

# 最大直方体探索アルゴリズムによるモンテカルロ計算の高速化

菅沼 龍一 尾川 浩一  
法政大学大学院工学研究科電気工学専攻

モンテカルロ法を用いた光子輸送シミュレーションは SPECT や PET における散乱線除去や 吸収補正の方法を検討する上で欠かせない技術である。われわれは voxel-based (VB) 法による光子輸送シミュレーションの高速化を目的として最大直方体 (maximum rectangular regions: MRRs) で物体を記述する方法を開発し、計算時間を従来の物体記述法に比べて大幅に短縮することができた。本論文では MRR の 3 次元への拡張について詳細を述べ、3 種類のファントムに対する光子輸送シミュレーションを行ない、octree を用いた高速化法と比較して MRR の有効性を検討する。

## 1. はじめに

モンテカルロ法は SPECT や PET における画質劣化の原因である光子の散乱や吸収を補正するための方法を開発する上で重要な技術である [1]-[7]。このモンテカルロ法を用いた光子輸送シミュレーションにおいて、光子行路が複数の媒質にまたがる場合、光子が通過するそれぞれの媒質の吸収係数を考慮して行路長を決定するため、光子が境界を通過する度にその交点座標を計算しなければならない。したがって、境界が多いほど計算回数も多くなり、効率よく光子輸送を行なうためには物体の境界の記述法が非常に重要となる。

このような物体の記述法として voxel-based (VB) 法がよく用いられている。VB 法は一樣な媒質で同じ大きさの voxel の集合体として物体を表現するので複雑な形状も表現することができる。しかし、より正確に物体を表現するためにはより小さな voxel で記述しなければならないので多量のメモリを必要とし、さらに光子行路が通過する境界との交点や通過距離を計算する回数が増えるため計算時間が長くなるという欠点を持っている。この解決策として、我々は octree 表現による物体記述法を提案した [8]。octree は物体を 8 つの立方体領域へと分割する操作を、各領域がある同一の値を持つようになるまで繰り返し分割してゆき、物体を記述する方法である [9]。この方法を用いれば物体を VB 表現した場合よりも少ない領域数で表現できるので、領域境界までの距離の計算回数を低減でき、高速なシミュレーションが可能となる。しかし octree 表現はその性質上、物体を分割したときのそれぞれの領域形状が立方体に限定されているために必ずしも大きな領域が確保できない場合がある。例えば、内部が一樣で大きな領域があったとしても、この領域が立方体でなければ小さな立方体を使った複数の領域として記述されてしまい、領域数が増加してしまう。この octree の欠点を解決するために、最大直方体 (MRR) を用いた物体記述法を開発した [10]。MRR 表現は octree 表現のように物体を規則的に分割する方法とは違い、物体を記述する voxel の 1 つ 1 つにその voxel を含んで、かつ同一の媒質で満たされる最大直方体の 6 平面の情報を持たせるといった手法である。この表現法を用いれば各 voxel を含む一樣領域の体積は octree 表現時よりも格段に大きくすることができるため、光子行路が領域境界を通過する回数が減り、より高速なシミュレーションが可能となる。

図 1 はこれらの物体記述法を 2 次元的に示したものであり、1 つの voxel を含む一樣領域の体積を比較すると MRR 表現時が最も大きくなるのがわかる。本論文では、文献 [10] において z 軸方向に一樣と仮定していた物体形状を、より一般的な 3 次元形状まで拡張した最大直方体探索のアルゴリズムの 3 次元への詳細を述べる。また形状と解像度が異なるいくつかの 3 次元ファントムを MRR で記述して光子輸送シミュレーションを行い、従来の VB 表現や octree 表現を用いた場合の計算時間と比較して MRR の性能を調べた。

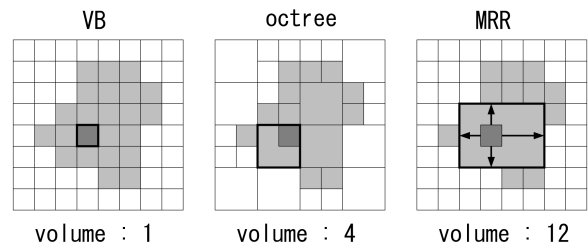


図 1. 物体記述法による領域体積の違い

## 2. MRR 探索アルゴリズム

MRR 探索アルゴリズムでは、z 軸方向に同じ媒質の voxel が続く部分に関心領域とした画像を作成し、その画像上の各 voxel について同一の媒質で満たされる最大の長方形領域、つまり 2 次元的な MRR を求めることで直方体領域を作成していく。そこで本節では、まず 2 次元の MRR 探索アルゴリズムを説明し、次にそれを利用した 3 次元ファントムに対する MRR 探索アルゴリズムを詳述する。

