

# 損傷力学に基づく岩盤の異方性構成方程式

浅井 宏太

法政大学大学院工学研究科建設工学専攻

草深 守人

法政大学計算科学研究センター

竹内 則雄

法政大学工学部土木工学科

微視的欠陥あるいは中小規模の不連続面を持つ岩盤の構成関係は、損傷力学の観点から考察することができる。等方損傷材料に対する構成式は熱力学的考察により定式化された。本研究では等方性損傷から異方性損傷への拡張をおこなう。その結果、異方性損傷の概念が連続体力学の枠内で不連続性岩盤の力学的挙動を表すのに有効であることを示した。

## 1. はじめに

近年、材料中の微視的空隙や微小クラックのような微視的レベルにおける欠陥の力学的効果を連続的な変数場として把握し、材料中の微視的欠陥の発達とそれに伴う材料の挙動を考察する損傷力学が注目され始めている。これら微視的欠陥の形状、方向、分布などの進展は一般に応力あるいはひずみの方向性に依存しており、本来異方性であるといえる。そしてこの異方性を考慮することは材料の破壊メカニズムの予測に関して重要な役割を果たすことになるといえよう。

本研究では、損傷の異方性を考慮した構成方程式の定式化と岩盤の掘削問題への適用結果について考察したものである。

## 2. ひずみ等価仮説

図 1 に示すように方向ベクトル  $\vec{n}$  方向に均一に分布す

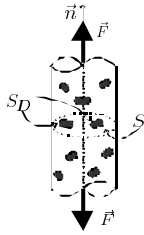


図 1：一次元損傷を有する物体

る微小空隙や微小欠陥の断面積を  $S_D$  とすると損傷量  $D$  は次式のように表される。

$$D = \frac{S_D}{S} \quad (1)$$

また、図 1 に示す物体において力  $\vec{F} = \vec{n}F$  が与えられたとし、微小な欠陥や空隙の面積である  $S_D$  が力を伝達しないとする、損傷の存在しない部分の応力  $\bar{\sigma}$  は通常の応

力  $\sigma$  を用いて次式のように表され、有効応力と呼ばれる。

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_D}{S})} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2)$$

構成式の定式化において、損傷を受けた材料の構成式は通常の応力  $\sigma$  を有効応力  $\bar{\sigma}$  で置換える以外は、損傷を受けていない材料の構成式を導く手法と同じであると仮定した。この仮定をひずみ等価仮説という。

## 3. 等方性損傷モデル

ひずみ等価仮説を基礎とする 3 次元等方性損傷モデルにおける降伏関数は Drucker-Prager 降伏関数の拡張型として次式のように表される。

$$f = \frac{1}{1 - D} \frac{\sqrt{3}J_2D - \alpha J_1\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} k(\varepsilon_{eq}^p) = 0 \quad (3)$$

$$k(\varepsilon_{eq}^p) = \left( \kappa + \frac{1 - \sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}} H' \int d\varepsilon_{eq}^p \right) \quad (4)$$

また、ひずみエネルギー密度開放率  $Y$  は次式のようになる。

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1 - D)^2} \left[ 2C_{DP}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$C_{DP} = \left( \frac{1 - \sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\alpha \frac{J_1}{\sqrt{J_2D}}} \right)^2 \quad (6)$$

さらに、等硬化弾塑性構成方程式は以下のように示される。

$$d\sigma_{ij} = \{ E_{ijkl}(1 - D) - D_p \} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl} \dot{D} \varepsilon_{kl} \quad (7)$$

$$D_p = \frac{E_{ijtu}(1 - D) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} E_{rstkl}(1 - D) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1 - D) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \quad (8)$$

