

非線形問題に対する有限体積法の応用

井上 真二郎

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

近年、構造物の形状の複雑化という背景から計算機を用いた数値解析が注目されている。現在、様々な分野で用いられている手法が有限要素法(FEM)である。そんな中で、線形のみならず非線形問題をも視野に入れた設計の必要性が高まっている。しかしながら FEM には要素境界での連続性が要求されるという制限があり、不連続な現象を扱いづらい。そこで本論文では境界積分型解法であるため不連続な現象の扱いが容易である有限体積法 (FVM) に着目し、FEM の考えを踏まえつつ FVM により材料非線形問題に関する解析を行う。

1. 緒言

本論文では、従来様々な分野の現場等で用いられることの多い有限要素法 (FEM) として本研究でその特徴に着目した有限体積法 (FVM) の特徴とその違いについて説明する。その後、離散化された状態の弾塑性問題における支配方程式を増分形式で導出し、それらを元に、有限要素の概念を踏まえつつ有限体積法の定式化を行う。次に、得られた支配方程式を元に破壊時における処理手順について記述する。そして最後には数値例を示し、有限体積法の大きな特徴である境界辺単位による解析の結果を示す。

2. 有限体積法と有限要素法の特徴と相違点

有限要素法

- ・領域積分型の解法
- ・解析には要素境界の連続性が要求される

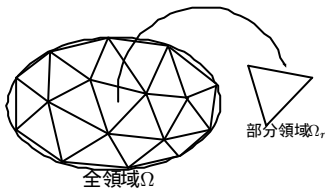


図 1：有限要素法の離散化領域（概念図）

有限体積法

- ・境界積分型解法
- ・亀裂の進展等の不連続な現象の解析が容易

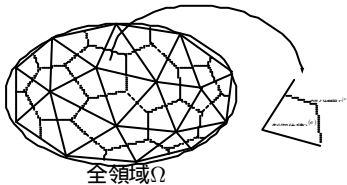


図 2：有限体積法の離散化領域（概念図）

3. 弾塑性問題の定式化

弾塑性問題の静的釣り合い方程式は、増分後の応力と物体力をそれぞれ $f_i + \Delta f_i$ 、 $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$ と置くと、次式の様に

与えられる。

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} + f_i + \Delta f_i = 0 \quad (1)$$

式 (1) に任意の重み u_i を乗じ、領域 Ω について積分すると次の重み付き残差式を得る。

$$\int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} + f_i + \Delta f_i \right] d\Omega = 0 \quad (2)$$

離散領域モデル

全領域 Ω は R 個の部分領域 $\Omega^{(r)}$ から構成される

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} : \text{但し } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(a)} = \emptyset \quad (r \neq a)$$

式 (2) は離散領域に対して次のようになる

$$\sum_{r=1}^R \left(\int_{\Omega^{(r)}} u_i \frac{\partial(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^{(r)}} u_i (f_i + \Delta f_i) d\Omega \right) = 0 \quad (3)$$

ここで式 (3) の左辺第 1 項にガウスの発散定理を適用すると、離散領域に対する弱形式が以下式のように得ることができる

$$\int_{\Omega^{(r)}} u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \oint_{\Gamma^{(r)}} u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega^{(r)}} \tilde{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega \quad (4)$$

$$\int_{\Omega^{(r)}} u_i \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \oint_{\Gamma^{(r)}} u_i \Delta \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega^{(r)}} \tilde{\varepsilon}_{ij} \Delta \sigma_{ij} d\Omega \quad (5)$$

ここで $\Gamma^{(r)}$ は領域 $\Omega^{(r)}$ の閉境界であり、 n_j はその外向き法

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (6)$$

線ベクトルである。上式の展開においては応力テンソルの対象性 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) を考慮している。

また $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ は重み関数の 1 階微分の対象成分であり次のように表される。

式 (4) 式 (5) を、式 (3) に代入することによって次式が得られる。

$$\sum_{r=1}^R \left(- \int_{\Omega^{(r)}} \tilde{\varepsilon}_{ij} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) d\Omega + \oint_{\Gamma^{(r)}} u_i (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) n_j d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} u_i (f_i + \Delta f_i) d\Omega \right) = 0 \quad (7)$$

ここでは以下の展開の関係上、応力 σ_{ij} やひずみ ε_{ij} 等の2階のテンソル量を1次元配列を用いて表すことにする。増分量についても同様に表記を行う。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

