

# 静水圧依存型異方性降伏関数を用いた岩盤の掘削解析

兼重 剛  
法政大学大学院工学研究科

草深 守人  
計算科学研究センター

武田 洋  
法政大学工学部システム工学科

最近の水力発電所の新設工事では、ダムの基礎岩盤となる長大斜面の掘削や地下洞の掘削において、岩盤の強度異方性に配慮した設計・施工対策の検討が重要な課題となりつつある。

そこで本研究は、静水圧依存の硬化型異方性降伏関数によって、強度異方性を有する岩盤の掘削に伴う安定性について評価した。この降伏関数内に含まれる材料パラメータは、従来の一軸・三軸圧縮試験結果のみを用いることで、非線形最適化手法により決定できる。また、この手法を用いれば、材料パラメータの評価に際して、純せん断試験のような困難な材料試験を必要としない。

## 1. はじめに

静水圧依存の降伏関数として広く用いられている代表的なものの一つに等方性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数があり、異方性材料に対しては、Tsai や Pariseau の降伏関数などが提案されている。

著者らは、すでに等方性材料から岩盤材料のように複雑な強度異方性を示す材料に対してもその適用範囲を広げるために、静水圧依存型の異方性降伏関数を従来の基本的な降伏関数の自然な拡張として提案した。

本研究では、提案した異方性降伏関数を用いて地盤の掘削問題を解析するためのソフトウェアを開発し、かつ強度異方性を有する岩盤の掘削問題に対する適用性を具体的な数値計算に基づいて考察した。

## 2. 異方性降伏関数

異方性の影響が降伏関数を表す応力空間の基底に現れるものとした異方性降伏関数を下式で与えた。  
(圧縮を正とする)

$$f = [(b_1\sigma'_{11} - b_2\sigma'_{22})^2 + (b_2\sigma'_{22} - b_3\sigma'_{33})^2 + (b_3\sigma'_{33} - b_1\sigma'_{11})^2 + b_4^2\sigma'^2_{12} + b_5^2\sigma'^2_{23} + b_6^2\sigma'^2_{31}]^{1/2} - (\alpha_1 b_1\sigma'_{11} + \alpha_2 b_2\sigma'_{22} + \alpha_3 b_3\sigma'_{33}) = 1 \quad (1)$$

式(1)を、マトリックス表示すると次のように表せる。

$$f = \sqrt{\{\sigma'\}^T [B] \{\sigma'\}} - \{A\}^T \{\sigma'\} = 1 \quad (2)$$

ここで、式(2)の各係数は次の通りである。

$$\{A\} = [\alpha_1 b_1, \alpha_2 b_2, \alpha_3 b_3, 0, 0, 0]^T \quad (3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_1^2 & -b_1b_2 & -b_1b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2b_1 & 2b_2^2 & -b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3b_1 & -b_3b_2 & 2b_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 3. 降伏関数の座標変換

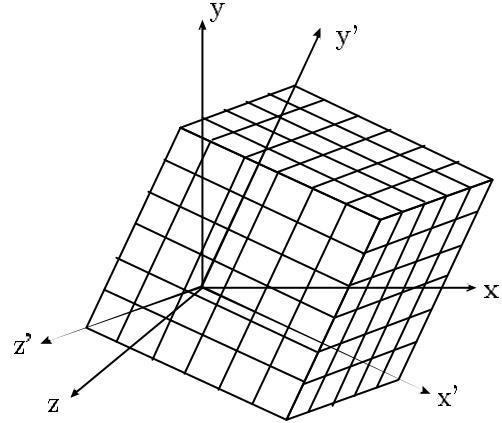


図1. 全体座標系と材料座標系

式(1)または式(2)の降伏関数は、材料座標系での表示であり、有限要素プログラムに組込むには全体座標系に変換する必要がある。応力の座標変換マトリックスを $[T_\sigma]$ とすると、全体座標系での応力 $\{\sigma\}$ は次のように表せる。

