

破壊状態と限界状態を考慮した粘性土の一般化降伏関数

石橋 泰

法政大学大学院工学研究科

草深 守人

計算科学研究センター

竹内 則雄

法政大学工学部土木工学科

限界状態論をもとにした降伏関数（法政モデル）は、様々な粘性土において適応できるモデルとして開発された。しかしながら、このモデルは、密な土における降伏から破壊状態に至り、限界状態に達するという挙動を表現することはできない。本研究では、この挙動を表現可能にする為に、法政モデルを拡張（修正法政モデル）した。また、修正法政モデルの実用性を評価・検討するために、室内試験結果と両モデルにおける有限要素解析結果の比較を行った。その結果修正法政モデルは法政モデルと比較して、応力状態を比較的より良く表せることが確認された。しかしながら、実際問題の適用性について、モデルの改良、材料パラメータの評価精度の向上等、今後改善すべき多くの課題が残された。

1. はじめに

草深、板垣らによって提案された限界状態論をもとにした降伏関数（法政モデル）は、様々な粘性土において適応できるモデルとして開発された。しかしながら、このモデルは、土の降伏から限界状態に至るといった緩い土の挙動を表現することはできるが、密な土における降伏から破壊状態に至り、限界状態に達するという挙動を表現することはできない（図1）。本研究では、粘性土が降伏から破壊状態を経て、限界状態に達する過程を表現できるように法政モデルを拡張した（修正法政モデル）。また、修正法政モデルの実用性を評価・検討するために、室内試験結果と両モデルにおける有限要素解析結果の比較を行った。

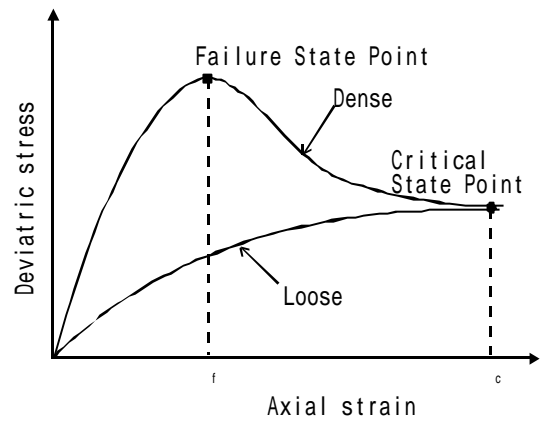


図1 土の挙動

2. 法政モデル

法政モデルでは、降伏キャップを楕円形の一部と仮定し、楕円の頂点を限界状態とした次式の降伏関数を与えた（図2）。

$$f = \Lambda^2 M^2 p^2 - 2\Lambda^3 M^2 p_0 p + \Lambda^2 (2\Lambda - 1) M^2 p_0^2 + (1 - \Lambda) q^2 = 0 \quad (1)$$

ここで、 M は限界状態線の勾配、 p_0 は降伏キャップの移動を表す等方圧密圧力を表す。 Λ は材料パラメータであり次式で与えられる。また、このパラメータは土の種類によって決定される固有のパラメータであることがすでに確認されている。

$$\Lambda = \frac{p_c}{p_0} \quad (2)$$

また、式(1)は材料パラメータ Λ を $\Lambda = 0.5$ と置くことにより、次式のように修正 Cam-Clay モデルを表すことができる。このことより、法政モデルは、従来の Cam-Clay モ

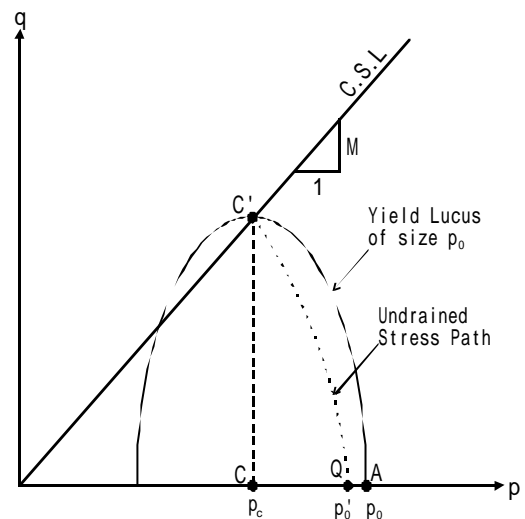


図2 降伏曲面と応力経路（法政モデル）

デル, 修正 Cam-Clay モデルの自然な拡張となっており, より一般化された降伏基準と解釈することができる.