### 2.1 2 次元 MRR 探索アルゴリズム

2 次元ファントム上の各 voxel についてその voxel を含み、かつ同媒質で満たされる最大の長方形を求めるアルゴリズムを以下に示す。ここで、 $P_n, P_s, P_w, P_e$  は長方形の 4 辺を表す変数である。ここでは最大長方形を求める過程を図 2 に示される 2 次元ファントムを用いて説明する。

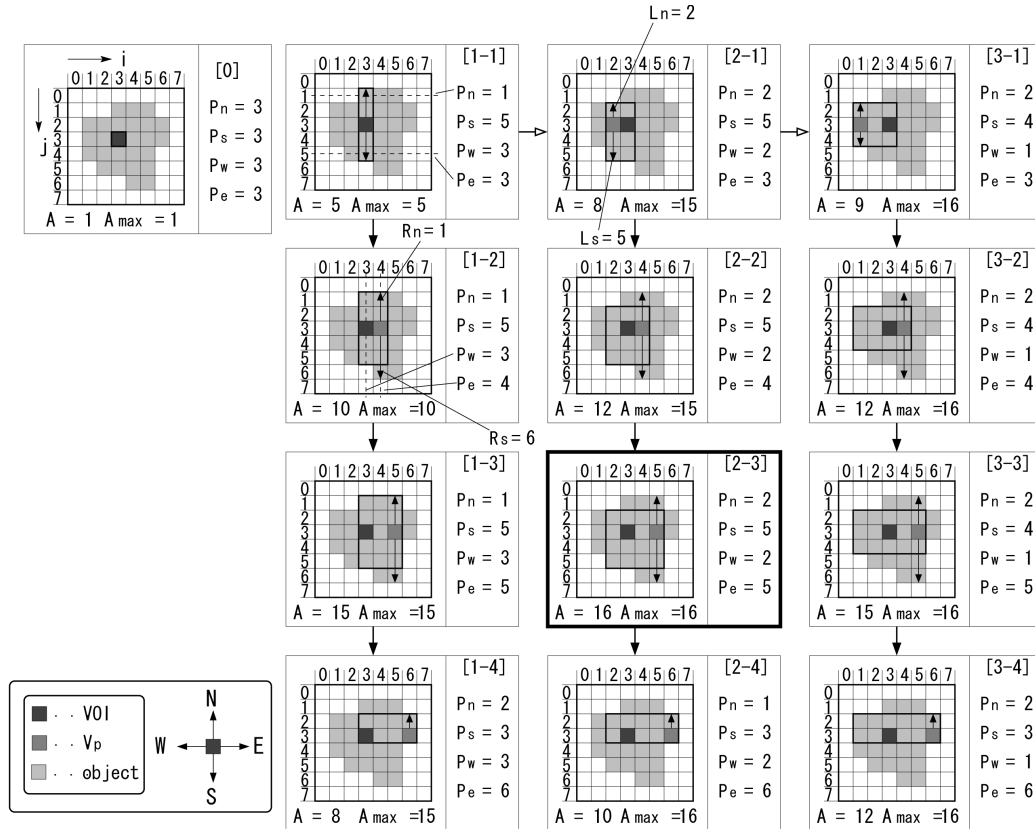


図2 . 2次元ファントムにおいてMRRを探索する過程

(1) 調べたい voxel (voxel of interest : VOI)のN,S方向にどの voxel まで同じ媒質が続くかを調べ、それらの voxel の j 方向の座標値をそれぞれ  $P_n, P_s$  とする(図2 [1-1])。

ここで次の初期化を行う。 $L_n, L_s$ は長方形をW方向に拡張する際に使用する変数である。

$$L_n = P_n$$

$$L_s = P_s$$

(2)  $P_e$ をE方向に1つ進めた voxel がVOIと同じ媒質ならば(2a)へ。違う媒質ならば(2b)へ。

(2a)  $P_e$ のN,S方向にどの voxel まで同じ媒質が続くかを調べ、それらの j 方向の座標値をそれぞれ  $R_n, R_s$  とする。次の操作により長方形領域を作成する(図2 [1-2], [1-3], [1-4], [2-2], [2-3], [2-4], [3-2], [3-3], [3-4])。

