。また、近年になって、固体力学の分野においてもFVMを見直す動きがみられるようになってきた[4]-[6]。FVMは非Galarkin重みを有する有限要素法(FEM)の特殊なケースと考えることができ、両者を要素分割や補間法の立場から検討した研究も行われている[7]。著者らもFVMとFEM、剛体ばねモデル(RBSM)の関係を明らかにすることを目的に、FVMの統一的展開を行った[8][9]。これらの論文では主に2次元あるいは3次元の弾性体について述べている。

一方、有限体積法の利点は、辺を基にしたデータ構造を扱うことにより、隣接した要素によって与えられる情報を、制御体積の境界面に沿った境界積分を用いて要素行列やベクトルを計算することにある。これは、クラックの進展などの不連続な現象を扱う場合、節点で変位の連続性が要求される有限要素法より、容易に不連続現象の導入が可能であり、この種の問題に対する効果的な解析法の開発につながるものと思われる。

そこで、本論文では、有限体積法を基にした進行型破壊現象の解析法を開発することを目的として、荷重増分法によるRBSMのためのTension-Crack解析法[10]をFVMに応用した非線形解析法を提案する。はじめに、FVMによる増分形式の定式化を示し、簡単な例により弾性解の精度を議論する。次に、FVMによるTension-Crack解析法の考え方を述べ、FEMやRBSMなどの既往の手法と比較することによって、得られる解の特徴を示す。

## 2. 基礎方程式と重み付き残差式

弾性問題の基礎方程式は次で与えられる。

$$\text{(釣合い方程式)} \quad L^t \sigma + f = 0 \quad \text{in} \Omega \quad (1)$$

$$\text{(応力 - ひずみ関係)} \quad \sigma = D \epsilon \quad \text{in} \Omega \quad (2)$$

$$\text{(ひずみ - 変位関係)} \quad \epsilon = Lu \quad \text{in} \Omega \quad (3)$$

ここで、 $u, e, s$  は、それぞれ、変位、ひずみ、応力ベクトルであり、 $D$ は構成行列、 $f$ は物体力を表している。また、 $L$ は微分作用素、 $\Omega$ は境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 $\Gamma_u$ は変位が与えられる境界、 $\Gamma_t$ は表面力が与えられる境界である。

いま、増分後の応力と物体力を、それぞれ、 $\sigma + \Delta\sigma$ 、 $f + \Delta f$ とすると、式(1)~(3)は次のように与えられる。

$$L^t(\sigma + \Delta\sigma) + (f + \Delta f) = 0 \quad \text{in} \Omega \quad (4)$$

$$\Delta\sigma = D \cdot \Delta\epsilon \quad \text{in} \Omega \quad (5)$$

$$\Delta\epsilon = L \cdot \Delta u \quad \text{in} \Omega \quad (6)$$

ここで、 $\Delta$ は増分量であることを表している。

増分形式の式(4)に幾何学的境界条件を満たす任意の重み $W$ を乗じて領域 $\Omega$ について積分すると以下の重み付き残差式が得られる。

$$\int_{\Omega} W^t \{L^t(\sigma + \Delta\sigma) + (f + \Delta f)\} d\Omega = 0 \quad (7)$$

ここで、重み $W^t = [W_x, W_y]$ (2次元平面問題の場合)を増分仮想変位と考えれば、式(7)は増分型に対する仮想仕事の原理の一般形と考えることができる。

いま、領域 $\Omega$ は閉境界 $\Gamma^{(r)}$ で囲まれた $R$ 個の部分領域 $\Omega^{(r)}$ から構成されているものとする。すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (8)$$

このとき、式(7)は離散領域に対して以下のように表すことができる。

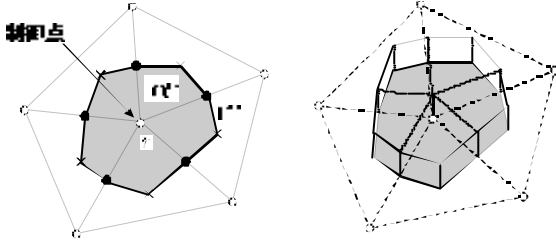
$$\sum_{r=1}^R \left\{ \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t L^t (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) d\Omega \right\} = 0 \quad (9)$$