#### 4. 異方性損傷モデル

本研究では、熱力学的な考察により3次元異方性損傷モデルの構成式の定式化をおこなった。

##### 4.1 ひずみエネルギー密度開放率の定式化

ひずみエネルギー密度 $\omega_e$ を式(9)のように偏差成分と静水圧成分に分け、それぞれに対して損傷量 $D_s, D_n$ といったダブルスカラー変数(Energetic Definition of Double Scalar Variable)を与えることで異方性を考慮する。

$$\omega_e = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_s)} \sigma_{ij}^D \sigma_{kl}^D}_{\text{shear energy}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_n)} \sigma_H^2 \delta_{ij} \delta_{kl}}_{\text{hydrostatic energy}} \quad (9)$$

ここで

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (10)$$

$$\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij} \quad (11)$$

Helmholtz の自由エネルギー密度 $\psi$ は次式のように表される。

$$\psi = \tilde{\psi}(\varepsilon_{ij}^e, D_s, D_n) \quad (12)$$

また、ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ は弾性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ と塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ の和であるのとして次式が成立つものとする。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (13)$$

上式に注意して、式(12)を全微分すると次式のようになる。

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial D_s} \dot{D}_s + \frac{\partial \psi}{\partial D_n} \dot{D}_n \quad (14)$$

Clausius-Duhem の不等式は次式のようになる。

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) - h_i \frac{\theta_{,i}}{\theta} \geq 0 \quad (15)$$

またここで次式のように定義する。

$$Y_s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D_s}, \quad Y_n = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D_n} \quad (16)$$

ひずみ硬化については散逸ポテンシャルで考慮することとし、式(13), (14), (16), および式(15)が任意の $\varepsilon^e, \theta$ に対して成立しなければならないことを考慮すると、Clausius-Duhem の不等式は次式のように表すことができる。

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + Y_s \dot{D}_s + Y_n \dot{D}_n \geq 0 \quad (17)$$

上式の $Y_s, Y_n$ はひずみエネルギー密度開放率と呼ばれる。ここで、定式化の簡素化を図るためエネルギー密度関数においては材料が線形弾性体であるとする、 $Y_s, Y_n$ は次式ようになる。

$$Y_s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D_s} = \frac{\partial \omega_e}{\partial D_s} = \frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_s)^2} \sigma_{ij}^D \sigma_{kl}^D \quad (18)$$

$$Y_n = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D_n} = \frac{\partial \omega_e}{\partial D_n} = \frac{1}{2} \frac{S_{ijkl}}{(1-D_n)^2} \sigma_H^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (19)$$

##### 4.2 散逸ポテンシャル

式(17)の散逸不等式の各項は2つの量の積の形をしている。そこで、それぞれの項においてどちらかの量を1つとり一般化力 $\mathbf{W}$ としてまとめ、残りの変数の組を一般化速度 $\mathbf{J}$ として以下のようにまとめる。

$$\mathbf{W} = (\sigma_{ij}, Y_s, Y_n), \quad \mathbf{J} = (\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{D}_s, \dot{D}_n) \quad (20)$$

この一般化速度 $\mathbf{J}$ の構成関係を与えるため通常の塑性論で定義されている塑性ポテンシャルに相当する散逸ポテンシャル $\bar{F}$ を導入して、次式の関係を保定する。

$$\mathbf{J} = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{W}} \quad (21)$$

ここで $\lambda$ は非負のスカラー乗数であり、一般化速度 $\mathbf{J}$ は次式のように表される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (22)$$

$$\dot{D}_s = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y_s}, \quad \dot{D}_n = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y_n} \quad (23)$$

式(23)より損傷速度 $\dot{D}_s, \dot{D}_n$ を求めるためには、散逸ポテンシャル $\bar{F}$ の定式化が必要となる。

一般の塑性論の場合、塑性ひずみ速度は塑性ポテンシャル $F$ により求めることができるので、塑性ひずみと損傷の進展を考慮するための散逸ポテンシャル $\bar{F}$ は、塑性ポテンシャル $F$ に偏差損傷の進展を表す項 $F_{D_s}$ と静水圧損傷 $F_{D_n}$ を加えたものと考えられ、次式のように表すことができる。

$$\bar{F} = F + F_{D_s} + F_{D_n} \quad (24)$$

ここで塑性ポテンシャル $F$ はひずみエネルギー密度開放率 $Y_s, Y_n$ の関数ではなく、さらに $F_{D_n}$ は $Y_s$ の、 $F_{D_s}$ は $Y_n$ の関数ではない(文献2参照)ことを考慮すると、損傷速度(式(23))は次式のように表される。

$$\dot{D}_s = \lambda \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s}, \quad \dot{D}_n = \lambda \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} \quad (25)$$

