

三次元固体力学問題への有限体積法の応用

小川 智也

法政大学大学院工学研究科システム工学専攻

武田 洋

法政大学工学部システム制御工学科

有限体積法(FVM)は非ガラーキン重みを用いた有限要素法(FEM)の特別な場合と考えられている。本論文では、有限体積法による三次元固体力学問題の解析を論じる。有限体積法を定式化するために、補間関数として一次の四面体要素を用いている。また、三次元のデラウニー分割法による自動要素分割システムを提案する。この手法を用いることにより、節点と要素間の要素コネクティビティなしのモデルの解析を行うことが可能である。

1. はじめに

近年のコンピュータおよび解析技術の進歩によって、従来は実験でしか求められなかった物理現象の解明に計算機上の数値解析手法が利用されるようになってきている。その応用分野は構造解析、流体解析など幅広い分野にわたり、また解析対象も二次元などの平面問題から三次元空間の大規模問題を対象とするものへと発展してきている。

また解析対象の大規模化に伴い、プレプロセス部分の負担の低減を目的として、自動要素分割システムや、入力情報としてメッシュを必要としないメッシュレス法などの研究が精力的に行われている。本研究では、有限体積法を三次元固体力学問題へ適用することを目的とし、三次元デラウニー分割手法を用い、解析対象を分割し、入力情報としてメッシュのコネクティビティを必要としない解析を行う。

2. 支配方程式と離散領域

弾性問題の支配方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (3)$$

式(1)に任意の重み u_i^* を乗じて領域 Ω について積分すると次式が得られる。

$$\sum_{r=1}^R \left(\int_{\Omega^{(r)}} u_i^* \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^{(r)}} u_i^* f_i d\Omega \right) = 0 \quad (4)$$

ここでは全領域 Ω は R 個の部分領域 $\Omega^{(r)}$ から次式によって構成されるものとする。

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} : \text{但し } \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = \phi \quad (r \neq q) \quad (5)$$

弱形式(4)は離散体積モデルでは次のように表せる。

$$\sum_{r=1}^R \left(\int_{\Omega^{(r)}} u_i^* \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^{(r)}} u_i^* f_i d\Omega \right) = 0 \quad (6)$$

ここで式(6)の左辺第一項にガウスの発散定理を適用すると、離散領域に対する弱形式は以下の式ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(r)}} u_i^* \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega^{(r)}} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^* \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega^{(r)}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma^{(r)}} u_i^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega^{(r)}} \varepsilon_{ij}^* \sigma_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

また $\Gamma^{(r)}$ は領域 $\Omega^{(r)}$ の閉境界であり、上式の展開においては $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ を考慮した。なお ε_{ij}^* は次に示す通りである。

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

式(7)を式(6)に代入することによって次式が得られる。

$$\sum_{r=1}^R \left(- \int_{\Omega^{(r)}} \varepsilon_{ij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \oint_{\Gamma^{(r)}} u_i^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} u_i^* f_i d\Omega \right) = 0 \quad (9)$$

ここでは以下の展開のために、応力 σ_{ij} やひずみ ε_{ij} 等の二階のテンソル量を一次元配列を用いて表すことにし、また物体量 f_i や変位 u_i 等のベクトル量も同様に一次元配列を用いて表すことにする。上式の記法を用いると支配方程式は次のように表される。

$$[\mathbf{L}]^T \{\sigma\} + \{\mathbf{f}\} = \{0\} \quad (10)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}] \{\varepsilon\} \quad (11)$$

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{L}] \{\mathbf{u}\} \quad (12)$$

ここで、 $[\mathbf{L}]$ は微分作用素、 $[\mathbf{E}]$ は構成マトリックスである。同様に式(9)は次のように表される。

$$\sum_{r=1}^R \left(- \int_{\Omega^{(r)}} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega + \int_{\Gamma^{(r)}} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{n}] \{\sigma\} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{f}\} d\Omega \right) = 0 \quad (13)$$

3. 三次元有限体積法

ここでは有限体積法に有限要素の概念を導入し、三次元問題を取り扱うための一般的な定式化について論じる。ここでは全領域 Ω は M 個の有限要素 $\Omega^{(e)}$ から次式によって構成されるものとする。

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} : \text{ただし } \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(l)} = 0 \quad (e \neq l) \quad (14)$$