$$f = M^2 p^2 - M^2 p_0 p + q^2 = 0 \quad (3)$$

3. 破壊状態線を導入した状態境界面

図3は, 飽和粘性土の応力状態を平均応力 p 偏差応力 q および間隙比 e による座標系で表したものである. また, 曲線 EhH, FiI, GjJ はそれぞれ, 等方正規圧密状態の点 E, F, G から非排水せん断したときの応力経路であり, 間隙比は一定である. ここで, 点 h, i, j は破壊状態線(Failure State Line)上, 点 H, I, J は限界状態線(Critical State Line)上にある. つまり, 等方正規圧密をした飽和粘性土を非排水せん断した場合には, その応力状態は, 上記の曲線 EhH, FiI, GjJ のような経路を通り, それぞれ点 h, i, j で破壊状態に達し, 点 H, I, J で限界状態に達する.

正規圧密された土試料は, せん断を加えた直後から降伏していることから, EhH, FiI, GjJ 上の点は, すべて降伏曲面上の点である. したがって, 点 B', C', D' は過圧密された(A点より除荷した)土試料にせん断応力を負荷したときの降伏点を表していることがわかる. このような点の集合は降伏曲面上に曲線 $AB'C'D'K$ のような軌跡を描く. また, 点 E, F, G における除荷・再負荷曲線からも曲線 $AB'C'D'K$ に相似な曲線が描かれるはずである.

ここで曲線 $AB'C'D'K$ を $p - q$ 平面上に投影すると図4のようになる. 以下では, 土試料がせん断によりひずみ硬化・軟化を起こすとき, その応力点は図4のような曲線 $AB'C'D'$ に相似な曲線群(連続的に存在する移動降伏曲線)上を移動するものと考え, これらの曲線群によって現される曲面を降伏関数として仮定する.