ここで，式(9)の左辺第1項にガウスの発散定理を適用すると，離散領域に対する弱形式が以下のように得られる．

$$\sum_{r=1}^R \left\{ - \int_{\Omega^{(r)}} [L\mathbf{W}]^t (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Omega + \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{W}^t \mathbf{n} (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) d\Omega \right\} = 0 \quad (10)$$

### 3. 有限体積法の定式化

図1(a)に示す網掛け部分は有限体積法のセル中心スキームにおける制御点 $r$ に関する制御体積を示したものである．図中， $\Omega^{(r)}$ が制御体積で， $\Gamma^{(r)}$ がその閉境界を表している．また， $\circ$ 印が制御点を， $\times$ 印が着目制御点と隣接する制御点とを結んだ線分上の点を，



$\times$ 印が着目制御点と隣接制御点で囲まれた領域内の点を表している．

FEMの定ひずみ要素と同一の要素にするためには， $\circ$ 印を線分上の中点に，また， $\times$ 印を着目制御点領域の図心点にとる必要がある[9]．本論文では，このような制約を設けず，一般的なセル中心スキームで議論を展開する．

(a) 制御点と制御体積 (b) 一定な重み関数  
図1 有限体積法の制御点，制御体積と重み関数

有限体積法では全領域 $\Omega$ に対する離散体積として，制御点 $r$ に関する制御体積 $\Omega^{(r)}$ を考え， $\Omega^{(r)}$ 上の重み関数として制御点 $r$ の値で代表される一定な関数を考える．図1(b)は有限体積法で用いられる重み関数を示したもので，図のように，重み関数は制御体積内で一定で，その他では0とする．

このような一定の重み関数考えると，式(10)の第1項は重み関数の1階微分が含まれるため零となり，弱形式は次のようになる．

$$\sum_{r=1}^R \left\{ \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{W}^t \mathbf{n} (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) d\Omega \right\} = 0 \quad (11)$$

いま，制御点 $r$ で代表される一定な重み関数 $\mathbf{W}^{(r)}$ を以下のように定義する．

$$\mathbf{W}^{(r)} = I \text{ in } \Omega^{(r)} \text{ elsewhere } \mathbf{W}^{(r)} = 0 \quad (12)$$

ここで， $I$ は単位行列である．

このとき，一定な重み関数が制御点 $r$ の値で代表されることを考慮すると，式(11)は次のように整理される．

$$\sum_{r=1}^R \left[ \left( \mathbf{W}^{(r)} \right)^t \left\{ \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{n} (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}) d\Omega \right\} \right] = 0 \quad (13)$$

一方，境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の増分変位 $\Delta \mathbf{u}$ は近似的に制御点 $r$ および近傍の制御点における増分変位 $\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ を用いて次のように補間できるものとする．

$$\Delta \mathbf{u} \approx \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{N}^{(r)} \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (14)$$

ここで， $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(r)}$ は近似された増分変位に対する変位関数， $\mathbf{N}^{(r)}$ は基底関数である．このとき，増分ひずみは，式(6)より次のように表される．

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(r)} \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{B}^{(r)} \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (15)$$

ただし， $\mathbf{B}^{(r)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(r)}$ である．

したがって，式(13)は，式(5)で示す増分量に対する応力ひずみ関係を考慮し，式(15)を用いて以下のように整理される．

$$\sum_{r=1}^R \left[ \left( \mathbf{W}^{(r)} \right)^t \left( \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}^{(r)} d\Gamma \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \int_{\Omega^{(r)}} \Delta \mathbf{f} d\Omega \right) + \left( \mathbf{W}^{(r)} \right)^t \left( \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}^{(r)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{f} d\Omega \right) \right] = 0 \quad (16)$$

いま，全制御点における重みを並べた一次元配列を $\widetilde{\mathbf{W}}$ とすると，制御点 $r$ における重み関数 $\mathbf{W}^{(r)}$ は以下のように関係付けられる．

$$\mathbf{W}^{(r)} = \mathcal{T}^{(r)} \widetilde{\mathbf{W}} \quad (17)$$

ここで， $\mathcal{T}^{(r)}$ は全制御点における重みの配列と制御点 $r$ の重みを関係付ける行列である．

同様に，制御点 $r$ に関係する増分節点変位 $\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ と全制御点における増分変位を並べた一次元配列 $\Delta \mathbf{U}$ との間についても次の関係が成立する．

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathcal{A}^{(r)} \Delta \mathbf{U} \quad (18)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(r)}$ は全制御点における節点変位と着目制御点に關係する変位を關係付ける行列である。