また損傷  $D_s$ ,  $D_n$  は相当塑性ひずみ  $\varepsilon_{eq}^p$  によって生じると考えられる。よって延性損傷を考慮して、相当塑性ひずみ  $\varepsilon_{eq}^p$  がある値  $\varepsilon_d^p$  に達したときに損傷が生じると考えると、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\dot{D}_s &= \lambda \frac{\partial F_D}{\partial Y_s} \quad \text{if } \varepsilon_{eq}^p \geq \varepsilon_d^p \\ \dot{D}_s &= 0 \quad \text{if } \varepsilon_{eq}^p < \varepsilon_d^p \\ \dot{D}_n &= \lambda \frac{\partial F_D}{\partial Y_n} \quad \text{if } \varepsilon_{eq}^p \geq \varepsilon_d^p \\ \dot{D}_n &= 0 \quad \text{if } \varepsilon_{eq}^p < \varepsilon_d^p\end{aligned} \quad (26)$$

よって上式より、次式に示すステップ関数を  $F_D$  に導入する。

$$H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) \begin{cases} = 1 & \text{if } \varepsilon_{eq}^p \geq \varepsilon_d^p \\ = 0 & \text{if } \varepsilon_{eq}^p < \varepsilon_d^p \end{cases} \quad (27)$$

次に脆性、延性両損傷の進展を考慮すると  $F_{D_s}$ ,  $F_{D_n}$  はそれぞれ  $Y_s^2$ ,  $Y_n^2$  に比例し次式のように表せられる。

$$\begin{aligned}F_{D_s} &\sim Y_s^2 \\ F_{D_n} &\sim Y_n^2\end{aligned} \quad (28)$$

また損傷の進展に関する材料パラメータの損傷エネルギー強度  $S_s$ ,  $S_n$  を乗数として次式のように導入する。

$$\frac{1}{S_s}, \quad \frac{1}{S_n} \quad (29)$$

損傷速度  $\dot{D}_s$ ,  $\dot{D}_n$  は現在の損傷値  $D_s$ ,  $D_n$  に比例するので次式の乗数を導入する

$$\frac{1}{1-D_s}, \quad \frac{1}{1-D_n} \quad (30)$$

ここで乗数を  $D_s$ ,  $D_n$  でなく  $1/(1-D_s)$ ,  $1/(1-D_n)$  とした理由は、損傷が大きくなるに従って損傷の進展速度は大きくなることを考慮したことによる。したがって、式(27), (28), (29), (30)より散逸ポテンシャルは  $\bar{F}$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\bar{F} &= F + F_{D_s} + F_{D_n} \\ &= F + \frac{Y_s^2}{2S_s(1-D_s)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) \\ &\quad + \frac{Y_n^2}{2S_n(1-D_n)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p)\end{aligned} \quad (31)$$

ここで  $F_{D_s}$ ,  $F_{D_n}$  の項の分子の2は  $\bar{F}$  を  $Y_s^2$ ,  $Y_n^2$  で偏微分した際に、係数2が現れるのを避けるために用いられている。

#### 4.3 異方性損傷モデル

異方性損傷を考慮した Drucker-Prager の降伏関数を

導くために、静水圧成分の損傷量  $D_n$  を考慮した静水圧応力  $\bar{\sigma}_H$  と第1不変量は、次式のように定義する。

$$\bar{\sigma}_H = \frac{\sigma_H}{1-D_n}, \quad \bar{I}_1 = 3\bar{\sigma}_H = \frac{3\sigma_H}{1-D_n} \quad (32)$$