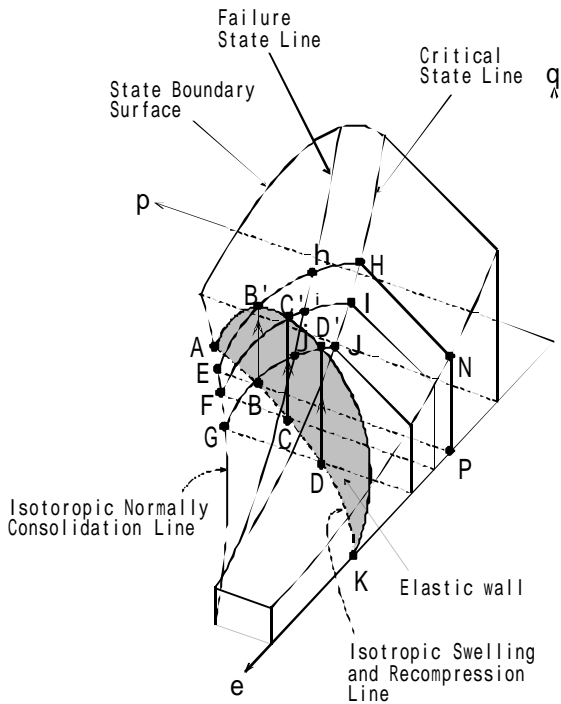


図3 破壊状態線を導入した状態境界面

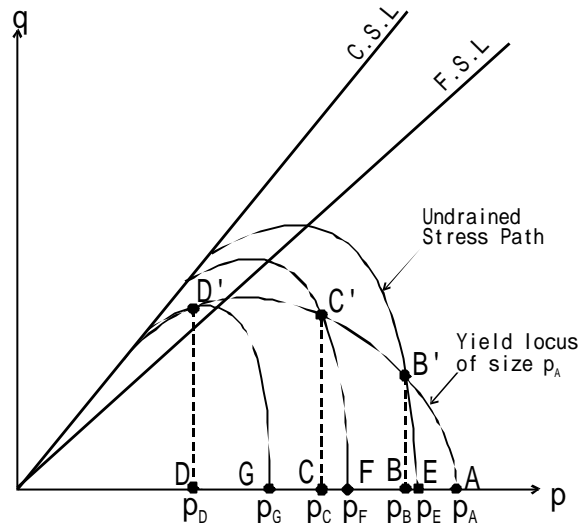


図4 $p - q$ 平面における降伏点の軌跡

4. 修正法政モデル

図6は図5に示す降伏曲面と任意の等方圧密応力 p_0 に対する弾性壁面との交線 APL を $p - q$ 平面上に投影したものである. 曲線 $AP'L$ は, $p - q$ 平面上での降伏キャップを表す. この降伏キャップと限界状態線との交点 L' を通る非排水応力経路を QL' , この時の等方圧密応力を p_e , 降伏キャップが破壊状態線と交差する点の等方圧密応力を p_f とする.

本研究では, この降伏キャップを法政モデルと同様, 楕円形の一部であると仮定した. また, この降伏キャップが限界状態線と接する点 L' を限界状態, 降伏キャップの頂点 I' を破壊状態と仮定した. 以上の仮定に基づいた降伏関数は次のように与えられた.

$$f = \Lambda M^2 p^2 - 2\Lambda \Gamma M^2 p_0 p - (1 - 2\Gamma)\Lambda M^2 p_0^2 + (\Gamma - \Lambda)q^2 = 0 \quad (4)$$

ここで, M は限界状態線の勾配, p_0 は降伏キャップの移動を表す等方圧密圧力である. また, Λ は式(2)で定義した材料パラメータであり, Γ は新たに導入した次式で定義される材料パラメータである.

$$\Gamma = \frac{p_f}{p_0} \quad (5)$$

式(2)と式(5)で定義した二つの材料パラメータ Λ, Γ の間には次式の関係が要求される.

$$\Gamma = \frac{1}{2 - \Lambda} \quad (6)$$

したがって, Λ と同様に Γ も土固有の材料パラメータでなければならない.