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma] \{\sigma\} \quad (5)$$

上式を式(2)に代入することにより、全体座標系の降伏関

数は次のようになる．

$$f = \sqrt{\{\sigma\}^T [T_\sigma]^T [B] [T_\sigma] \{\sigma\} - \{A\}^T [T_\sigma] \{\sigma\}} \quad (6)$$

$$= 1$$

ここで，材料座標系での材料マトリックスを  $\{A\}$ ,  $[B]$  とし，全体座標系での異方性マトリックスを  $\{\bar{A}\}$ ,  $[\bar{B}]$  とし，次のように置く．

$$[\bar{B}] = [T_\sigma]^T [B] [T_\sigma] \quad (7)$$

$$\{\bar{A}\}^T = \{A\}^T [T_\sigma] \quad (8)$$

したがって，全体座標系での降伏関数は次のように表される．

$$f = \sqrt{\{\sigma\}^T [\bar{B}] \{\sigma\} - \{\bar{A}\}^T \{\sigma\}} \quad (9)$$

$$= \sqrt{J_{2D} - \bar{J}_1} = 1$$

#### 4. 材料パラメータの決定手法

式(1)の降伏関数に含まれている材料パラメータの力学的意味は，材料主軸方向の異方性の割合を表現したものと見なせる．

このため，これらの材料パラメータは，その大きさではなく，比率のみが意味を持つ量である．したがって，式(1)に含まれる材料パラメータ  $b_i$ ,  $\alpha_i$  は，唯一定まる量として決めうるものではなく，比率のみが意味を持つ無数の組として存在する．この問題を解決する手段として，一組の材料パラメータを制約条件付の非線形最適化法を用いて推定する．

ここで，最適化すべき目的関数  $F$  は次式で与えた．

$$F = \sum_{i=1}^n (F_i)^2 \quad (10)$$

ただし， $F_i$  は式(6)を示し， $n$  は材料試験の総数である．式(10)の最小化問題に対する制約条件は，降伏関数の物理的意味，あるいは特別な応力状態としての単軸や(1)において，材料主軸に一致した主応力状態を考えると，材料の降伏は主応力差の大小によって表現されている．したがって， $b_1 \sim b_3$  は降伏関数の物理的意味から負の値を取ることとは考えられず，次式の制約条件を必要とする．

$$b_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, ) \quad (11)$$

またこのとき，材料主軸に一致する単軸応力状態に対して，式(1)から次式を得る．

$$(\sqrt{2} - \alpha_i) b_i = \frac{1}{\sigma_{iu}} > 0 \quad (i = 1, 2, 3, ) \quad (12)$$

上式と式(11)から，材料パラメータ  $\alpha_1 \sim \alpha_3$  の制約条件が次式で与えられる．

$$0 < \alpha_i < \sqrt{2} \quad (i = 1, 2, 3, ) \quad (13)$$

一方，材料パラメータ  $b_4 \sim b_6$  に対する制約条件は，式(1)に対する純せん断応力状態を考えることにより次式で与えられる．

$$b_i > 0 \quad (i = 4, 5, 6, ) \quad (14)$$

#### 5. 硬化型異方性降伏関数

完全塑性材料に対する式(9)の降伏関数を，硬化型異方性降伏関数として拡張する．ここで，式(9)は正規化されたものであり，正規化前の降伏関数は次のように表せる．(以降，ギリシャ文字によるサフィックスは成分のみを表し，総和規約は取らないこととする)

$$F = [(\beta_1 \sigma_{11} - \beta_2 \sigma_{22})^2 + (\beta_2 \sigma_{22} - \beta_3 \sigma_{33})^2 + (\beta_3 \sigma_{33} - \beta_1 \sigma_{11})^2 + \beta_4^2 \sigma_{12}^2 + \beta_5^2 \sigma_{23}^2 + \beta_6^2 \sigma_{31}^2]^{1/2} \quad (15)$$

$$- (\bar{\alpha}_1 \beta_1 \sigma_{11} + \bar{\alpha}_2 \beta_2 \sigma_{22} + \bar{\alpha}_3 \beta_3 \sigma_{33}) - \kappa_c$$

$$= \sqrt{J_{2D} - \bar{J}_1} - \kappa_c = 0$$

応力状態  $\sigma_{ij}$  を単軸応力状態  $\sigma_\xi$  と等価にさせた応力を，ここで  $\bar{\sigma}_\xi$  とすると，式(15)の相当応力は，次のようになる．

$$\bar{\sigma}_\xi = \frac{\sqrt{J_{2D} - \bar{J}_1}}{\beta_\xi (\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi)} ; (\xi = 1 \sim 3) \quad (16)$$

また，相当塑性ひずみ  $\bar{\varepsilon}_\xi^p$  は相当応力と相当塑性ひずみによる塑性仕事  $\bar{\sigma}_\xi d\bar{\varepsilon}_\xi^p$  が実際の塑性仕事  $dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$  と等価な量となるように選ぶことにより，次式で与えられる．

$$d\bar{\varepsilon}_\xi^p = \frac{\beta_\xi (\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi)}{\sqrt{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}} \cdot \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (17)$$