また物体力 f_i や変位 u_i 等のベクトル量も次のように1次元配列を用いて表すことができる。

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

弾塑性問題における支配方程式

弾塑性問題における支配方程式を要約して記述すると次のように表せる。

$$[\mathbf{L}]^T(\{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}) + \{f\} + \Delta\{f\} = \{0\} \quad (10)$$

$$\Delta\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\Delta\{\varepsilon\} \quad (11)$$

$$\Delta\{\varepsilon\} = [\mathbf{L}]\Delta\{u\} \quad (12)$$

この時、 $[\mathbf{L}]$ は微分作用素であり、 $[\mathbf{D}]$ は構成マトリクス(弾塑性マトリクス)である

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[D] = [E] - \frac{[E]\{\hat{n}_\psi\}\{\hat{n}_\phi\}[E]}{\{\hat{n}_\phi\}^t[E]\{\hat{n}_\psi\} - \{\hat{m}_\phi\}^t\{\hat{n}_\psi\}} \quad (14)$$

ここで $[E]$ は弾性マトリクスであり、 ψ は塑性ポテンシャル、 ϕ は降伏関数(本弾塑性構成方程式ではミーゼスの降伏関数)である。もし $\psi = \phi$ であればそれは結合流れ則であり、 $[D]$ は対称行列となる。

この時、式(8)は次式のような形で表される

$$\sum_{r=1}^R \left(- \int_{\Omega^{(r)}} \{\hat{\varepsilon}\}^T (\{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}) d\Omega + \int_{\Gamma^{(r)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T [n] (\{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}) d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T (\{f\} + \Delta\{f\}) d\Omega \right) = 0 \quad (15)$$

これらのことを踏まえ、次章では有限要素法を用いた有限体積法の定式化を行う。

4. 有限体積法の定式化

本章では有限体積法に有限要素法を用いて、通常の有限要素法アルゴリズムの範疇で有限体積法を用いる場合の一般的な定式について記したい。まず最初に全領域 Ω は M 個の有限要素 $\Omega^{(e)}$ から次によ

て構成されるものとして話を進める

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} ; \quad \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(l)} = 0 \quad (e \neq l) \quad (16)$$

有限要素 $\Omega^{(e)}$ を導入すると、個々の節点に対する制御体積と $\Gamma^{(e)}$ その境界 $\Gamma^{(e)}$ は次の様に表記可能である

$$\Omega^{(I)} = \bigcup_{e=1}^{m_e^{(I)}} \Omega_I^{(e)} ; \quad \Gamma^{(I)} = \bigcup_{e=1}^{m_e^{(I)}} \Gamma_I^{(e)} \quad (17)$$

ここで $m_e^{(I)}$ は節点 (I) に結合する要素の数、 $\Omega_I^{(e)}$ は節点 (I) の制御体積 $\Omega^{(I)}$ に対する要素 (e) の占める部分領域、 $\Gamma_I^{(e)}$ は節点 (I) の制御体積の閉境界面 $\Omega^{(I)}$ に対する要素 (e) の占める部分境界である。また $\Omega^{(I)}$ 上の重み関数として節点 (I) の値で代表される一定関数を考える(図2)重み関数は制御体積内で一定であり、その他ではゼロとなる。

これらを考慮入ると、最終的には有限要素法を用いた有限体積法の弱形式は次式のようにになる

$$\sum_{I=1}^N \left[\sum_{e=1}^{m_e^{(I)}} \left(\int_{\Gamma_I^{(e)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T [n] (\{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}) d\Gamma + \int_{\Omega_I^{(e)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T (\{f\} + \Delta\{f\}) d\Omega \right) \right] = 0 \quad (18)$$

式(18)は各々の節点に着目し、その節点に結合する有限要素の部分領域を評価し組み合わせている。この手順は各々の有限要素法について、その結合する接点に関する評価を行い、それを組み合わせることと同義であり、次式の様に表示できる

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_n^{(e)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T [n] (\{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}) d\Gamma + \int_{\Omega_n^{(e)}} \{\hat{\mathbf{u}}\}^T (\{f\} + \Delta\{f\}) d\Omega \right) \right] = 0 \quad (19)$$