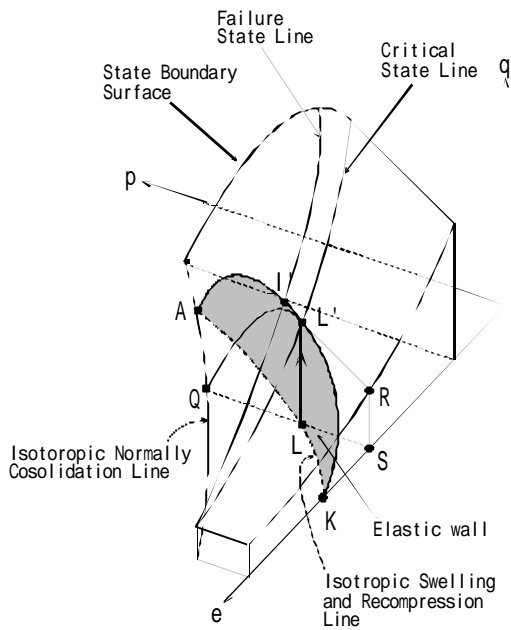


図5 破壊状態線と限界状態線を有する降伏曲面

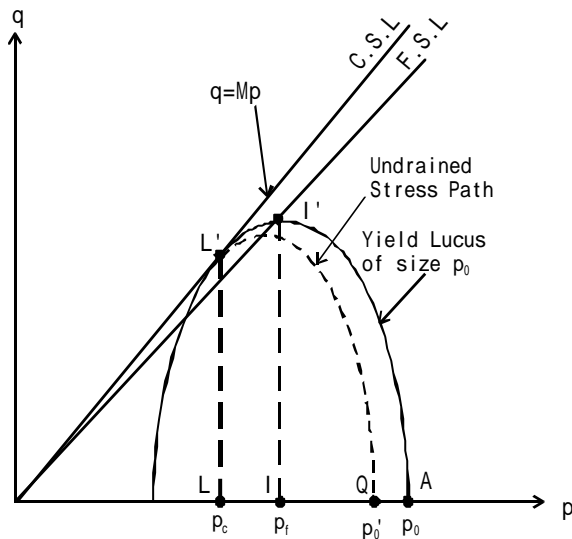


図6 修正法政モデル

5. 材料パラメータ Λ , Γ の実験的検証

修正法政モデルの有効性を検証するために、修正法政モデルにおける Λ の算出を行った。また、式(6)で定義した理論値の Γ と式(5)で定義した実験値の Γ の比較を行った。実験データは比較的限界状態が明確に現れているものを対象とし、当研究室で用いている粘土、企業より入手した砂混じりシルト、細砂質シルト、文献⁵⁾から得られた Soft Bangkok Clay について算定を行った。算定結果を表1に示す。

算定結果より、1997年の粘土の試験データ、細砂質シ

ルト、初期圧密圧力 78 kN/m^2 の Soft Bangkok Clay の試料を除いて、 Λ は初期圧密応力 p'_0 に関わらずほぼ一定の値を示した。実験値より算定された Γ については、1996年の粘土の試験データ、砂混じりシルト、Soft Bangkok Clay の一部について、初期圧密応力 p'_0 に関わらず、ほぼ一定の値を示した。また、実験値より算定される Γ と理論値から算定される Γ は、全ての試料についてほぼ近い値を示していることが確認された。

表1 Λ と Γ の算定結果

分類	p'_0 kN/m^2	Λ	Γ (実験値)	Γ (理論値)
粘土 (1997年)	196	0.732	0.819	0.789
	221	0.628	0.693	0.729
粘土 (1996年)	172	0.593	0.631	0.710
	221	0.597	0.629	0.713
砂混じり シルト	216	0.684	0.805	0.760
	324	0.623	0.774	0.726
細砂質 シルト	177	0.525	0.738	0.678
	265	0.719	0.815	0.781
Soft Bangkok Clay	78	0.439	0.599	0.641
	98	0.545	0.683	0.687
	196	0.545	0.655	0.687

6. 構成方程式と間隙水圧

提案した降伏関数を用いた弾塑性構成方程式は次のように与えられた。

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} - \frac{C_{ijrs}A_{rs}B_{mn}C_{mnkl}}{B_{mn}C_{mnr}A_{rs} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_v^p} A_{ii}} \right] d\varepsilon_{kl} \quad (7)$$

式(7)に含まれる成分は以下の通りである。

C_{ijkl} : 弾性係数テンソル

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{2M^2 \Lambda p_0 (1 + e_0) (2\Gamma p_0 - \Gamma p - p_0)}{\lambda - \kappa}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad B_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

e_0 は初期間隙比、 Q は塑性ポテンシャル、 f は降伏関数である。関連流れ則を仮定し、

$$A_{ii} = B_{ii} = \frac{2}{3} M^2 \Lambda (p - \Gamma p_0)$$

$$A_{ij} = B_{ij} = 6\sqrt{q}(\Gamma - \Lambda)S_{ij}$$

とした。\$S_{ij}\$は偏差応力であり次式で与えられる。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{mm}\delta_{ij}$$

また、間隙水圧 \$u\$ と応力の構成関係は、応力の第 1 不変量 \$J_1\$ と偏差応力の第 2 不変量 \$J_{2D}\$ に関する 2 つの間隙圧係数 \$A, B\$ を用いて次式で与えた。

$$u = B\frac{J_1}{3} + A\sqrt{3J_{2D}} \quad (8)$$

\$J_1, J_{2D}\$ は次式で与えられる。

$$J_1 = \sigma_{ii} \quad , \quad J_{2D} = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

7. 実験値と計算値の比較・考察

提案した修正法政モデルの実用性を評価・検討するために、非排水三軸試験の結果と、法政モデルおよび修正法政モデルの有限要素解析結果の比較を試みた。また、直接基礎の支持力問題に対する両モデルの有限要素解析を実施した。