有限要素 $\Omega^{(e)}$ を導入すると個々の節点に対する制御体積 $\Omega^{(I)}$ とその境界 $\Gamma^{(I)}$ は次のように表せる(図1)。

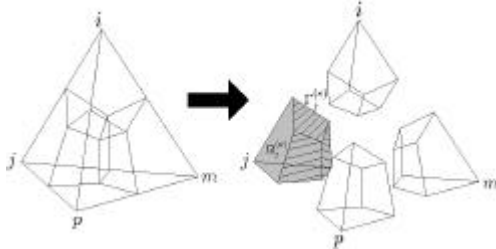


図1. 要素 (e) での点 j に関する領域 $\Omega_j^{(e)}$ と境界 $\Gamma_j^{(e)}$

$$\Omega^{(I)} = \bigcup_{e=1}^{m_e^{(I)}} \Omega_I^{(e)} \quad ; \quad \Gamma^{(I)} = \bigcup_{e=1}^{m_e^{(I)}} \Gamma_I^{(e)} \quad (15)$$

ここで $m_e^{(I)}$ は節点 (I) に結合する要素の数、 $\Omega_I^{(e)}$ は節点 (I) の制御体積 $\Omega^{(I)}$ に対する要素 (e) の占める部分領域、 $\Gamma_I^{(e)}$ は節点 (I) の制御体積の閉境界面 $\Gamma^{(I)}$ に対する要素 (e) の占める部分境界である。

以上を考慮すると式(13)に示す有限体積法に対する弱形式は次のように表すことができる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \left(\int_{\Gamma_n^{(e)}} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{n}] \{\sigma\} d\Gamma + \int_{\Omega_n^{(e)}} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{f}\} d\Omega \right) \right] = 0 \quad (16)$$

ここで n_e は要素 (e) を構成する要素節点数、 $\Omega_n^{(e)}$ は要素 (e) の n 番目の要素節点に対する制御体積、 $\Gamma_n^{(e)}$ は要素 (e) の n 番目の要素節点に対する制御体積の境界部分である。領域 $\Omega_n^{(e)}$ および境界 $\Gamma_n^{(e)}$ では n 番目の要素節点の重みが用いられ $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ を $\{\dot{\mathbf{u}}_n^{(e)}\}$ とし、境界 $\Gamma_n^{(e)}$ 上での変位は要素 (e) を構成する要素節点変位より補間でき、 $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ は要素を構成する全ての節点における変位を並べた一次元配列とする。これらをまとめると、境界 $\Gamma_n^{(e)}$ 上のひずみ、応力 $\{\sigma\}$ は、

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}_n] = [\mathbf{B}_n]\{\mathbf{u}^{(e)}\} \quad (17)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}][\mathbf{B}_n]\{\mathbf{u}^{(e)}\} \quad (18)$$

今までの事柄を考慮すると次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \{\dot{\mathbf{u}}_n^{(e)}\}^T \left(\int_{\Gamma_n^{(e)}} [\mathbf{n}][\mathbf{E}][\mathbf{B}_n] d\Gamma \{\mathbf{u}^{(e)}\} + \int_{\Omega_n^{(e)}} \{\mathbf{f}\} d\Omega \right) \right] = 0 \quad (19)$$

ここで、

$$[\mathbf{k}_n^{(e)}] = - \int_{\Gamma_n^{(e)}} [\mathbf{n}][\mathbf{E}][\mathbf{B}_n] d\Gamma \quad (20)$$

$$\{\mathbf{p}_n^{(e)}\} = \int_{\Omega_n^{(e)}} \{\mathbf{f}\} d\Omega \quad (21)$$

と置くことによって式(19)は次のようになる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\sum_{n=1}^{n_e} \{\dot{\mathbf{u}}_n^{(e)}\}^T (-[\mathbf{k}_n^{(e)}]\{\mathbf{u}^{(e)}\} + \{\mathbf{p}_n^{(e)}\}) \right] = 0 \quad (22)$$

次に要素 (e) の n 番目の要素節点の重み $\{\dot{\mathbf{u}}_n^{(e)}\}$ は、要素節点変位 $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ と同様な配置で要素節点の重みをすべて並べた一次元配列 $\{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}\}$ から対応するものを選び出せば良いことに着目すると次のように表すことができる。

$$\{\dot{\mathbf{u}}_n^{(e)}\} = [\mathbf{I}_n]\{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}\} \quad (23)$$