降伏後の相当応力 相当塑性ひずみ曲線の傾きを  $H'$  とすると，ひずみ硬化を考慮した式(16)の相当応力は相当塑性ひずみの関数として次式のように表せる．

$$\bar{\sigma}_\xi = \frac{1}{\beta_\xi (\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi)} \kappa_c + H' \int d\bar{\varepsilon}_\xi^p \quad (18)$$

したがって，硬化型の異方性降伏関数は，式(18)を式(16)に代入することによって，次式のように与えることができる．

$$F(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_\xi^p) = \sqrt{J_{2D} - \bar{J}_1} - \left\{ \kappa_c + \beta_\xi (\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi) H' \int d\bar{\varepsilon}_\xi^p \right\} = 0 \quad (19)$$

さらに，上式を  $\kappa_c$  で正規化することにより，次式の表現も考えられる．

$$f(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_\xi^p) = \sqrt{J_{2D}} - \bar{J}_1 - \left\{ 1 + \bar{b}_\xi(\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi) H' \int d\bar{\varepsilon}_\xi^p \right\} = 0 \quad (20)$$

また，硬化塑性材料に対する構成方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \\ &= (D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (21)$$

上式の塑性部のマトリックス  $D_{ijkl}^p$  は，次式で与えられる．

$$D_{ijkl}^p = \frac{D_{ijtu}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} D_{rskl}^e}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\bar{\varepsilon}_\xi^p} C'_\xi \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}} \quad (22)$$

(  $tu : dummy$  )

今回考えている载荷関数の場合，式 (22) に含まれる  $C'_\xi$ ， $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ ， $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$ ， $\frac{d\kappa}{d\bar{\varepsilon}_\xi^p}$  は，次の通りである．

$$C'_\xi = \frac{\bar{b}_\xi(\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi)}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (\xi = 1, 2, 3) \quad (23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{\bar{b}_i(2\bar{b}_i\sigma_{ii} - \bar{b}_j\sigma_{jj} - \bar{b}_k\sigma_{kk})}{\sqrt{J_{2D}}} - \bar{\alpha}_i\bar{b}_i \quad (24)$$

(  $i, j, k : free ; i \neq j \neq k ; i, j, k = 1, 2, 3$  )

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\bar{b}_k^2\sigma_{ij}}{\sqrt{J_{2D}}} \quad (25)$$

(  $i \neq j ; ij = 12, 23, 31 ; k = 4, 5, 6$  )

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = -1 \quad (26)$$

$$\frac{d\kappa}{d\bar{\varepsilon}_\xi^p} = \bar{b}_\xi(\sqrt{2} - \bar{\alpha}_\xi) H' \quad (\xi = 1, 2, 3) \quad (27)$$

## 6. 解析結果の比較・考察

異方性岩盤の掘削問題の一例として，まず急斜面の掘削解析を実施した．解析モデルを図 2 に，相当塑性ひずみ分布を図 3-1，図 3-2 に示す．

相当塑性ひずみの値は，急斜面のモデルでは流れ目である層理角  $60^\circ$  で最大値を示し， $90^\circ$  に至っても  $60^\circ$  に次ぐ値を示していることから層理角  $60^\circ \sim 90^\circ$  付近で最も不安定になっていることが分かる．それに対して，差し目となる  $120^\circ$  では塑性域が極端に縮小し，最小値を示している．また，層理角  $150^\circ$  になると再び塑性域が拡大していることから，層理角  $120^\circ \sim 150^\circ$  付近で安定する傾向にある．

また，層理角毎に塑性域の分布状態を見てみると，層理角  $0^\circ$  では法尻，もしくは法面下部に集中した分布している．流れ目となる層理角  $30^\circ$ ， $60^\circ$ ， $90^\circ$  での塑性域の発

生は，法尻を含んで掘削法面の広範囲に分布しており，滑り破壊を引き起こすような分布傾向にある．差し目となる層理角  $120^\circ$ ， $150^\circ$  では，小さな値が掘削法面に分布した．