式(16)に式(17),(18)の關係を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^t \left[ \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \left( \oint_{\Gamma^{(r)}} nDB^{(r)} d\Gamma \mathcal{A}^{(r)} \Delta U + \int_{\Omega^{(r)}} \Delta f d\Omega \right) \right] \\ + \widetilde{W}^t \left[ \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \left( \oint_{\Gamma^{(r)}} n\sigma^{(r)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、制御点における重み $\widetilde{W}$ は任意であるため、最終的に次の支配方程式が得られる。

$$K \cdot \Delta U = \Delta P + R \quad (20)$$

ただし、 $K$ は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t k^{(r)} \mathcal{A}^{(r)} \\ k^{(r)} &= - \oint_{\Gamma^{(r)}} nDB^{(r)} d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

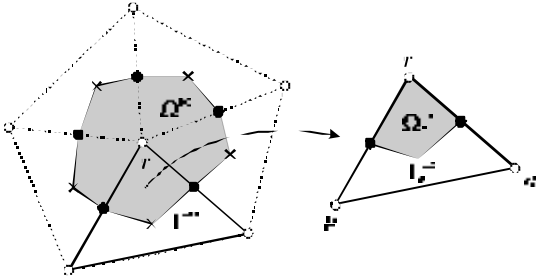
また、 $\Delta P$ についても同様に次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \Delta P &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \Delta p^{(r)} \\ \Delta p^{(r)} &= \int_{\Omega^{(r)}} \Delta f d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

一方、 $R$ は以下に示す増分前によるもので、平衡状態であれば、0に等しくなる。

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t q^{(r)} \\ q^{(r)} &= \oint_{\Gamma^{(r)}} n\sigma^{(r)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

以上のように、有限体積法における増分形式の支配方程式は離散化された連立1次方程式(20)に帰着する。ここで式(21)に示すように、係数行列 $K$ は、制御



領域の閉境界 $\Gamma^{(r)}$ について積分することにより求められる。本論文では、この点に着目して、領域境界に引張破壊に関する材料非線形性を導入する。

#### 4. 線形変位場を仮定した有限体積法

式(14)で与えられる閉境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の増分変位関数 $\Delta \hat{u}^{(r)}$ を定義するにあたり、図2の太線で示す3つの制御点 $r, p, q$ で構成される三角形網 $e$ の領域 $\Omega_e^{(r)}$ を考える。閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に三角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるものとする。

図2 線形変位場を仮定する三角網

ここで、上付きの $r$ は制御点 $r$ に關係することを、また、下付の $e$ は三角形網 $e$ に關係することを表している。

有限体積法では、各制御点毎に式(21)で示される寄与 $k^{(r)}$ を組み合わせることによって左辺係数行列を構築する。いま、図2に示したように、制御体積 $\Omega^{(r)}$ は部分領域 $\Omega_e^{(r)}$ から構成され、閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に三角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるため、 $n_e^{(r)}$ を制御点 $r$ に關係する三角形網の数とすると、以下の關係が成立する。

$$\Omega^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Omega_e^{(r)}, \quad \Gamma^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Gamma_e^{(r)} \quad (24)$$

ここで、3つの制御点で囲まれた三角形内における境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の増分変位 $\Delta \hat{u}_e^{(r)}$ を、それぞれの制御点における増分変位 $\Delta \bar{u}_e^{(r)}$ により以下のように表す[9]。

$$\Delta \hat{u}_e^{(r)} = N_e^{(r)} \Delta \bar{u}_e^{(r)} \quad (25)$$

式(25)の $N_e^{(r)}$ は有限要素法における定ひずみ要素の形状関数と同じであり、三角形領域の頂点座標を用いた線形の基底関数である。この關係を用いると、境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の増分ひずみは次のようになる。

$$\Delta \varepsilon = L \Delta \hat{u}_e^{(r)} = L N_e^{(r)} \Delta \bar{u}_e^{(r)} = B_e^{(r)} \Delta \bar{u}_e^{(r)} \quad (26)$$

ただし、 $B_e^{(r)} = L N_e^{(r)}$ である。

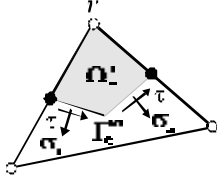
このとき、三角形網を基準として線形変位場を仮定した場合の式(16)に対応する有限体積法の解式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^R \left[ (\mathbf{W}^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \left( \int_{\Gamma_e^{(r)}} nDB_e^{(r)} d\Gamma \Delta \bar{u}_e^{(r)} + \int_{\Omega_e^{(r)}} \Delta f d\Omega \right) \right. \\ \left. + (\mathbf{W}^{(r)})^t \left( \oint_{\Gamma^{(r)}} n\sigma^{(r)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