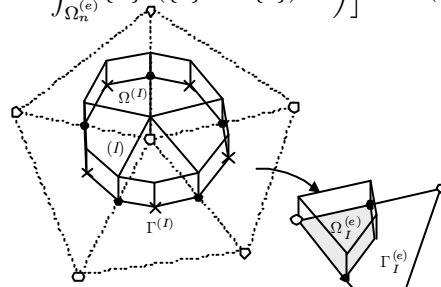


図3：制御体積 $\Omega^{(I)}$ 及び境界 $\Gamma^{(I)}$

図3に示すように、 n_e は要素 (e) を構成する要素節点の数であり、 $\Omega_n^{(e)}$ は要素 (e) の n 番目の要素節点に対する制御体積であり、 $\Gamma_n^{(e)}$ は要素 (e) の n 番目の要素節点に対する制御体積の境界部分である。領域 $\Omega_n^{(e)}$ 及び境界部分 $\Gamma_n^{(e)}$ では n 番目の要素節点重み関数を用いるため次式のように表記できる。

$$\{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\hat{\mathbf{u}}_n^{(e)}\} \quad (20)$$

一方、境界 $\Gamma_n^{(e)}$ 上の変位増分は要素 (e) を構成する要素節点の変位増分より補間することができるため、式

のように表せる。

$$\Delta\{u\} = [N_n]\Delta\{u^{(e)}\} \quad (21)$$

ここで、 $\{u^{(e)}\}$ は要素を構成する全ての節点における変位増分を並べた一次元配列である。上式より境界 $\Gamma_n^{(e)}$ 上のひずみは次のように表される。

$$\Delta\{\varepsilon\} = [B_n]\Delta\{u^{(e)}\} \quad (22)$$

構成方程式である式 (11) より応力増分 $\{\sigma\}$ は次のように表される。

$$\Delta\{\sigma\} = [D][B_n]\Delta\{u^{(e)}\} \quad (23)$$

式 (20) 及び式 (23) を式 (19) に代入することによって次式のような形を得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \{\dot{u}_n^{(e)}\}^T \left(\oint_{\Gamma_n^{(e)}} [n] \{\sigma\} d\Gamma + \int_{\Omega_n^{(e)}} \{f\} d\Omega + \oint_{\Gamma_n^{(e)}} [n] [D] [B_n] d\Gamma \Delta\{u^{(e)}\} + \int_{\Omega_n^{(e)}} \Delta\{f\} d\Omega \right) \right] = 0 \quad (24)$$

式 (24) を簡略化して表現すると

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \{\dot{u}_n^{(e)}\}^T \left(-[k_n^{(e)}] \Delta\{u^{(e)}\} + \Delta\{p_n^{(e)}\} + \{q_n^{(e)}\} \right) \right] = 0 \quad (25)$$

のような形になる。

この時、各項は以下に示すとおりである。

$$[k_n^{(e)}] = - \oint_{\Gamma_n^{(e)}} [n] [D] [B_n] d\Gamma \quad (26)$$

$$\Delta\{p_n^{(e)}\} = \int_{\Omega_n^{(e)}} \Delta\{f\} d\Omega \quad (27)$$

$$\{q_n^{(e)}\} = \oint_{\Gamma_n^{(e)}} [n] \{\sigma\} d\Gamma + \int_{\Omega_n^{(e)}} \{f\} d\Omega \quad (28)$$

次に要素の (e) の n 番目の要素節点の重み $\{\dot{u}_n^{(e)}\}$ は、式 (20) に示した。要素節点変位増分 $\{u^{(e)}\}$ と同様な配置に要素節点の重みを全て並べた一次元配列 $\{\dot{u}^{(e)}\}$ から対応するものを抽出すれば、以下のように表すことが可能となる

$$\{\dot{u}_n^{(e)}\} = [I_n] \{\dot{u}^{(e)}\} \quad (29)$$

この式 (29) を式 (25) に代入すると以下の形が得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\{\dot{u}^{(e)}\}^T \sum_{n=1}^{n_e} \left(-[I_n]^T [k_n^{(e)}] \Delta\{u^{(e)}\} + [I_n]^T \Delta\{p_n^{(e)}\} + [I_n]^T \{q_n^{(e)}\} \right) \right] = 0 \quad (30)$$

この式 (30) を式 (25) と同様に簡略化すると

$$\sum_{e=1}^M \{\dot{u}^{(e)}\}^T \left(-[k_T^{(e)}] \Delta\{u^{(e)}\} + \Delta\{p^{(e)}\} + \{q^{(e)}\} \right) = 0 \quad (31)$$