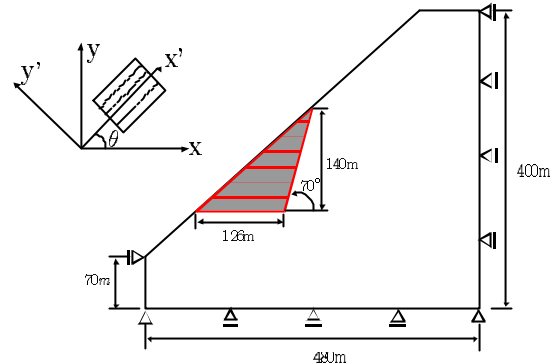
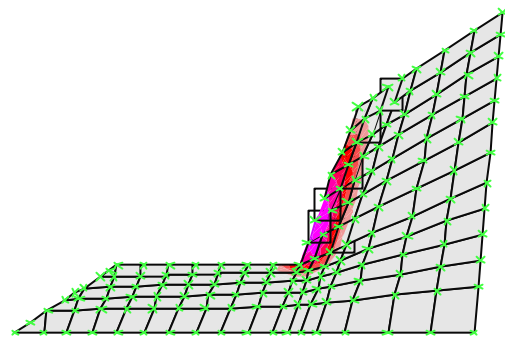
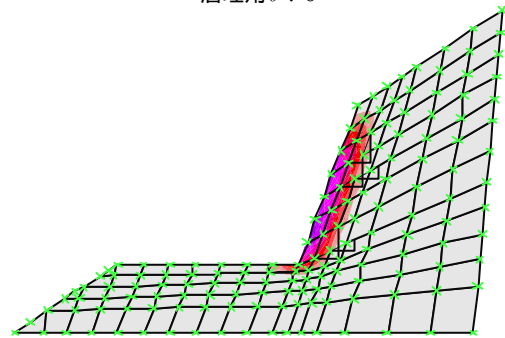


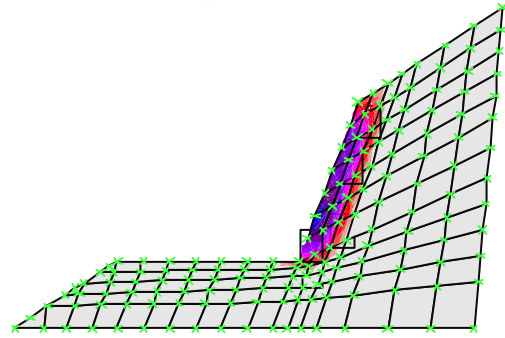
図 2 . 解析モデル図



層理角  $\theta : 0^\circ$

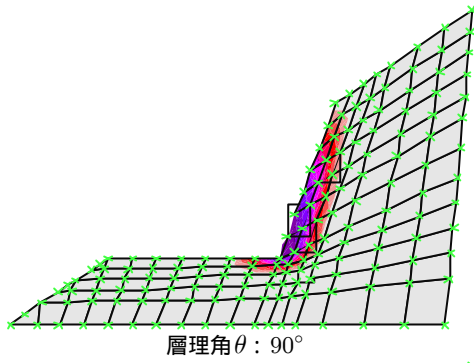


層理角  $\theta : 30^\circ$

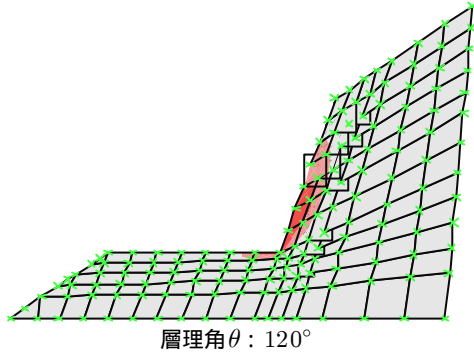
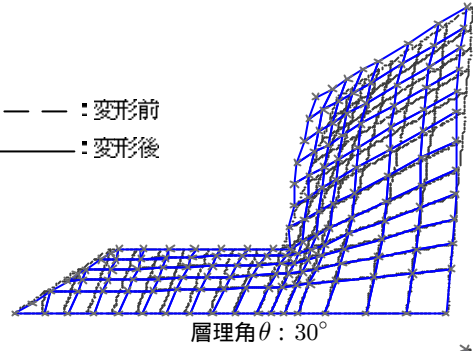