つまり、 $I_1$  と  $\bar{I}_1$  の関係は次式ようになる。

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1}{1-D_n} \quad (33)$$

また、偏差成分の損傷量  $D_s$  を考慮した偏差応力の第2不変量は、次式のように表せるものとする。

$$\bar{J}_{2D} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij}^D \bar{\sigma}_{ij}^D = \frac{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}{2(1-D_s)^2} \quad (34)$$

つまり、 $J_{2D}$  と  $\bar{J}_{2D}$  の関係は次式ようになる。

$$\bar{J}_{2D} = \frac{J_{2D}}{(1-D_s)^2} \quad (35)$$

ここで  $\bar{\cdot}$  は有効成分表示を表す。

次に、等方硬化塑性材料に対する Drucker-Prager の降伏関数は次式のように表される。

$$\begin{aligned}f &= \frac{\sqrt{3}J_{2D} - \alpha J_1 \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \left\{ \sqrt{J_{2D}} - \alpha I_1 - \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \right\} = 0\end{aligned} \quad (36)$$

$$\bar{k} = \left( \kappa + \frac{1 - \sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}} H' \int d\varepsilon_{eq}^p \right) \quad (37)$$

損傷を考慮するために応力の第1不変量  $\bar{I}_1$ , 偏差応力の第2不変量  $J_{2D}$  に有効成分  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{J}_{2D}$  を代入する。

$$f = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\bar{J}_{2D}} - \alpha \bar{I}_1 - \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \right\} = 0 \quad (38)$$

式(33), (35), (38)から3次元異方性損傷モデルの Drucker-Prager 降伏関数は次式ようになる。

$$\begin{aligned}f &= \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} \left\{ \sqrt{\frac{J_{2D}}{(1-D_s)^2}} - \alpha \frac{I_1}{1-D_n} - \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} \left\{ \frac{1}{1-D_s} \sqrt{J_{2D}} - \frac{\alpha}{1-D_n} I_1 - \bar{k}(\varepsilon_{eq}^p) \right\} \\ &= 0\end{aligned} \quad (39)$$

#### 4.4 異方性損傷弾塑性構成式

塑性ポテンシャル  $F$  が降伏関数  $f$  に等しいとする関連流れ則を適用すると式(31)より散逸ポテンシャル  $\bar{F}$  は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\bar{F} &= f + F_{D_s} + F_{D_n} \\ &= f + \frac{Y_s^2}{2S_s(1-D_s)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p)\end{aligned}$$

$$+ \frac{Y_n^2}{2S_n(1-D_n)} H(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_d^p) \quad (40)$$

異方性を考慮した場合、応力-ひずみ関係は次式のようになる。(以降、クロネッカーデルタのサフィックス  $kl, tu, pq$  については成分のみを表し、総和規約はとらないこととする.)

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(1-D_s)\varepsilon_{kl}^e(1-\delta_{kl}) + E_{ijkl}(1-D_n)\varepsilon_{kl}^e\delta_{kl} \quad (41)$$

式(13)を考慮すると式(41)は次式のようになる.

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(1-D_s)(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)(1-\delta_{kl}) - E_{ijkl}\dot{D}_s\varepsilon_{kl}^e(1-\delta_{kl}) + E_{ijkl}(1-D_n)(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)\delta_{kl} - E_{ijkl}\dot{D}_n\varepsilon_{kl}^e\delta_{kl} \quad (42)$$

式(39)で与えられる降伏関数に対して、Prager の適合性の条件から次式の関係を得る.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \bar{k}} d\bar{k} + \frac{\partial f}{\partial D_s} \dot{D}_s + \frac{\partial f}{\partial D_n} \dot{D}_n = 0 \quad (43)$$

Drucker-Prager の降伏関数の相当塑性ひずみ増分は次式のように表される.