一方、 $\Delta \bar{u}_e^{(r)}$ は、制御点 $r$ に關係する三角形網すべての増分変位を並べた1次元配列を $\Delta \bar{u}^{(r)}$ とすると、次の關係にある。

$$\Delta \bar{u}_e^{(r)} = \mathcal{Q}_e^{(r)} \Delta \bar{u}^{(r)} \quad (28)$$

式(28)ならびに、式(17)(18)を式(27)に適用すると以下の關係が得られる。



$$\begin{aligned}
& \widetilde{W}^t \left[ \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \left( \int_{\Gamma_e^{(r)}} n DB_e^{(r)} d\Gamma \mathcal{Q}_e^{(r)} \right) \mathcal{A}^{(r)} \right] \Delta U \\
& + \widetilde{W}^t \left[ \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Omega_e^{(r)}} \Delta f d\Omega \right] \\
& + \widetilde{W}^t \left[ \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \left( \int_{\Gamma^{(r)}} n \sigma^{(r)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

図3 境界 \$\Gamma\_e^{(r)}\$ 上の表面力 \$(\sigma\_n, \tau)\$

式(29)の左辺第1項は、図3に示すように、三角形網内の制御体積に対する境界 \$\Gamma\_e^{(r)}\$ 上における表面力 \$(\sigma\_n, \tau)\$ の制御点 \$r\$ に対する寄与を表している。

いま、重み \$\widetilde{W}\$ は任意であるため、線形変位場を仮定した有限体積法の支配方程式が次のように得られる。

$$\overline{K} \cdot \Delta U = \Delta \overline{P} + R \tag{30}$$

ここで、\$\overline{K}\$ は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
\overline{K} &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \overline{k}^{(r)} \mathcal{A}^{(r)} \\
\overline{k}^{(r)} &= - \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Gamma_e^{(r)}} n DB_e^{(r)} d\Gamma \mathcal{Q}_e^{(r)}
\end{aligned} \right\} \tag{31}$$

同様に、右辺既知ベクトル \$\Delta \overline{P}\$ は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \overline{P} &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \Delta \overline{p}^{(r)} \\
\Delta \overline{p}^{(r)} &= \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Omega_e^{(r)}} \Delta f d\Omega
\end{aligned} \right\} \tag{32}$$

また、\$R\$ は式(23)で示したとおりである。

式(31)で求められる係数行列 \$\overline{K}\$ は3節のはじめに述べた制御点等の位置に関する条件を満たすとき、FEMの剛性行列と一致するが、一般には非対称マトリックスとなることに注意しなければならない。

## 5. 引張破壊のための非線形解析法

Tension-Crack解析法は、表面力が許容引張力を越えたとき、力の伝達が行われないようにして引張破壊を導入しており、表面力を取り扱うRBSM[11]の解析のために開発された手法である[10]。一方、4節で示したように、有限体積法では、制御体積の境界における

表面力 \$(\sigma\_n, \tau)\$ の制御点に対する寄与を境界積分により計算する。本論文では、この表面力が許容引張力を越えたら制御点に対する寄与を0とする、Tension-Crack解析法と同様な引張破壊をFVMに導入した。

一般に、脆性材料に引っ張りによるひび割れが発生すると構造形態が変化し、その応力解放によって崩壊荷重時近傍では解の収束性が低下する[12]。ここでは、この問題を避けるため、材料非線形問題の数値解析法である \$r\_{min}\$ 法[13]による荷重増分法を拡張し、解放力を残りの荷重に加えて解析を進めるアルゴリズムを用いた。

一般的な \$r\_{min}\$ 法における荷重増分率は降伏関数を基にして求められるが、ここでは、これを拡張して引張破壊に対する荷重増分率を以下のように求める。

$$(\sigma_n + r \cdot \Delta \sigma_n) = F_t \tag{33}$$

ここで、\$\sigma\_n\$ はFVMの制御体積における境界上の法線方向の表面力であり、\$\Delta \sigma\_n\$ はその増分量、\$r\$ は荷重増分率、\$F\_t\$ は引張強度である。