式(23)を式(22)に代入することにより次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^M \left[\{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \sum_{n=1}^{n_e} (-[\mathbf{I}_n]^T [\mathbf{k}_n^{(e)}]\{\mathbf{u}^{(e)}\} + [\mathbf{I}_n]^T \{\mathbf{p}_n^{(e)}\}) \right] = 0 \quad (24)$$

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_e} \left([\mathbf{I}_n]^T [\mathbf{k}_n^{(e)}] \right) \quad (25)$$

$$\{\mathbf{p}^{(e)}\} = \sum_{n=1}^{n_e} \left([\mathbf{I}_n]^T \{\mathbf{p}_n^{(e)}\} \right) \quad (26)$$

と置くことにより式(24)は次のようになる。

$$\sum_{e=1}^M \{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}\}^T \left(-[\mathbf{K}^{(e)}]\{\mathbf{u}^{(e)}\} + \{\mathbf{p}^{(e)}\} \right) = 0 \quad (27)$$

要素節点の変位 $\{\mathbf{u}^{(e)}\}$ と重み $\{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}\}$ を全体節点における値 $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ および $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ を用いて表し、それらを式(27)に代入することによって次式が得られる。

$$\{\hat{\mathbf{U}}\}^T \left[- \sum_{e=1}^M ([\mathcal{A}^{(e)}][\mathbf{k}^{(e)}][\mathcal{A}^{(e)}]) \{\hat{\mathbf{U}}\} + \sum_{e=1}^M ([\mathcal{A}^{(e)}]^T \{\mathbf{p}^{(e)}\}) \right] = 0 \quad (28)$$

上式より次の支配方程式が得られる。

$$[\hat{\mathbf{K}}]\{\hat{\mathbf{U}}\} = \{\hat{\mathbf{P}}\} \quad (29)$$

ただし

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \sum_{e=1}^M \left([\mathcal{A}^{(e)}][\mathbf{k}^{(e)}][\mathcal{A}^{(e)}] \right) \quad (30)$$

$$\{\hat{\mathbf{P}}\} = \sum_{e=1}^M \left([\mathcal{A}^{(e)}]^T \{\mathbf{p}^{(e)}\} \right) \quad (31)$$

以上の展開により三次元有限体積法の支配方程式は離散化された連立一次方程式(29)に帰着し、左辺係数行列(全体剛性マトリックス) $[K]$ は式(30)より各要素毎にその寄与 $k^{(e)}$ を組み合わせることによって構築される。同様に右辺既知ベクトル(節点荷重ベクトル) $\{P\}$ も式(31)より各要素毎の寄与 $\{p^{(e)}\}$ を組み合わせることによって構築される。また各要素に対する寄与は式(25),(26)によって示す様に各々の要素節点 n に対する制御体積 $\Omega_n^{(e)}$ およびその境界 $\Gamma_n^{(e)}$ について積分を加えあわせることによって得られる。

4. 自動要素分割システム

自動要素分割システムは、解析の入力情報として節点データのみを必要とするため CAD などのデータの利用が容易であり、設計現場においてモデル作成から解析、シミュレーションまでをシームレスに行えるという利点がある。本研究では、節点データをもとにデラウニー分割法を用い、解析対象での四面体分割を行う。

4.1. デラウニー分割法

デラウニー分割法は、領域内に分布する初期の点集合が与えられた場合にそれらを結んで三角形要素または四面体要素を生成する方法である。この分割は、与えられた点の勢力範囲で領域を分割したポロノイ分割と等価であり、この方法の最大の利点は、その概念と実現法の簡単さにある。

4.2. デラウニー分割アルゴリズム

図2は、デラウニー分割法の基本である Watson のアルゴリズムを示している。

- (i) 図2(a)のように三角形分割が行われていた場合、新たに点 P を挿入する[図2(b)]。
- (ii) 既存の三角形の中で、その外接円が点 P を含むものをすべて消去する[図2(c)]。
- (iii) 生じた多角形の頂点と点 P を結び[図2(d)]。
- (iv) この点挿入過程を与えられたすべての点について行い三角形メッシュ生成が完了する。