$$\text{If } P_n < R_n \text{ then } P_n = R_n$$

$$\text{If } P_s > R_s \text{ then } P_s = R_s$$

(2b)  $P_e$ をVOIの位置まで戻し、次の操作により長方形をE方向へ探索する前の状態に戻す(図2 [1-4]-[1-1], [2-4]-[2-1])。

$$P_n = L_n$$

$$P_s = L_s$$

$P_w$ をW方向に1つずらし、その voxel がVOIと違う媒質ならば(4)へ。同じ媒質ならば $P_w$ のN,S方向にどの voxel まで同じ媒質が続くかを調べ、それらの i 方向の座標値をそれぞれ  $L_n, L_s$  とする。次の操作により長方形領域を作成する(図2 [2-1], [3-1])。

$$\text{If } P_n < L_n \text{ then } P_n = L_n$$

$$\text{If } P_s > L_s \text{ then } P_s = L_s$$

(3) 長方形の面積Aを計算する。この時  $A > A_{max}$  ならば  $A_{max} = A$ として、この長方形を最大長方形として保存する。(2)へ戻る。

(4) VOIを次の voxel に進めて、(1)へ。ファントムを構成する全てのVOIに対して最大長方形を調べたら終了する。

図2に示される1つのVOIの例では、7番目に求めた長方形(面積  $A=16$ )が最大領域として決定される。この手順を物体を構成するすべての voxel に対して適用し、それぞれの voxel について最大長方形領域を求める。

## 2.2 3次元MRR探索アルゴリズム

3次元ファントムにおいて最大直方体領域を探索するアルゴリズムを図3のファントムを例に説明する。ここで  $Z_{top}$ は作成する直方体のz方向上面を  $Z_{bottom}$ はz方向下面を表している。

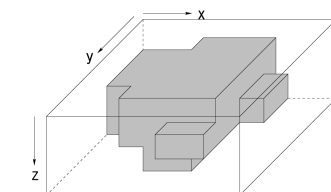


図3 . 3次元ファントム(8×8×3)

- (1)  $Z_{top}=0$  に初期化する。
- (2)  $Z_{bottom}=Z_{top}$  に初期化する。
- (3)  $Z_{top}$  から  $Z_{bottom}$  までのスライスを比較する。 $Z_{top}$  から  $Z_{bottom}$  まで  $z$  方向に全て同じ媒質が続く部分を関心領域とした画像 (logical AND image : LAI) を作成する(図 4)。
- (4) LAI 上の関心 voxel に上記の 2 次元 MRR 探索アルゴリズムを適用して、それぞれの voxel についてその voxel を含む同媒質で満たされる最大の長方形領域を調べる(図 5)。
- (5) LAI 上の関心 voxel について最大長方形領域の高さを  $Z_{bottom}-Z_{top}+1$  として直方体領域の体積を計算する。その体積を  $z$  方向に沿った  $Z_{top}$  から  $Z_{bottom}$  までの voxel のそれまでの最大体積とそれぞれ比較し、大きければ最大直方体情報を更新する。この操作を LAI 上の全ての関心 voxel について行う。
- (6)  $Z_{bottom}=Z_{bottom}+1$  として(3)に戻り、 $Z_{bottom}$  がファントムの 1 番下のスライスになったら(7)へ進む。
- (7)  $Z_{top}=Z_{top}+1$  として(2)に戻り、 $Z_{top}$  がファントムの 1 番下のスライスになったら終了。

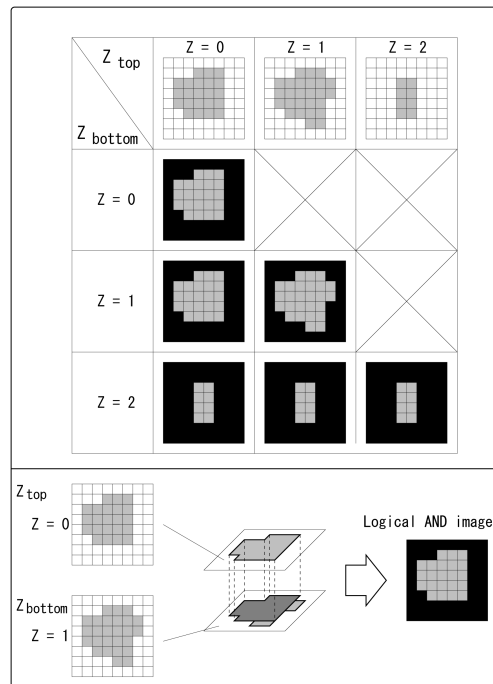
このアルゴリズムを用いて LAI から最大直方体を求める例を図 6 に示す。この例では図 3 のファントムの  $(x,y,z)=(3,3,1)$  の voxel が、探索過程で作成される 4 つの直方体に VOI として含まれており、 $Z_{top}=1, Z_{bottom}=2$  のときの直方体(体積  $V=32$ )がこの voxel についての最大直方体となることを示している。このようにして、物体を構成するすべての voxel に対して最大直方体領域を求める。