いま、荷重 \$P\$ を幾つかの増分荷重 \$\Delta P\$ に分割する。このとき、ある荷重増分段階における現在の荷重を \$\Delta P^{(i)}\$ とし、荷重増分率を \$r\_i\$ とすれば、残りの荷重 \$\Delta P^{(i+1)}\$ は次式によって与えられる。

$$\Delta P^{(i+1)} = (1 - r_i) \Delta P^{(i)} \tag{34}$$

したがって、第 \$n\$ ステップ目における残りの増分荷重は、初めに与えた増分荷重を \$\Delta P\$ として以下のようになる。

$$\Delta P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) \Delta P \quad (r_0 = 0) \tag{35}$$

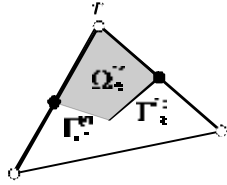
いま、\$(k-1)\$ 回目で、ある境界に引張破壊が発生した場合、その境界における力の伝達を遮断する。すなわち、制御点への寄与を認めないようにし、その境界において所有していた表面力を解放力 \$\Delta F^{(k-1)}\$ として、関連制御点に分配する。分配された解放力は、式(36)のように、残りの荷重に加え、次のステップにおける増分計算を行う。

$$\Delta P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) \Delta P + \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=k}^{n-1} (1 - r_i) \Delta F^{(k-1)} \right\} \tag{36}$$

このようにして、初めに与えた荷重と解放力を全て使い切るまで繰り返し計算を行う。このとき、荷重増分率の合計 \$r\_{total}\$ を

$$r_{total} = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} (1 - r_i) r_k \right\} \tag{37}$$

とし、\$r\_{total} = 1\$ で収束したものと考えることができる。



式(36)に示される解放力を求めるにあたり、制御体積の境界における全体座標系に関する単位面積当たりの表面力  $f_{ei}^{(r)}$  を次式で計算する。

$$f_{ei}^{(r)} = T \cdot n\sigma_{ei}^{(r)} \quad (38)$$

ここで、 $n\sigma_{ei}^{(r)}$  は、図4に示すように、 $e$ 番目の三角形網内の着目制御体積の境界における  $i$ 番目の境界辺  $\Gamma_{ei}^{(r)}$  上の表面力を表しており、 $T$  は境界辺に沿った局所座標系の表面力を全体座標系に変換するマトリックスである。

この単位面積当たりの表面力を境界辺に沿って積分して全解放力を次のように計算する。

$$F = - \int_{\Gamma_{ei}^{(r)}} f_{ei}^{(r)} d\Gamma \quad (39)$$

図4 着目制御体積の境界における  $i$ 番目の境界辺  $\Gamma_{ei}^{(r)}$

以上示したように、本アルゴリズムでは、初めに、制御体積の境界における最も大きな引っ張りの表面力を検出し、その境界が引張破壊するための荷重増分率を式(33)より求める。続いて、その荷重増分率を用いてすべての境界辺の表面力が引張強度を上回らないように荷重レベルを下げる。その後、その境界辺が所有していた表面力を解放し、以後その境界辺から制御体積への寄与が無いものとして計算を進める方法である。解放力を与えること以外は従来の荷重増分法における  $r_{min}$ 法と同様なアルゴリズムとなっている。

## 6. 無筋コンクリート梁の引張破壊解析例

本論文では、三角網による数学メッシュを用いて変位場を表しており、平衡条件は、三角網の頂点を制御点とする多角形毎に満たされる。この多角形形状は任意の形状が可能である。しかし、本手法は制御体積の境界に引張破壊を導入するため、凹多角形が存在すると破壊がなめらかに進展しないことが予想される。

一方、Voronoi多角形は、平面上に  $n$ 個の点  $P_i(x_i, y_i)$ , ( $i=1, n$ ) が与えられたとき、点  $P_i$  の勢力圏  $V_n(P_i)$

$$V_n(P_i) = \bigcap_{i \neq j} \{P | d(P, P_i) < d(P, P_j)\} \quad (40)$$

で定義される多角形であり、凸領域となる[17]。ここで、 $d(P, P_i)$  は、点  $P$  と点  $P_i$  のEuclid距離である。Voronoi図において、点  $P_i$  と点  $P_j$  のそれぞれに対応す