(1) 非排水三軸試験

非排水三軸試験の実験値と解析値を応力経路と応力 - ひずみ関係について比較を行った。試料の材料定数は非排水三軸試験および等方圧密試験より、\$M=1.39\$、\$\lambda=0.1616\$、\$\kappa=0.0077\$、\$\Lambda=0.6\$ と決定した。また、間隙水圧係数は \$A=0.4\$、\$B=0.4\$ とし、修正法政モデルに含まれる \$\Gamma\$ は式(6)より \$0.714\$ とした。例として初期圧密応力 \$123\text{kN/m}^2\$、\$172\text{kN/m}^2\$、\$221\text{kN/m}^2\$ の試料についての結果を図 7 ~ 図 12 に示す。

応力経路から明らかのように、修正法政モデルは法政モデルと比較して、破壊状態線までは、実験値に近い挙動を示した。また、法政モデルは降伏から限界状態までの過程を示すモデルであるのに対し、修正法政モデルは降伏から偏差応力のピークである破壊状態を経て限界状態に達する過程を表現できるモデルであることが分かる。修正法政モデルは初期圧密応力が高いものほど応力状態をよく表現できていることから、高压密の試料に、より適応できるものと思われる。

応力 - ひずみ関係については、せん断開始時での挙動は両モデル共に実験値と差が見られたが、破壊状態前後については、修正法政モデルは法政モデルより比較的实验値に近い結果となった。また、法政モデルはひずみ硬化を示すモデルであるのに対し、修正法政モデルは破壊前のひずみ硬化から破壊以後に生じるひずみ軟化までを表現できるモデルであることが分かる。

以上のことから、修正法政モデルは破壊以後ひずみ軟化を示す試料に対し有効であると考えられ、今回比較したひずみ硬化を示す試料においてもある程度土の挙動を表現できたことから、このモデルは法政モデルと比較して、より改善されたモデルであるように思われる。

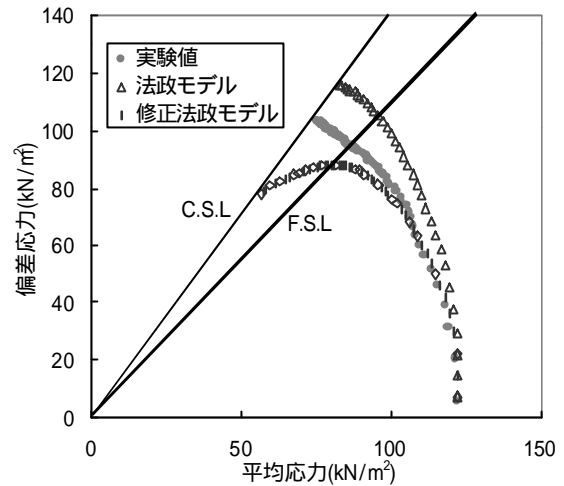


図 7 応力経路 (初期圧密応力 \$123\text{kN/m}^2\$)

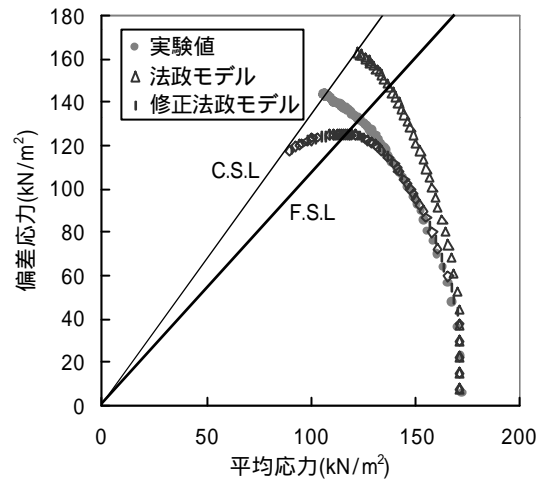


図 8 応力経路 (初期圧密応力 \$172\text{kN/m}^2\$)