$$d\varepsilon_{eq}^p = \frac{-\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3\alpha^2 + \frac{1}{2}}} \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (44)$$

式(37)より  $d\bar{k}$  は式(44)を考慮して次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} d\bar{k} &= \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} d\varepsilon_{eq}^p \\ &= \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} \frac{-\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3\alpha^2 + \frac{1}{2}}} \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \end{aligned} \quad (45)$$

また、式(24)の  $F_{D_s}, F_{D_n}$  は、実験により応力に依存していないことから、式(22), (24), (40)より、

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (46)$$

であるから、式(45)は次式のように表される.

$$d\bar{k} = \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} C \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \lambda \quad (47)$$

ここで、

$$C = \frac{-\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3\alpha^2 + \frac{1}{2}}} \quad (48)$$

以上より、式(42), (43), (47)より Prager の適合性の条件は次式のように表される.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_s)(d\varepsilon_{kl} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}})(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_n)(d\varepsilon_{kl} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}})\delta_{kl} \\ &- \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s} \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e(1-\delta_{kl}) - \frac{\partial f}{\partial D_s} \right\} - \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e\delta_{kl} - \frac{\partial f}{\partial D_n} \right\} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} C \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \lambda = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

上式を  $\lambda$  について解くことにより次式を得る.

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_s)d\varepsilon_{kl}(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_n)d\varepsilon_{kl}\delta_{kl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_s)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}(1-D_n)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\delta_{kl}} \quad (50)$$

ここで、

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e(1-\delta_{kl}) - \frac{\partial f}{\partial D_s} \right\} + \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e\delta_{kl} - \frac{\partial f}{\partial D_n} \right\} \\ &- \frac{\partial f}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\varepsilon_{eq}^p} C \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \end{aligned} \quad (51)$$

よって、

$$\begin{aligned} &E_{ijkl}(1-D_s)d\varepsilon_{kl}^p(1-\delta_{kl}) \\ &= \frac{E_{ijkl}(1-D_s) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_s)d\varepsilon_{tu}(1-\delta_{tu}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_n)d\varepsilon_{tu}\delta_{tu} \right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}(1-\delta_{kl})}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_s)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}(1-\delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_n)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\delta_{pq}} \\ &= \frac{E_{ijkl}(1-D_s) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_s)(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_n)\delta_{kl} \right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}(1-\delta_{kl})}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_s)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}(1-\delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_n)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\delta_{pq}} d\varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &E_{ijkl}(1-D_n)d\varepsilon_{kl}^p\delta_{kl} \\ &= \frac{E_{ijkl}(1-D_n) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_s)d\varepsilon_{tu}(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_n)d\varepsilon_{tu}\delta_{kl} \right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\delta_{kl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_s)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}(1-\delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_n)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\delta_{pq}} \\ &= \frac{E_{ijkl}(1-D_n) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_s)(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rstu}(1-D_n)\delta_{kl} \right\} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\delta_{kl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_s)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}(1-\delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq}(1-D_n)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\delta_{pq}} d\varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (53)$$

以上により、式(42), (52), (53)より 3次元異方性損傷モデルにおける等方硬化弾塑性構成式は次式のように表される.

$$d\sigma_{ij} = \{ E_{ijkl}(1-D_n)\delta_{kl} - D_{pn} + E_{ijkl}(1-D_s)(1-\delta_{kl}) - D_{ps} \} d\varepsilon_{kl} - E_{ijkl}\dot{D}_n\varepsilon_{kl}^e\delta_{kl} - E_{ijkl}\dot{D}_s\varepsilon_{kl}^e(1-\delta_{kl}) \quad (54)$$

ここで式(54)の各項は次式のように表される.