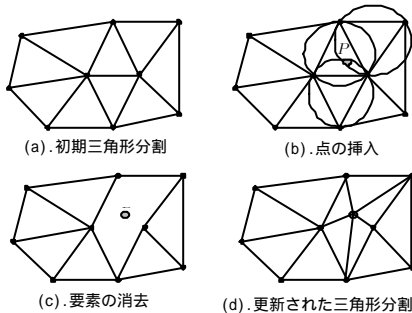


図2. Watson のアルゴリズム

図3に Watson のアルゴリズムを用いて具体的にメッシュを生成する手順を示す。まず、対象となる領域全体を大三角形で囲み初期のデラウニー三角形とする。次に Watson のアルゴリズムを用い点を1点ずつ挿入することにより三角形分割を行う。最後に、対象とする領域境界

の内部にある三角形のみを取り出せばメッシュ生成が完了する。三次元ソリッド要素生成の場合は、四面体とその外接球を用いて同様なアルゴリズムが適用できる。

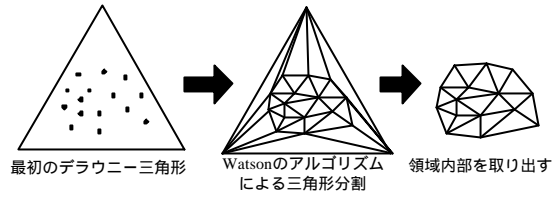


図3. デラウニー分割法によるメッシュ生成

ただしこのアルゴリズムだけでは、二次元の場合、同一の外接円上に四つ以上の点(三次元の場合は同一外接球上に五つ以上の点)が存在する場合は退化(Degeneracy)と呼ばれ、数値誤差によって正しいメッシュが生成できない場合がある。

また、三次元の場合には Sliver 要素と呼ばれる形の偏平な要素が生成されてしまう。

この問題を解決するためには点の位置をあらかじめ動かし、点の挿入順序の変更、体積を計算し0の要素は消去するなどのアルゴリズムの改良を行う必要がある。さらに、非凸形状を持つ領域に適用した場合に境界形状と生成されたメッシュとの整合を取ることが困難であるために、不整合が生じる場合がある。

なお、領域内部に点集合を発生させる手法としては乱数を用いる方法や、格子を用いる方法、節点間力を定義しそれらが釣合うように節点を分布させる方法などがある。以下に1辺の長さが3で64個の節点を立方格子上に配置した時の計算機で計算したデラウニー図の例と、その時の全体体積と四面体の合計体積を示す。

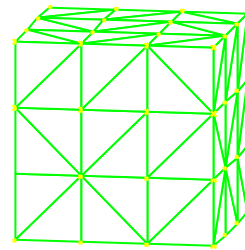


図4. 立方格子に配置した節点に対するデラウニー図

立方体全体の体積	27.00000
全デラウニー四面体の合計体積	27.00000

表1. 全体の体積と四面体の合計体積

以上の図や生成された四面体の合計体積からも、問題なく四面体分割が行われていることがわかる。

5. 数値解析

ここでは、今回提案した三次元有限体積法と三次元デラウニー分割を行った要素を用いた解析結果を有限要素法と比較検討するために数値解析を行った。

(1) 棒の引っ張り

ここでは、棒の引っ張りについて解析を行った。モデルおよび境界条件を図5に示す。デラウニー分割を行うために用いる節点パターンとしては等間隔に節点を配置したものをを用いた(節点数=135)。

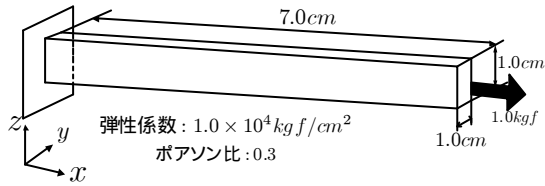


図5 . 解析モデル No. 1

解析結果の比較検討 (No.1)

ここではデラウニー分割法を用いた有限体積法の結果と、手作業で入力したメッシュ(節点数=135,要素数=336)での有限要素法、有限体積法の先端部分での x 方向の変位の比較を行った。その解析結果を表2に示す。

有限要素法	6.437×10^{-4}
有限体積法	6.437×10^{-4}
デラウニー有限体積法	7.000×10^{-4}
厳密解	7.000×10^{-4} (cm)

表2 . 先端部分での x 方向の変位の比較

結果としては、手作業で入力したメッシュで解析を行った有限要素法と有限体積法の結果が同じになっているが、これは剛性マトリックスが等しくなっているためである。またデラウニー有限体積法との結果が異なっているのは、メッシュの切れ方による違いで、このモデルに対してはデラウニー分割法を用いた場合のほうがうまくメッシュが切れていることがわかる。