### 3. 光子輸送シミュレーション

MRR の有効性を確かめるために VB、octree、MRR で物体を記述して光子輸送シミュレーションを行った。シミュレーションファントムとして図 7、図 8 に示す 2 つのファントムを用いた。円柱ファントムは  $z$  軸方向に媒質が変化しない例として用いた。MCAT ファントムは図 8 で示されるように複数の媒質が複雑な 3 次元形状を成す臨床に近いモデルとして用いた。また、計算量を比較するためにそれぞれのファントムについて  $64 \times 64 \times 64$  (voxel 幅 0.5cm)、 $128 \times 128 \times 128$  (voxel 幅 0.25cm)  $256 \times 256 \times 256$  (voxel 幅 0.125cm) の 3 種類の分解能のものを用意した。シミュレーション条件を表 1 に示す。光子はファントムの中心から点線源として発生させた。また、計算には Sun Ultra5 (Sun microsystem 製)を用いた。メモリサイズは 512MB、コンパイラには gcc を用い、最適化は行っていない。乱数には Mersenne twister[11]を使用した。

表 1. シミュレーション条件

核種	Tc-99m
発生光子数	10M
相互作用	コンプトン散乱、干渉性散乱、光電効果
カットオフ	39.0keV
検出器	90 方向 (0 ~ 360deg.)
	$64 \times 64$ pixels (pixel 幅 0.5cm)



$(x, y, z) = (3, 3, 1)$

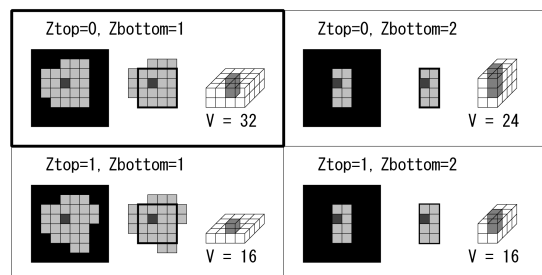


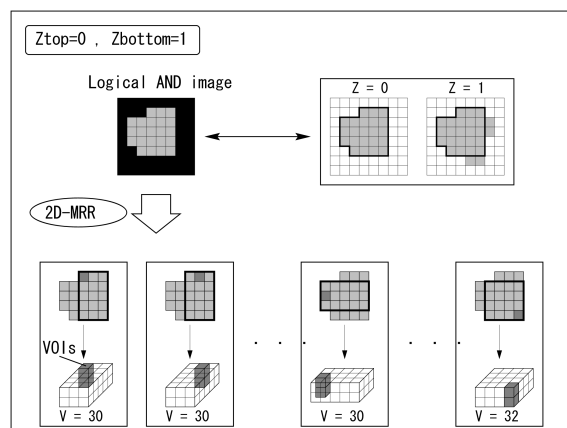
図 4. Logical AND image の作成

図 5. Logical AND image からの直方体作成

図 6. 最大直方体の決定

### 4. 結果と考察

表 2 には光子輸送計算に要した時間を示した。表中の ()内の数値は VB 法を 1 とした時の計算時間の割合である。この結果から、どちらのファントムも最大直方体による記述をすることで計算時間を VB 表現時より大幅に短縮させることが可能であり、octree 表現と比較してもさらに時間を短縮できていることがわかる。またファントムの分解能が高いほどこの手法が有効であることがわ



かる。すなわち、VB 表現では均一媒質の大きな領域が多数の最小の voxel の集合体で表現されるために、分解能に応じて境界数が増えてしまい、計算時間が長くなっている。しかし、MRR による記述を用いると、このような領域を一つの大きな領域にまとめることができ、光子行路と領域境界との交点計算回数をより減らすことになる。表 3 は octree、MRR のそれぞれの記述法で物体を表現した時の各 voxel が持っているその voxel を含む均一媒質の領域の平均体積を VB 法における単位 voxel に対する比で示したものである。この表を見ると、MRR による物体記述は octree に比べてはるかに大きな領域を確保することが出来ており、計算時間の短縮に貢献していると思われる。表 2 において MCAT ファントムが円柱ファントムほど計算時間が短縮できていないのは表 3 での平均体積の違いによるものと考えられる。MCAT ファントムは内部が円柱ファントムに比べて複雑な構造なので大きな直方体が確保できていない。この平均体積の違いが計算時間に及ぼす影響を確かめるために、1 個の光子の追跡に対して交点を平均で何回計算しているかを  $64 \times 64 \times 64$  の分解能で調べてみた。その結果、円柱ファントムでは VB で 61.5 回、octree で 9.4 回、MRR で 3.0 回、MCAT ファントムでは VB で 58.9 回、octree で 22.5 回、MRR で 8.1 回であった。この結果から実際に MRR で物体を記述した時が最も少ない計算回数で光子輸送できることが確認できた。また平均体積の違いが交点の計算回数に影響していることもわかる。なお、本論文の表 2 では物体記述に必要な時間は除外している。この時間を除外した理由は、octree や MRR 表現において用いている「各 voxel の属性として持たせている、その voxel を含む均一媒質の領域の情報」というのは、1 回作成すれば、形状が同じファントムに対して何度でも条件(光子の発生数や発生位置など)を変えてシミュレーションすることができるからである。