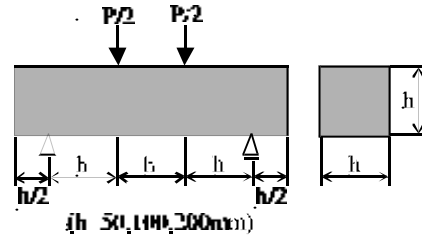
るVoronoi多角形が共通辺を持つとき、点  $P_i$  と点  $P_j$  とを線分で結ぶことによって凸包三角形分割が得られる。これがDelaunay三角網である。

図5 Voronoi多角形とDelaunay三角形

図5はVoronoi多角形と、Delaunay三角形の関係を示した図である。図に示すように、Voronoi点は3つの母点を頂点とするDelaunay三角網の外心である。いま、母点の生成にあたり、乱数を使用すれば、人為性を排除したVoronoi辺を作ることができる。したがって、この辺に沿って破壊が発生するものと考えれば、破壊の発生位置、ならびに進展方向を人為的に規定することなく解析が行えるものと考えられる[12][18]。

このような理由から、本論文ではVoronoi多角形を基本として要素分割を行い、1つのVoronoi多角形をFVMの制御体積と考えた。なお、分割アルゴリズムとして様々な方法があるが[19][20]、ここでは文献[14]を参考にした。

Tension-Crack解析の例として、図6に示す無筋コンクリート梁を取り上げた。コンクリートの破壊に関する



解析を行う場合、引張破壊のみならず、せん断破壊や圧壊も考慮する必要があるが、RBSMを用いた同じ問題に対する解析の結果、この問題は引っ張り破壊が卓越しており、引張破壊だけを取り入れた解析によってもある程度解析できるものと判断した[12]。解析は、図に示すように、 $h=5\text{cm}$ とするNo.1試験体、 $h=10\text{cm}$ とするNo.2試験体、 $h=20\text{cm}$ とするNO.3試験体の3種類とした。境界条件および荷重条件は図に示すとおりである。

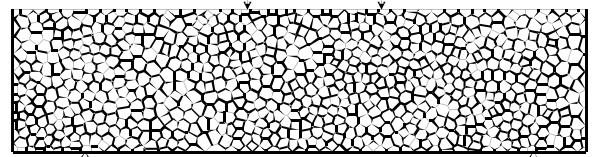


図6 無筋コンクリート梁に対する解析モデル

表1 解析に用いた材料定数

弾性係数(E)	27.5Gpa
ポアソン比( $\nu$ )	0.2
引張強度( $F_t$ )	2.9MPa

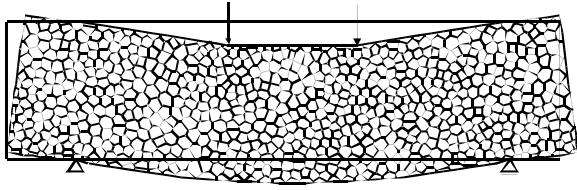
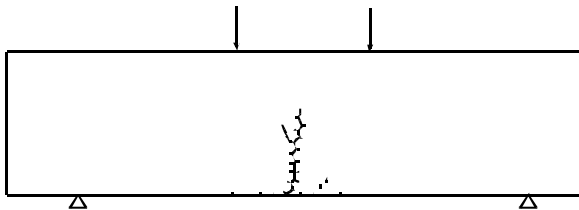


図7 No.3試験体の要素分割 (800要素)

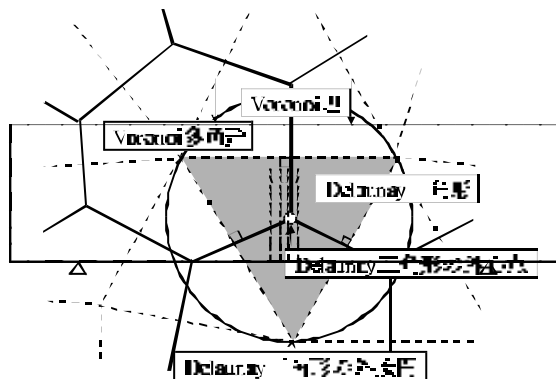
表1には解析に用いた材料定数が示されている。要素分割は、Voronoi多角形を基本に行った。図7はNo.3試験体に対する要素分割を示している。要素数は、それぞれの寸法に対して、制御体積の平均面積が等しくなるように、No.1試験体で69要素、No.2試験体で209要素、No.3試験体で800要素とした。これは、ひび割れ間隔を同一にとることによって寸法効果を見るためである[12]。ただし、本解析では、テンションソフトニングを考慮していないので厳密な意味での寸法効果の議論はできない。