(2) ハンドルの引っ張り

次にハンドルの引っ張りについての解析を行った。モデルおよび境界条件を図6に示す。また有限体積法による解析結果を図7に示す。ここでのメッシュは節点数111,要素数240となっている。

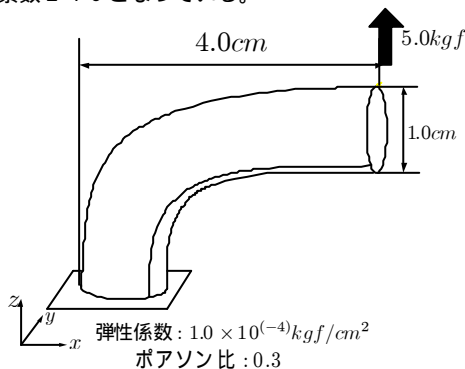


図6 . 解析モデル No.2

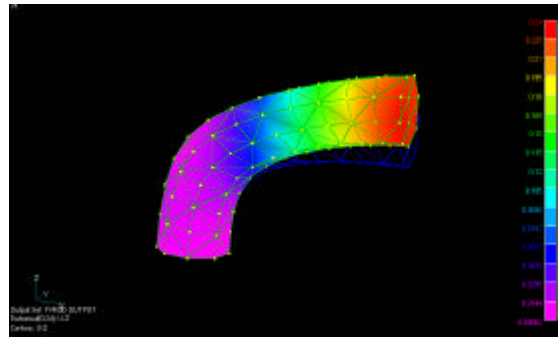


図7 . 有限体積法による解析結果 (z 方向の変位)

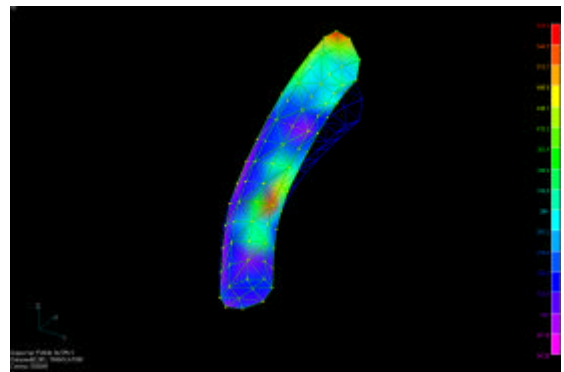


図8 . 有限体積法による解析結果(応力)

解析結果の比較検討 (No.2)

解析を行った右端部分での z 方向の変位の比較を表3に示す。

有限要素法	0.240494
有限体積法	0.240494 (cm)

表3 . 右端での z 方向の変位の比較

6. あとがき

本論文では、有限体積法を三次元固体力学問題へ応用することを目的とし、従来の有限体積法を三次元問題へ拡張する定式化を行った。その結果、従来の有限要素法概念を応用することにより、有限体積法を三次元固体力学問題へ適用することができると考えられる。また、今回のデラウニー分割法を拡張しメッシュレス解析などを行うことにより節点毎に処理し計算の高速化を行うことが可能であると考えられる。

参考文献

- [1]武田、竹内、佐藤、'有限体積法の固体力学への応用'、計算工学講演会論文集,2,(1997)
- [2]稲垣、杉原、杉江、'3次元ボロノイ図構成のための数的に安定な逐次添加法'、情報処理学会論文誌 Vol.35,No.1,pp1-10,Jan,1994
- [3]稲垣、杉原、'3次元ドロネー図の構築における退化に起因する問題点とその対策'、電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J79-D-II No.10 pp1696-1703, 1996年10月

キーワード.

三次元、有限体積法、固体力学、デラウニー図

Summary.

**Application Of Three Dimensional
Solid Mechanics Problem To Finite Volume Method**

Tomoya Ogawa

Division Of Engineering, Specialize In System Engineering, Hosei University Graduate School

Hiroshi Takeda

Faculty Of Engineering, Department Of Systems Control Engineering, Hosei University

Finite Volume Method (FVM) can be considered to be a particular case of Finite Element Method(FEM) with a non-Galerkin weighting. In this paper, we discuss the analysis of three-dimensional solid mechanics problem by the FVM. To formularize FVM, we use tetrahedron element as interpolation function. And we suggest automatic element division system by Delauny diagram using tetrahedron. According to this technique, we can analyze analysis model without element connectivity between nodes and elements.

Keywords.

Three-Dimensional, Finite Volume Method, Solid Mechanics, Delauny diagram