の様な形式を得る。

この時、各項は以下に示すとおりである。

$$[k_T^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_e} \left([I_n]^T [k_n^{(e)}] \right) \quad (32)$$

$$\Delta\{p^{(e)}\} = \sum_{n=1}^{n_e} \left([I_n]^T \Delta\{p_n^{(e)}\} \right) \quad (33)$$

$$\{q^{(e)}\} = \sum_{n=1}^{n_e} \left([I_n]^T \{q_n^{(e)}\} \right) \quad (34)$$

この時、式 (32) は節点剛性マトリクスであり、式 (33) (34) は節点荷重ベクトルである。

また、これらは式 (26) 式 (27) 式 (28) から分かるように、各々の要素節点 n に対応する制御体積 $\Omega_n^{(e)}$ 及びその境界部分である $\Gamma_n^{(e)}$ について積分することによって得られる。

要素節点の変位増分 $\{u^{(e)}\}$ 及び重み $\{\dot{u}^{(e)}\}$ を全体節点における値 $\{\hat{u}\}$ を用いて次のように表される。

$$\Delta\{u^{(e)}\} = [A^{(e)}] \Delta\{\hat{U}\}; \quad \{\dot{u}^{(e)}\} = [A^{(e)}] \{\hat{U}\} \quad (35)$$

この式 (35) を式 (30) に代入することによって次式が得られる。

$$\{\hat{U}\}^T \left[- \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T [k_T^{(e)}] [A^{(e)}] \right) \Delta\{\hat{U}\} + \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T \Delta\{p^{(e)}\} \right) + \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T \{q^{(e)}\} \right) \right] = 0 \quad (36)$$

この式 (36) の各項を以下のようにまとめると

$$[\hat{K}_T] = \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T [k_T^{(e)}] [A^{(e)}] \right) \quad (37)$$

$$\Delta\{\hat{P}\} = \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T \Delta\{p^{(e)}\} \right) \quad (38)$$

$$\{\mathbf{R}\} = - \sum_{e=1}^M \left([A^{(e)}]^T \{q^{(e)}\} \right) \quad (39)$$

最終的に、全体領域 Ω に対する支配方程式

$$[\hat{K}_T] \Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{\hat{P}\} + \{\mathbf{R}\} \quad (40)$$

が得られる。

この時 $[\hat{K}_T]$ は全体剛性マトリクスであり $\Delta\{\hat{U}\}$ は全体節点荷重ベクトルである。これらは、式 (37) 式 (38) 式 (39) から分かるように、各要素ごとの節点剛性マトリクス及び節点変位ベクトル (以後「寄与」と呼称) を組み合わせることによって形成される。

これらのことを踏まえ、次章では破壊を行う場合、どのようにして全体剛性マトリクスを組み立てていくか、その手法について論じたい

5. 破壊処理手順

本論文では、破壊を行う過程で、前節で求められた全体剛性マトリクスを実際にどのような手順で組み立ててゆくか、その手順について述べたい

まず、平面応力問題に対する VonMises の降伏条件を示す。この降伏条件は多くの金属材料にもちいられている

条件であり、前節で記述した一般化された構成方程式（弾塑性方程式）[E]はこの条件を前提に組み立てられたものである。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_Y \quad (41)$$

この時、 $\bar{\sigma}$ は相当応力であり、 σ_Y は降伏応力である。

続いて、この降伏条件を元に、要素剛性マトリクス（以下「寄与」）から全体剛性マトリクスを組み立てる手順について図で示す。

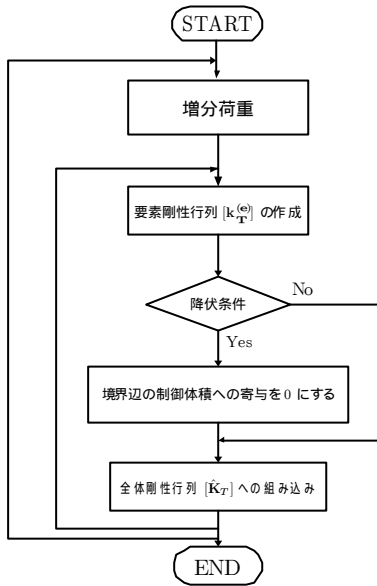


図4：全体剛性行列組み立て手順

有限体積法では前節の式(26)に示したように、制御体積の境界辺における表面力の制御節点に対する「寄与」を境界積分を用いることによって計算している。

そこで、もし境界辺における表面力が先ほど示した降伏条件の降伏曲面を越えた場合は、その境界は降伏力の伝達が行われなくなるものとみなし、破壊を導入する。従って、破壊された境界辺からは制御体積に対する寄与は存在しないものとして（現実問題として完全にゼロになることはありえないが、本研究では近似的にゼロであるとみなして解析を行うものとする）全体剛性行列を組み立ててゆく