$$\begin{aligned} D_{pn} &= \frac{E_{ijtu}(1-D_n)a \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} - \delta_{tu}}{h + b} \\ D_{ps} &= \frac{E_{ijtu}(1-D_s)a \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}(1-\delta_{tu})}{h + b} \end{aligned}$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl}(1-D_s)(1-\delta_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} E_{rskl}(1-D_n)\delta_{kl}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} (1 - D_s) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} (1 - \delta_{pq}) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} (1 - D_n) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \delta_{pq}$$

$$h = \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \delta_{kl} - \frac{\partial f}{\partial D_n} \right) + \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \epsilon_{kl}^e (1 - \delta_{kl}) - \frac{\partial f}{\partial D_s} \right) - \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}} \frac{d\bar{\epsilon}}{d\epsilon_{eq}^p} C \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\alpha} \left\{ \frac{\sigma_{ij}^D}{2\sqrt{J_{2D}}(1 - D_s)} - \frac{\alpha}{1 - D_n} \delta_{ij} \right\}$$

$$\frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s} = \frac{Y_s}{S_s(1 - D_s)} H(\epsilon_{eq}^p - \epsilon_d^p)$$

$$\frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n} = \frac{Y_n}{S_n(1 - D_n)} H(\epsilon_{eq}^p - \epsilon_d^p)$$

$$\frac{\partial f}{\partial D_s} = \frac{\sqrt{3J_{2D}}}{(1 - \sqrt{3}\alpha)(1 - D_s)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial D_n} = -\frac{\sqrt{3}\alpha I_1}{(1 - \sqrt{3}\alpha)(1 - D_n)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = -1$$

$$\frac{dk}{d\epsilon_{eq}^p} = H'$$

$$\dot{D}_s = \lambda \frac{\partial F_{D_s}}{\partial Y_s}$$

$$\dot{D}_n = \lambda \frac{\partial F_{D_n}}{\partial Y_n}$$

## 5. 異方性損傷モデルを用いた解析および考察

同一の具体的問題に対し、等方性損傷モデル式(7)と提案する異方性損傷モデル式(54)を用いた斜面掘削問題の有限要素解析を実施し、両者の比較から異方性損傷が岩盤の安定性に及ぼす影響について考察を行った。

### 5.1 急勾配斜面掘削問題

解析に用いた解析モデルを図2に示す。

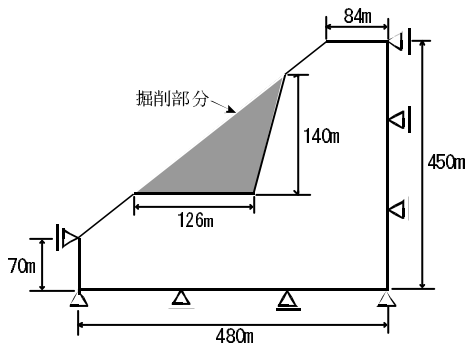


図2：解析モデル

等方性損傷モデルと異方性損傷モデルの変形図を図3、4に示す。斜面を急勾配で掘削する問題では、等方性損傷モデルと異方性損傷モデルによる解析変位は、両者とも谷側に滑り出すような変形モードを示し、われわれが実際に経験する現象と差異はない。図5～7は、最終掘削段階における各損傷量の分布の様子を示したものである。これらの図は、急勾配で掘削した場合の斜面崩壊が、掘削斜面の中途に局所に形成される損傷領域の発生を引きがねとし、その進展に伴って小規模な部分破壊を経験しつつ全体崩壊に発展するように解釈することができる。