図8 No.3試験体の弾性変形 (P=30kN)

図8は、No.3試験体における弾性解析 (P=30kN) による変形状況を示したものである。RBSMと異なり、連続的な弾性変形を示している。この荷重を作用させたときの、本手法によるFVMと FEM, RBSMによる中央部



下端のたわみは表2に示す通りであり、ほぼ同等の値が得られている。ただし、FEMについては解析精度を



考え、DIANAの4節点四角形要素を用いた[16]。

表2 弾性時(P=30kN)における中央部下端の変位

FVM	0.042 mm
FEM	0.042 mm
RBSM	0.045 mm

図9には、FVMによるNo.3試験体の破壊直前の引張りひび割れ状況が示されている。中央部のひび割れが進展して崩壊に至っている。このときの崩壊荷重は42.4 kNであった。

図9 No.3試験体の崩壊直前の破壊線

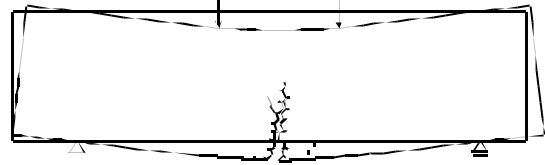


図10 RBSMによる崩壊直前の破壊線 (No.3試験体)

図11 FEM による崩壊直前の破壊線 (No.3試験体)

図10にRBSMによる解析結果、図11にFEMによる解析結果を示す。ここで提案したFVMによる解析では、引張破壊した辺からの力の伝達を遮断しており、RBSMによるばねの切断という操作と同等である。また、FEMによる解析は、一般的な分布ひび割れモデルを用いている。FVM, RBSM, FEMとも中央にひび割れが集中しており、同様な破壊傾向を示している。ただし、FEMの解析は左右対称とし、半分で行っている。

図12は、本モデルによるひび割れ後の変形状況を示したものである。中央のひび割れが卓越している様子が伺える。ただし、ひび割れは、Voronoi多角形の頂点を挟む境界辺の両方が引張破壊した場合、その頂点は剛体的挙動をするものとして表した

図12 FVMによる破壊直前の変形モード (No.3試験体)

表3は、No.3試験体について、これら3つの手法による最大耐力を比較したものである。FEMによる耐力は若干低いものの、同等の耐力が得られている。

表3 各解析法による最大耐力

解析法	最大耐力 (kN)	$P/(h^2 F_t)$
FVM	42.4	0.365
FEM	39.2	0.338
RBSM	43.3	0.373

一般に、寸法効果を議論する場合、ひび割れ幅に応じて破壊エネルギーを調整し、コンクリートのテンションソフトニング効果に置き換えたモデルが利用されており、応力解放は、本解析のように瞬時に100%解放するのではなく、ひずみに応じて解放している[12]。RBSMの解析結果は、この考え方にしたがって、ひび割れ発生後、ひび割れ時のひずみの10倍のひずみで全解放力が0となるように、ひずみに応じて解放力を与えている。そのため、他の解析法に比較して、若干大きめ

の耐力となっている。

表4 FVMによる寸法の相違による最大耐力

試験体	最大耐力 (kN)	$P/(h^2 F_t)$
No.1	4.56	0.629
No.2	12.95	0.447
No.3	42.40	0.365

最後に3つ試験体における最大耐力を比較してみた。これらの値を表4に示す。内田らの算定式[15]によれば、寸法効果の影響により、寸法が大きくなるにつれて曲げ強度が低下する。表に示すように、本解析においても無次元化された耐力を眺めると、その傾向が顕著に現れている。

## 7. まとめ

FVMにより進行型破壊現象の解析を行うため、増分定式化を示し、制御体積の境界辺に沿った境界積分を利用して、FVMのためのTension-Crack解析法を提案した。

はじめに、任意多角形による弾性解析を行い、弾性解の精度を検討したところ、FEMの定ひずみ要素と同じ値が得られることが明らかとなった。

一方、引張破壊解析を行ったところ、本手法は、RBSMやFEMと類似の耐力を与えることが明らかとなった。また、破壊パターンはポロノイ分割を用いたRBSMと類似であった。本論文ではFVMを用いた非線形解析法の開発に主眼を置いており、テンションソフトニング効果を考慮に入れた寸法効果の影響を議論することはできなかったが、式(39)の解放力において、ひずみに応じた解放率を考慮することで、本手法を寸法効果に関する解析に応用できるものと考えられる。この点に関しては、今後の課題としたい。