層理角  $\theta : 60^\circ$

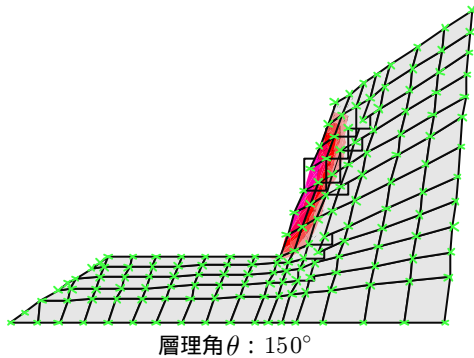
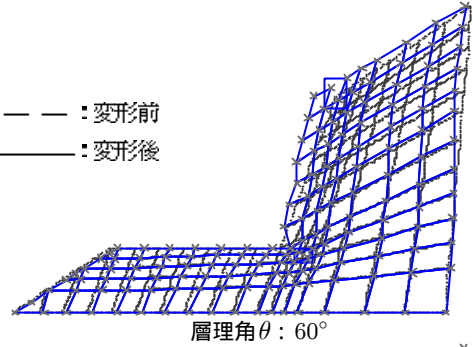
図 3-1 . 掘削域周辺の相当塑性ひずみ分布図



--- : 変形前  
 ——— : 変形後



--- : 変形前  
 ——— : 変形後



--- : 変形前  
 ——— : 変形後

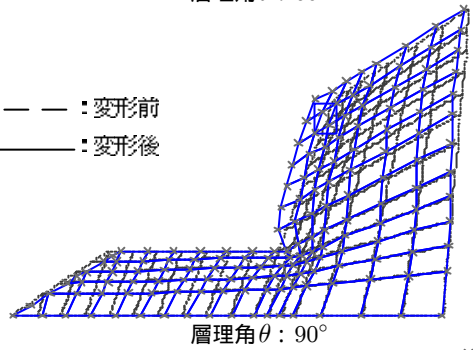


図 3-2 . 掘削域周辺の相当塑性ひずみ分布図

次に、各層理角毎の水平変位を図 4-1、図 4-2 に示す。急斜面の掘削問題では、すべての層理角において、谷側への変形モードを示している。また層理角  $0^\circ \sim 90^\circ$  の範囲では、層理角の増大に伴い法面の谷側への変形は大きくなり、特に層理角  $90^\circ$  では、法面全体が大きく谷側に変形していることが分かる。差し目となる層理角  $120^\circ \cdot 150^\circ$  では、谷側への変形は縮小し、法肩付近での変形に留まった。

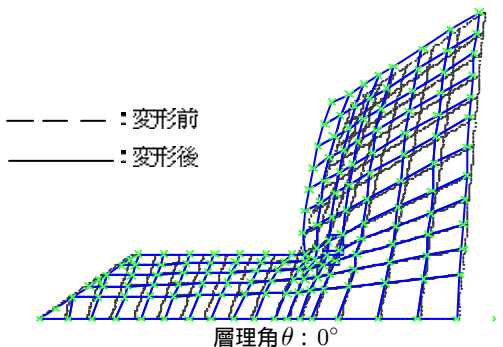
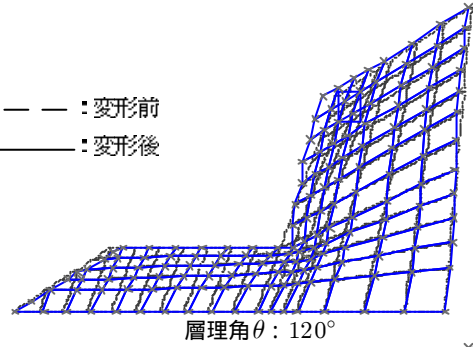