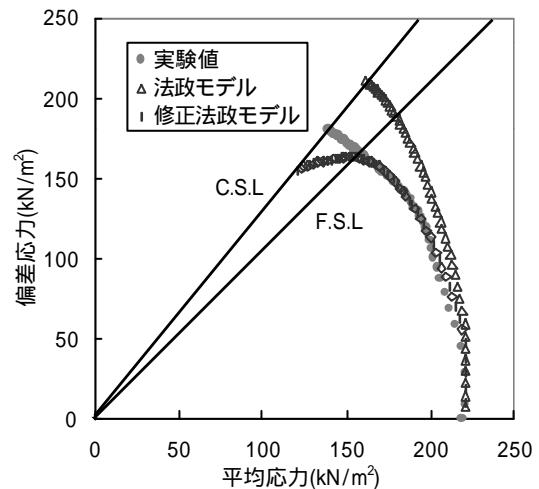


図 9 応力経路 (初期圧密応力 \$221\text{kN/m}^2\$)

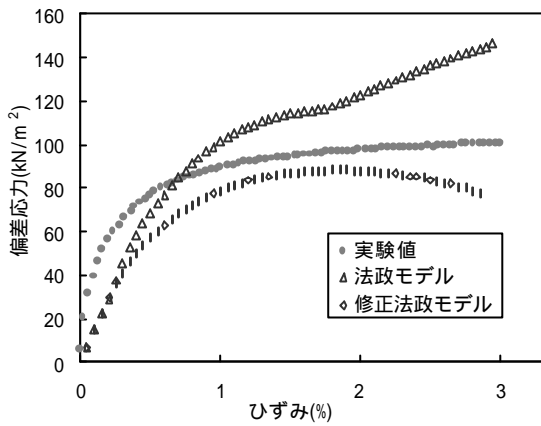


図10 応力 ひずみ (初期圧密応力 123kN/m²)

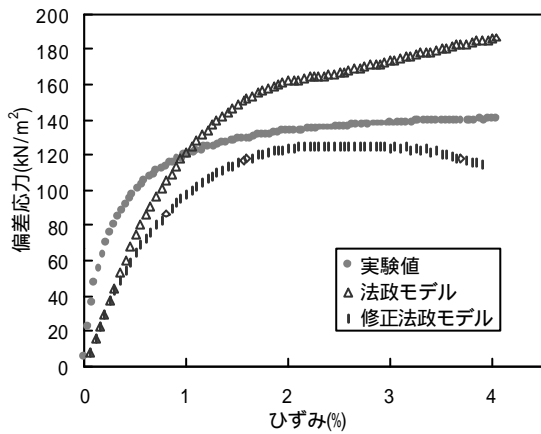


図11 応力 ひずみ (初期圧密応力 172kN/m²)

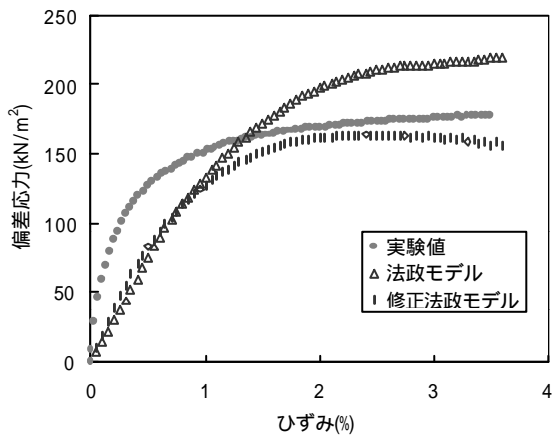


図12 応力 ひずみ (初期圧密応力 196kN/m²)

(2) 直接基礎の支持力問題

提案した降伏関数の実用性を調べるために、直接基礎の模型実験を例に有限要素解析を行った。試料の材料定数は非排水三軸試験および等方圧密試験より、 $M=1.46$ 、 $\lambda=0.178$ 、 $k_s=0.02$ 、 $\Lambda=0.63$ と決定した。また、間隙水圧係数は $A=0.4$ 、 $B=0.4$ とし、 Γ は式(6)より 0.730 と