以上のように、本手法によれば、RBSMで課題となっていた弾性解の精度を、有限要素法における定ひずみ要素と同程度の精度で求めることができ、また、有限要素法で行われている二重節点などの複雑なアルゴリズムを用いず、RBSMと同程度の簡便さで進行型破壊の解析が可能になるものと考えられる。

本アルゴリズムは、様々な破壊要因を考慮して解析することが可能であり、今後、すべりや圧壊などの他の破壊要因を考慮することで、FVMを用いた、一般的な不連続性体に対する解析が行えるものと考えられる。

## 参考文献

1)Chow and M.Cross : An enthalpy control-volume-unstructured-mesh(CV-UM) algorithm for solidification by conduction only, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.35, pp1849-1870, 1992  
2)F.Benkhaloudoum and R.Vilsmeier ed. : Finite Volumes for

Complex Applications, HERMS, 1996  
3)R.Helmig : Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, Springer, 1997  
4)D.Fryer, C.Bailey, M.Cross and C.H.Lai: A control volume procedure for solving the elastic stress-strain equations on an unstructured mesh, Appl. Math. Modelling, Vol.15, Nov./Dec., pp639-645, 1991  
5)Y.E.Onate, M.Cervera and O.C.Zienkiewicz : A finite volume formulation for structural mechanics, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.37, pp181-201, 1994  
6)C.Bailey and M.Cross : A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.38, pp1757-1776, 1995  
7)S.R.Idelsohn and E.Onate : Finite volumes and finite element:Two 'good friends', Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.37, pp3323-3341, 1994  
8)竹内則雄, 武田洋, 佐藤一雄 : 有限体積法とFEM/RBSMの関係, 土木学会構造工学論文集, Vol44A, pp349-358, 1998  
9)竹内則雄, 武田洋, 佐藤一雄 : 有限体積法を基にした引張破壊に対する非線形解析法, 土木学会構造工学論文集, Vol45A, pp255-262, 1999  
10)竹内則雄 : 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991  
11)T.Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977  
12)竹内則雄, 上田真稔, 鬼頭宏明, 樋口晴紀, 上林厚志 : ポロノイ分割を用いたRBSMによる無筋コンクリート梁の寸法効果解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.40A, pp519-527, 1994  
13)Y.Yamada, N.Yoshimura and T.Sakurai : Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol.10, pp323-354, 1968  
14)谷口健男 : FEMのための要素自動分割, 森北出版, 1992  
15)内田裕市, 六郷恵哲, 小柳洽 : コンクリートの寸法効果に関する破壊力学的検討, 土木学会論文集, No.442, pp101-107, 1992  
16)C.Frits and H.Feenstra : DIANA User's Manual, TNO, 1996  
17)伊理正夫監修 : 計算幾何学と地理情報処理, 共立出版, 1993  
18)竹内則雄, 江良隆一 : ポロノイ分割のための対話型編集システム, 日本計算工学会計算工学講演会論文集, Vol.2, No.2, pp563-566, 1997  
19)P.L.George and H.Borouchaki : Delaunay Triangulation and Meshing, HERMES, 1998  
20)杉原厚吉 : FORTRAN計算幾何プログラミング, 岩波書店, 1998

キーワード.

有限体積法、引張破壊、数値解析法、線形変位場

-----

Summary.

**Non-linear Analysis for Tensile Fracture based on the Finite Volume Concepts**

Norio Takeuchi

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

Hiroshi Takeda

Department of System and Control Engineering, Faculty of Engineering, Hosei University

A numerical method based on the Finite Volume (FV) concepts are described for solving tensile failure on unstructured meshes. To establish the computational method of the progressive tensile cracking, Finite Volume based surface integration formulation is proposed rather than Finite Element volume integration formulation. The approach termed the 'tension-crack analysis' is based on the load incremental method ( $r_{\min}$  method). A range of two-dimensional test problems are solved using Voronoi tessellation. The paper shows that the accuracy of the elastic solution for the FV method are completely equivalent with the FE method. Moreover, it is shown that collapse load on tensile failure is much like RBSM or FE method.

Keywords.

Finite Volume Method, Tensile fracture, Numerical algorithm, Linear displacement field