図 4-1 . 掘削域周辺の水平方向変形図

--- : 変形前  
 ——— : 変形後



--- : 変形前  
 ——— : 変形後

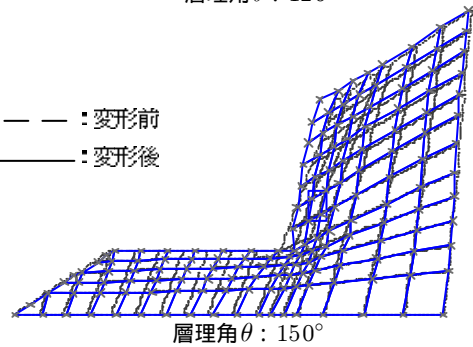


図 4-2 . 掘削域周辺の水平方向変形図

続いて緩斜面の掘削解析について、解析モデルを図 5 に、相当塑性ひずみ分布を図 6-1, 図 6-2 に示す。

層理角が  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  の流れ目では、層理角が増大するにつれ、急斜面の掘削問題の時と同様に塑性域の分布が拡大しており、緩斜面の掘削についても層理角  $60^\circ$  で最大値を生じた。差し目に入ると、 $120^\circ$  から  $150^\circ$  へと層理面の傾斜が減少するにつれて、相当塑性ひずみの値・分布とも小さくなっており、急斜面の掘削問題における塑性域の分布傾向とは異なる。この原因として、自然斜面勾配や掘削角度あるいは掘削の開始位置の違いが、後背地山から掘削面に作用する応力の流れに影響を及ぼし、このような傾向の違いをもたらしていると考えられる。また、このことは急斜面モデルと比較して緩斜面モデルで生じた相当塑性ひずみの値が小さいことから、これらの影響が分かる。さらに、層理角毎に見てみると、層理角  $0^\circ$  については、掘削最終段階を迎えても破壊に至っていないことから、この緩斜面モデルに対して最も安定しているが分かる。また、流れ目となる層理角  $30^\circ \sim 90^\circ$  の範囲では、塑性域の発生は法尻方向に広範囲に広がり、急斜面の掘削と同様に、滑り破壊を生じるような分布傾向を示している。差し目となる層理角  $120^\circ, 150^\circ$  では、相当塑性ひずみの値は小さくなり、法尻付近に集中した分布を示した。

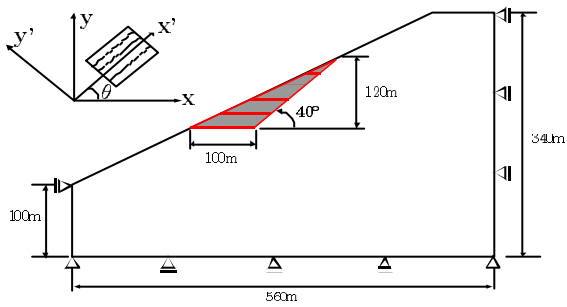
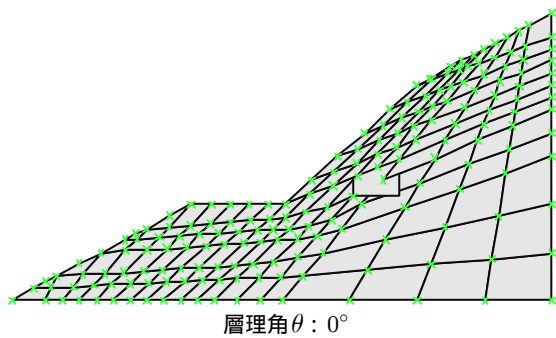
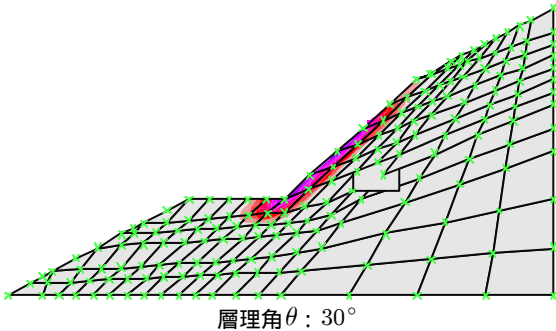