した。モデル図を図13に示す。法政モデル、修正法政モデルにおける変位図、偏差応力の第2不変量 J_{2D} の分布図、および偏差ひずみの第2不変量 I_{2D} の分布図の解析結果を図14～図19に、荷重-変位図を図20に示す。

図16～図19より、法政モデル、修正法政モデル共に載荷板端部にせん断応力の集中が見られ、破壊が生じていることから、局所破壊を表現できることが分かる。特に修正法政モデルは、図17に示すように載荷板直下に滑り土塊が形成されるような現象を説明している。このことから、修正法政モデルは支持力問題における土の破壊挙動をほぼ表現できると言えそうである。しかしながら、図20に示す荷重-沈下量の関係については、両モデル共に実験値とは異なる挙動を示し、実験精度の確認、モデルの改良等、今後改善すべき課題を残す結果となった。

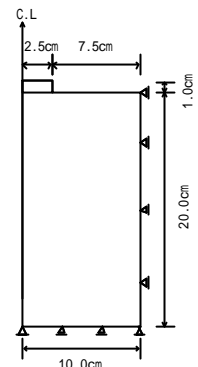


図13 モデル図

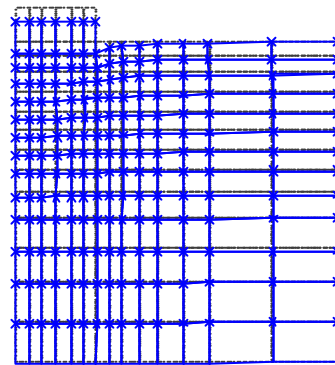


図14 変位図 (法政モデル)

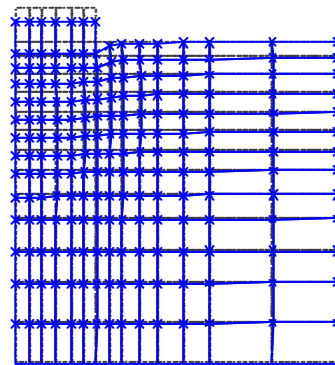


図15 変位図 (修正法政モデル)

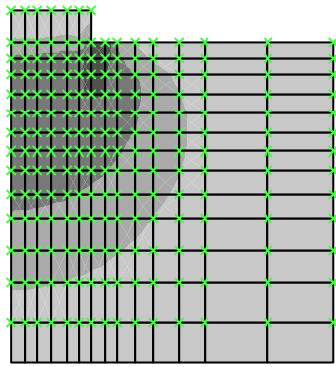


図 16 J_2D 分布図 (法政モデル)

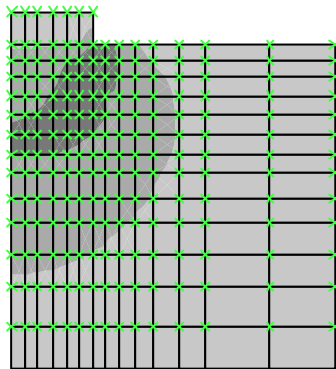


図 17 J_2D 分布図 (修正法政モデル)

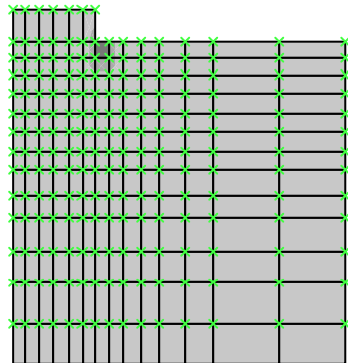


図 18 I_2D 分布図 (法政モデル)

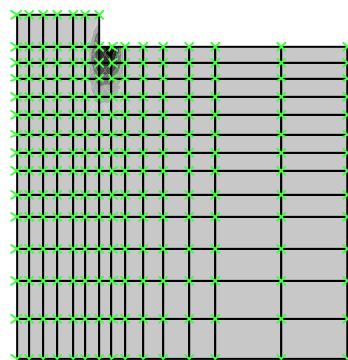


図 19 I_2D 分布図 (修正法政モデル)