図3：変形図 - 等方性損傷モデル

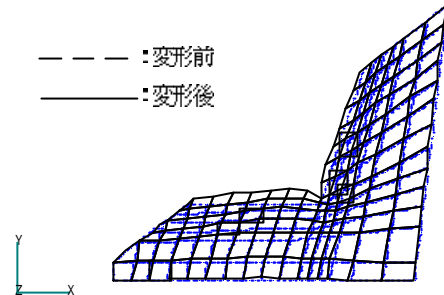


図4：変形図 - 異方性損傷モデル

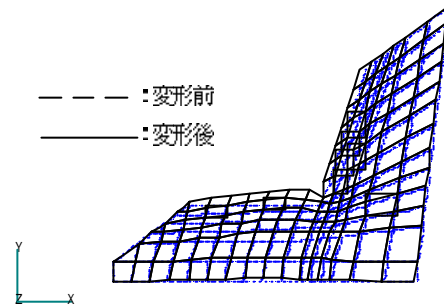


図5：等方性損傷量D分布図

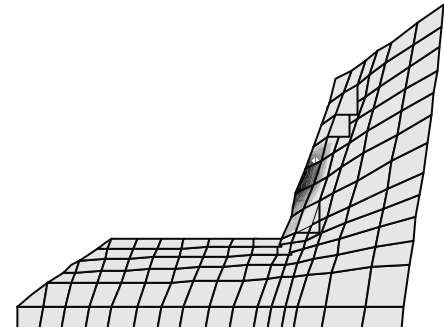
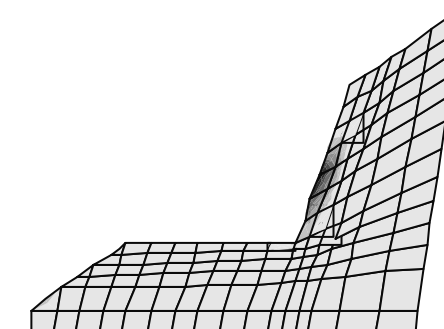


図6：異方性偏差損傷量D\_s分布図



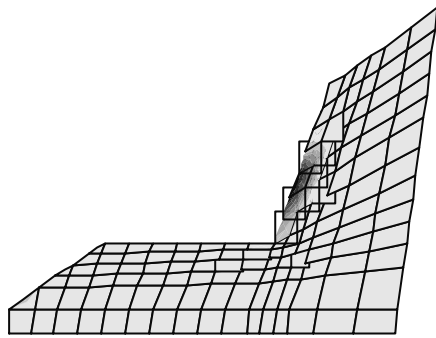


図 7：異方性静水圧損傷量  $D_n$  分布図

### 5.2 緩勾配斜面掘削問題

解析に用いた解析モデルを図 8 に示す。

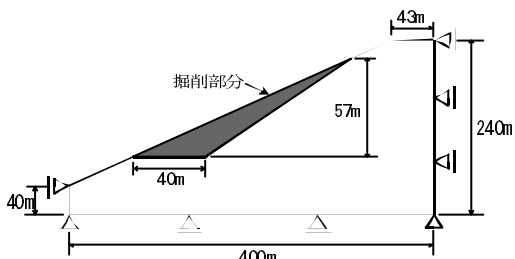


図 8：解析モデル

図 9, 10 はそれぞれ等方性損傷モデルと異方性損傷モデルによる最終掘削段階での変形図を示したものである。従来の損傷を扱わない解析による変形モードは、掘削のリバウンドにより斜面全体が地山側に変形していたが、今回の解析手法では、斜面中央部では谷側への変形を表現できていることから、このような問題点を幾分か解消できたように思われる。図 11, 12, 13 は最終段階における損傷量  $D$ ,  $D_s$ ,  $D_n$  を表したものである。異方性モデルの進展は、偏差成分による損傷  $D_s$  が掘削斜面部の滑りを支配し、静水圧成分に対する損傷  $D_n$  が斜面底盤部の破壊を支配しているようであり、斜面部の位置による応力状態の違いが破壊の進展領域を 2 分している。しかも、偏差成分による斜面の滑りは、等方性の場合と異なり法尻まで達することはなく、斜面内破壊を生じている。また、静水圧成分による破壊は、掘削斜面中央部以下にあり、底部破壊を引き起こす要因となる可能性がある。これら破壊領域の 2 分は、斜面内破壊に対してロックアンカーやロックボルト、底部破壊に対して押さえ盛土等の対策の有効性を説明しているように思われる。