図 5．解析モデル図

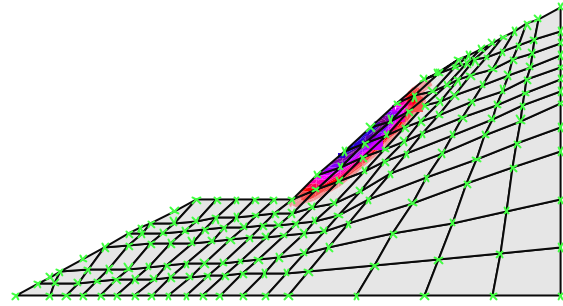


層理角  $\theta : 0^\circ$

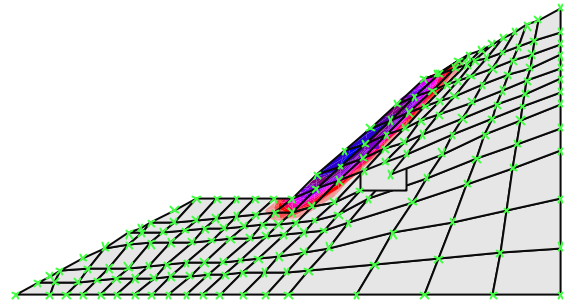


層理角  $\theta : 30^\circ$

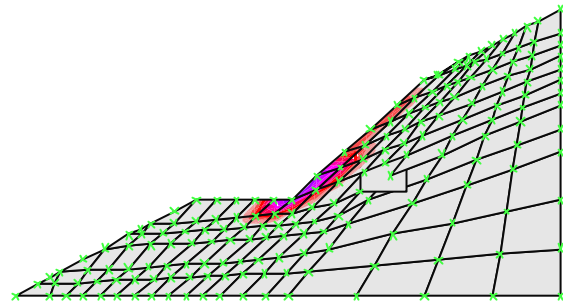
図 6-1．掘削域周辺の相当塑性ひずみ分布図



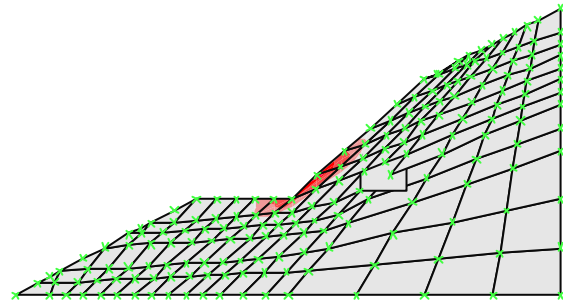
層理角  $\theta : 60^\circ$



層理角  $\theta : 90^\circ$



層理角  $\theta : 120^\circ$



層理角  $\theta : 150^\circ$

図 6-2．掘削域周辺の相当塑性ひずみ分布図

次に、各層理角毎の水平変位を図 7 に示す。

緩斜面を掘削する問題では、水平方向の変位成分だけで見ると、層理角  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  においては、谷側への変形モードを示しているが、層理角  $0^\circ, 120^\circ, 150^\circ$  の場合は、急斜面の掘削問題とは異なり、掘削面付近の水平変位は山側に移動しており、流れ目と差し目では変形モードが逆転する傾向にある。

この変形モードの逆転現象の原因としては、先に示した相当塑性ひずみ分布において、掘削面が流れ目方向にある場合と差し目方向にある場合では、掘削面周辺の岩盤内に生じる塑性領域の広がり大きな差が生じること



によるものであると思われる。

すなわち、差し目では弾性的挙動が卓越していることから、掘削底盤の盤膨れ（上向き変形）による斜面の押上げが掘削面を山側に変形させているものと考えられる。

以上2ケースの斜面の掘削問題に対する解析結果を考察してきたが、これらの現象は、実験を通じて確認する必要があることは言うまでもない。しかしながら、本解析プログラムによって、強度異方性を表現した解析が可能であることが分かる。

## 7. あとがき

本研究では、静水圧依存の硬化型異方性降伏関数に含まれる材料パラメータを通常の一軸・三軸圧縮試験結果のみを用いて決定する手法を示した。

また、材料座標系で定義された降伏関数を全体座標系に変換する詳細な理論展開を示すことにより、材料パラメータの決定に際して、材料主軸に対して任意の方向で実施された材料試験データを利用できるようにした。

さらに、静水圧依存の硬化型異方性降伏関数を用いた岩盤の掘削問題について数値解析を行い、層理角の違いによる力学的挙動を、ある程度表現することができることを示した。特に、これらの解析結果に対する考察から、以下のような重要な示唆を示した。

- ・有限要素法を用いた従来の斜面掘削解析では困難であった流れ目盤と差し目盤での変形モードの逆転現象を表現できることを示した。

- ・この変形モードの逆転傾向は緩斜面で著しく、急斜面では流れ目と差し目のいずれも谷側に滑るような危険な変形モードとなることを示した。

今後の課題としては、掘削による緩みやクラックの発生を取り入れたプログラムの開発や実現場における計測値との比較・検討から、本手法の妥当性を検証して行く必要がある。

## 参考文献

- [1] 高橋寛：硬化型異方性降伏関数の定式化と適用性に関する研究，法政大学 1997 年度修士論文
- [2] O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung, THE FINITE ELEMENT METHOD IN STRUCTURAL AND CONTINUUM MECHANICS, McGraw-Hill.
- [3] 武田洋, 草深守人：異方性構成方程式の座標変換に関する統一的展開, 第3回日本計算工学会講演論文集, 1998.
- [4] 岩の力学委員会：土質基礎工学ライブラリー33 岩盤挙動の予測と実態, 土質工学会, 1988.
- [5] 桜井春輔：「トンネル・地下空洞における岩盤の緩みとは？」, 第23回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集（パネルディスカッション）, pp378-379, 1991.
- [6] 井上達雄, 田中喜久昭, 長岐滋：固体力学と総変態の解析, 大河出版, 1995.
- [7] 川本眺万, 吉中龍之進, 日比野敏：新体系土木工学 20 岩盤力学, 技報堂出版, 1985.
- [8] 吉岡良朗：新体系土木工学 77 砂防・地滑り・急傾斜地崩壊, 技報堂出版, 1980.
- [9] Richard.E.Goodman 原著, 赤井浩一, 川本眺万, 大西有三 共訳 不連続性岩盤の地質工学, 森北出版, 1978.
- [10] 土木学会, 土木技術者のための岩盤力学, 1972.