6. 解析例

本節では、これまでの手順を踏まえて、有限体積法を用いて解析された、数値例を示す。

図5のような切り欠き付きの場合、塑性域が右上に伸びて行くことが長年の間、実験的もしくは解析的にも知られている。この時、 σ_Y は降伏応力、Eは弾性係数、である。

図6を見れば分かるように、降伏曲面を超えた後、要素そのものが降伏する有限要素法に対し、有限体積法を用いることによって境界辺単位で降伏するため、境界辺単位の塑性域の広がりが表現されているのが見てとれる。

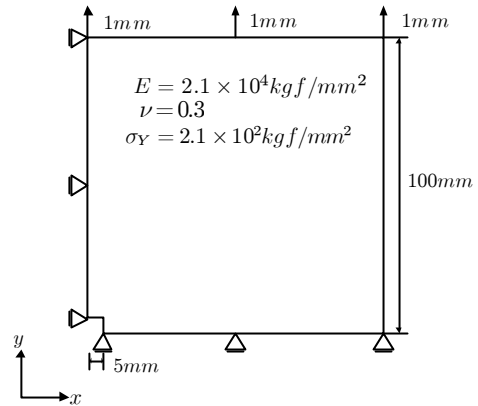


図5：金属平板（切り欠き付き）

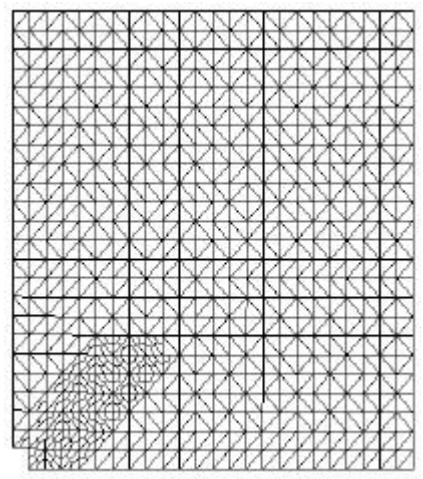


図6：破壊例（境界辺単位の塑性域の広がり）

7. 結言

本研究では、従来用いられることの多い有限要素法に、有限体積法を導入することによって、有限要素法の弱点である、要素境界での連続性が要求されるという制限に対する解決法を提示できたのではないと思う。

また従来の有限要素法を踏襲しつつ有限体積法の定式化を行ったため、容易に計算を行うことができる。

今後考えられ得る展開は、本アルゴリズムを用いて、より現場に即した精密な解析を行うこと、そして2次元にとどまらず、3次元での解析手法の確立なども考えられる。

参考文献

- [1]日本塑性加工学会編,“非線形有限要素法”,(株)コロナ社
- [2]三好俊郎,白鳥正樹,座古勝,坂田信二,“有限要素法(構造要素の変形・破壊挙動の解析)”(株)実教出版
- [3]新津貴男,武田洋,“有限体積法による進行型破壊現象の解析”法政大学計算科学センター研究報告,12,(1999)

キーワード.

有限体積法、有限要素法、制御体積、制御表面、弾塑性問題、

Summary.

Application of Finite Volume Method for Nonlinear Problem

Shinjiro Inoue

Division Of Engineering, Specialize In System Engineering, Hosei University Graduate School

Hiroshi Takeda

Faculty Of Engineering, Department Of System Control Engineering, Hosei University

In this paper, analysis the development of the fracture are considered on the surface rather than the volume element. To establish the natural computational method of the fracture development phenomena, finite volume based surface integration formulation is proposed rather than finite element volume integration formulation. Proposed formulation will be converted to the standard finite element algorithm for the practical implementation.

Keywords.

Finite Volume Method, Finite Element Method, Control Volume, Control Surface, Elastic-Plastic,