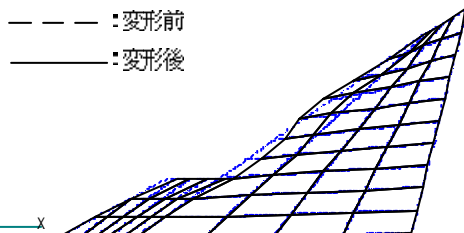


図 9：変形図 - 等方性損傷モデル

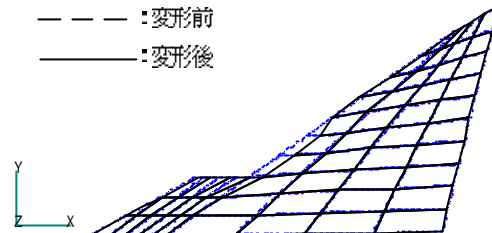


図 10：変形図 - 異方性損傷モデル

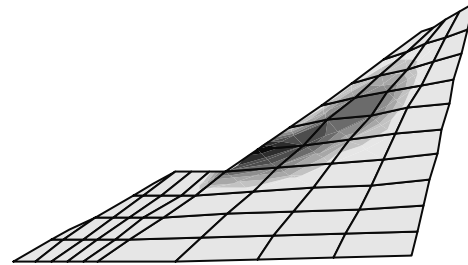


図 11：等方性損傷量  $D$  分布図

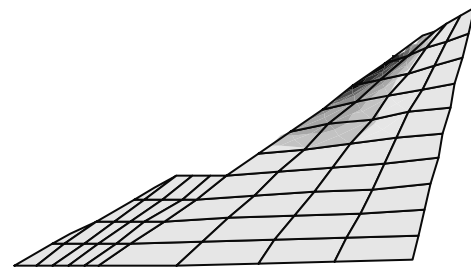


図 12：異方性偏差損傷量  $D_s$  分布図

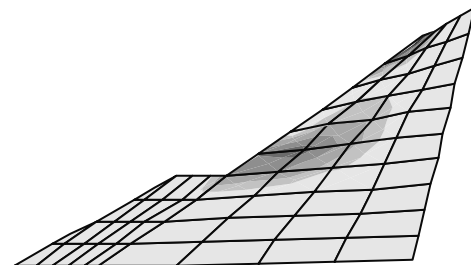


図 13：異方性静水圧損傷量  $D_n$  分布図

### 6. 結論

熱力学的考察による異方性損傷モデルの構成式を具体的に明らかにし、これを組み込んだ有限要素プログラムを開発した。さらに地盤の掘削問題を中心とした具体例を解析し、従来の等方性解析との比較をおこなった。その結果、提案する構成式が材料内に方向性をもって発生する損傷とその進展過程をある程度表現できることを示した。

### 参考文献

- [1] 白石保律、"損傷力学の熱力学的考察と岩盤の損傷進展解析に関する基礎的研究"、法政大学大学院修士論文、1997。

[2] Jean Lemaitre, "A Course on Damage Mechanics",  
Springer-Verlag Berlin, 1996.

キーワード.

損傷力学、構成方程式、異方性損傷、岩盤、連続体力学

-----

Summary.

**Anisotropic Constitutive Equation of Rock Mass based on Damage Mechanics**

Hiroataka Asai

Division of Engineering, Specialize in Construction Engineering, Hosei University

Morito Kusabuka

Computational Science Research Center, Hosei University

Norio Takeuchi

Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Hosei University

Constitutive relation of rock mass materials including small and middle discontinuous is considered from the viewpoint of damage mechanics. For isotropic damage material, the constitutive equation was developed within the framework of the thermodynamic theory. In this study, it is possible to expand the isotropic damage model to the anisotropy. In consequence, it is confirmed that anisotropic damage concept is a valid method for describing a mechanical behavior of discontinuous rock mass within the continuum mechanics.

Keywords.

Damage Mechanics, Constitutive Equation, Anisotropic Damage, Rock Mass, Continuum Mechanics