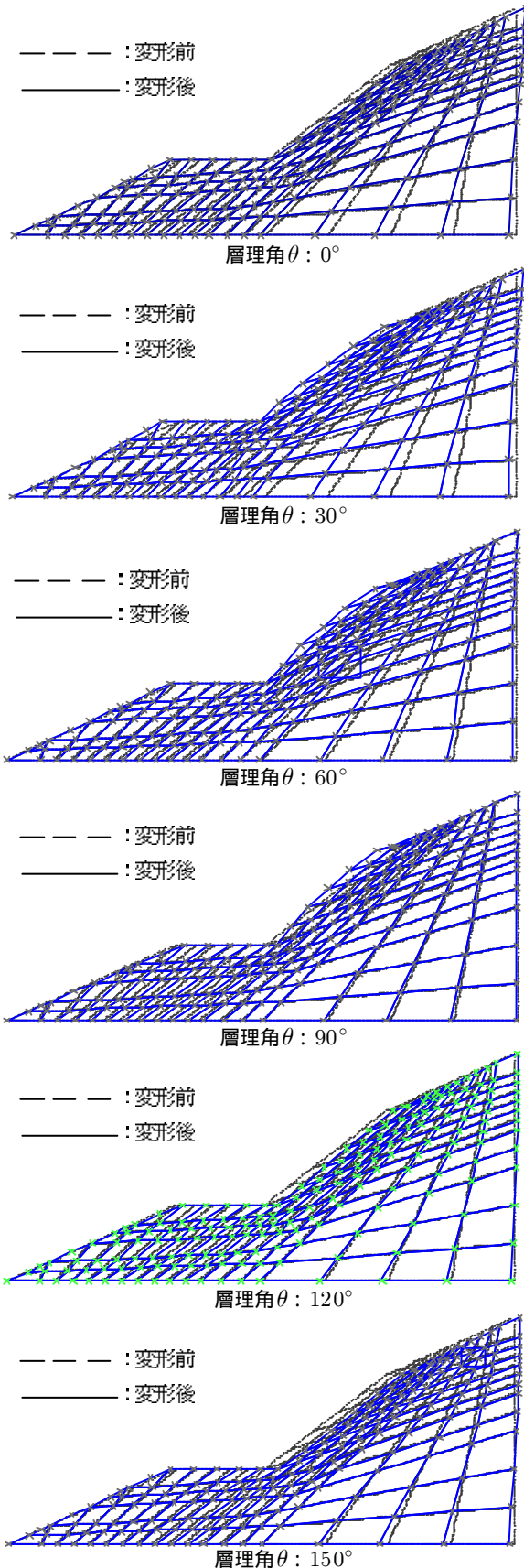


図7. 掘削域周辺の水平方向変形図

キーワード.

硬化、異方性降伏関数、岩盤、非線形最適化手法

-----

Summary.

**The Excavation Analysis of Rock Mass Using Anisotropic Yield Function with Hydrostatic Pressure-Dependent**

Takeshi Kaneshige

Division of Engineering, Specialize in Construction Engineering, Hosei University

Morito Kusabuka

Computational Science Research Center, Hosei University

Hiroshi Takeda

Faculty of Engineering, Department of System and Control Engineering, Hosei University

In recent years, as to designs and constructions of the civil structures such as hydroelectric power plant, mechanical behavior of geological materials are estimated by the numerical analysis using the finite element method, and the objective technical judgement is required. In this request, great importance is attached to strength anisotropy following the excavation of rock structures such as the large slope and the underground cavern.

In this study, the numerical analysis program for the excavation problem of rock mass was developed, and the stability of the excavated rock structure with anisotropic strength was evaluated by a proposed hardening-type anisotropic yield function depending on hydrostatic pressure. The material parameters included in this yield function can be evaluated by a nonlinear optimization method using axisymmetric uniaxial and triaxial compression test results. This method does not require difficult tests such as simple shear tests for their evaluation.

And then, the usefulness of numerical analysis program and the expression of the proposed yield function were investigated using the numerical analysis results.

Keywords.

hardening, anisotropic yield function, rock mass, nonlinear optimization method