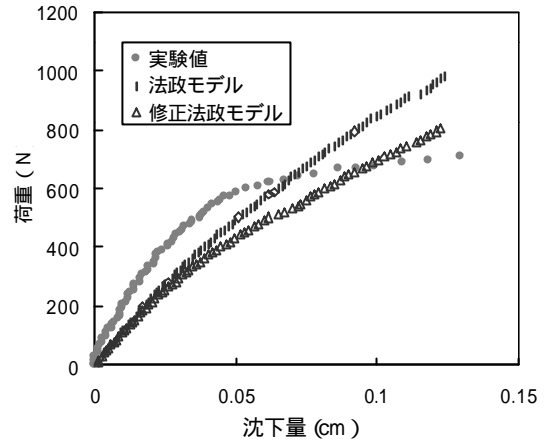


図 20 荷重 - 変位図

8. あとがき

法政モデルを拡張し、破壊状態と限界状態を考慮した降伏関数を示した。修正法政モデルに含まれる材料パラメータが土の種類によって決定される固有のパラメータであることを示した。いくつかの具体的な例題について数値解析を行い、解析結果と実験値との比較から提案した降伏関数が降伏から破壊状態を経て限界状態に至る過程をほぼ表現できるモデルであることを示した。また、修正法政モデルは法政モデルと比較して、破壊状態までの応力状態をよりよく表現できることを示し、修正法政モデルは法政モデルを改善したモデルであることが確認された。

しかしながら、非排水三軸試験での破壊状態以降の応力経路について、修正法政モデルは実験値と異なる挙動を示したことや、直接基礎の解析結果において法政モデル、修正法政モデル共に変位に関して実験値との差が大きいことから、実際問題への適応性について、モデルの改良、材料パラメータの評価精度の向上等、今後改善すべき多くの課題が残された。

参考文献

- 1) C.S.Desai, H.J.Siriwardane : Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics, Cambridge University Press, 1990
- 2) Andrew N Schofield, 太田秀樹 他：土と基礎，講座「カムクレイに学ぶ」土質工学会 1993, 5 1994, 3
- 3) 田中忠次, 鶴飼恵三 他：地盤の三次元弾塑性有限要素解析，丸善株式会社，1997
- 4) 板垣敏章：Roscoe 面と限界状態を降伏関数とする構成方程式の研究，法政大学大学院建設工学研究科修士論文，1997
- 5) Balasubramaniam, A. S., Handali, S. and Muir Wood, D: "Pore Pressure: Stress Ratio Relationship For Soft Bangkok Clay", Soils and Foundations, Vol.32, No1, pp117-131, 1992
- 6) 中村慎一郎：限界状態論に基づく地盤材料の一般化と構成方程式の研究，法政大学大学院工学研究科修士論文，1995
- 7) 李広信 最上最一：山峡ダムにおける第二期囲堰の遮水壁の有限要素解析，土と基礎，pp32 - pp34, 1999, 5

キーワード.

破壊状態、限界状態、降伏関数、土質材料、有限要素法

Summary.

Generalized Yield Function Considering The Failure State and The Critical State

Yasushi Ishibashi

Division of Engineering, Specialize in Construction Engineering, Hosei University Graduate School

Morito Kusabuka

Computational Science Research Center, Hosei University

Norio Takeuchi

Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Hosei University

Hosei-model based on the critical state soil mechanics was the yield function which considered only critical state. When some soils are sheared on the undrained state, they reach the critical state after reaching the failure state. In this study, Hosei-model was expanded to express this behavior (modified Hosei-model). And the comparisons between numerical prediction using modified Hosei-model and the undrained triaxial test data were performed in order to evaluate and investigate a practical use of the new model. The finite element analyses about the problem of bearing capacity were carried out. It was ascertained that modified Hosei-model could express the stress path more fairly than Hosei-model. But about the practical use, it was showed that modified Hosei-model had many problem which had to improve.

Keywords.

critical state, failure state, yield function, soil material, finite element method