表 2. 光子輸送計算時間(sec.)

	記述法	空間分解能		
		$64^3$	$128^3$	$256^3$
円柱	VB	2206(1.00)	3353(1.00)	5803(1.00)
	Octree	1520(0.68)	1579(0.47)	2156(0.37)
	MRR	1210(0.55)	1378(0.41)	1954(0.33)
MCAT	VB	2225(1.00)	3279(1.00)	5578(1.00)
	Octree	2110(0.94)	2601(0.79)	3088(0.55)
	MRR	1639(0.74)	1833(0.55)	2589(0.46)

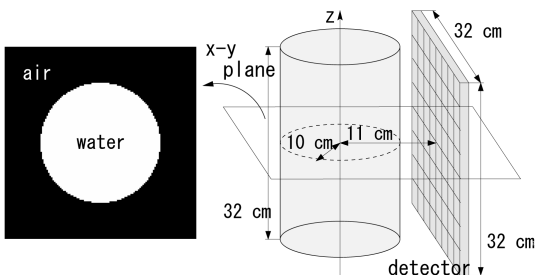


図 7. 円柱ファントムとデータ収集ジオメトリ

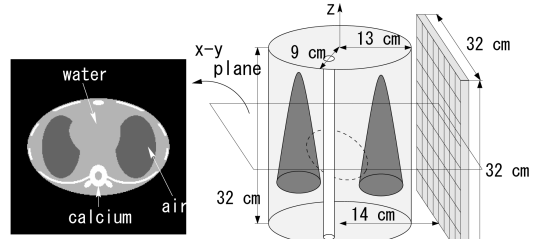


図 8. MCAT ファントムとデータ収集ジオメトリ

表 3. 一様媒質領域の平均体積(voxels)

	記述法	空間分解能		
		$64^3$	$128^3$	$256^3$
円柱	Octree	328	2592	20725
	MRR	51227	396654	3168589
MCAT	Octree	99	721	5338
	MRR	7269	56460	446567

## 5. まとめ

光子輸送シミュレーションを高速化するために最大直方体領域(MRR)による物体記述法を提案し、3次元ファントムにおいて MRR を探索するアルゴリズムの詳細を述べた。この物体記述法は octree 表現による高速化法と違い記述生成時の座表系に依存することなく大きな領域を確保できる。MRR 表現を用いてシミュレーションした結果、従来の VB 表現や octree 表現時に比べ計算時間を短縮化することができた。

## 参考文献

- [1]D.E. Raeside, "Monte Carlo Principles and Applications," *Phys Med Biol*, pp.181-197, 1976.
- [2]J.W. Beck, R.J. Jaszczak, R.E. Coleman, C.F. Starmer and L.W. Nolte, "Analysis of SPECT including scatter and attenuation using sophisticated Monte Carlo modeling method," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol. 29, pp. 506-511, 1982.
- [3]C.E. Floyd, R.J. Jaszczak, C.C. Harris, K.L. Greer and R.E. Coleman, "Monte Carlo evaluation of Compton scatter subtraction in single photon emission computed tomography," *Med Phy*, vol. 12, pp. 776-778, 1987.
- [4]S.H. Manglos, C.E. Floyd, R.J. Jaszczak, C.C. Harris, K.L. Greer and R.E. Coleman, "Experimentally measured scatter fractions and energy spectra as a test of Monte Carlo simulations," *Phys Med Biol*, vol. 32, pp. 335-343, 1987.
- [5]C.E. Floyd, R.J. Jaszczak, C.C. Harris and R.E. Coleman, "Revised scatter fraction results for SPECT," *Phys Med Biol*, vol. 32, pp. 1663-1666, 1987.
- [6]C.E. Floyd, R.J. Jaszczak and R.E. Coleman,

- “Scatter detection in SPECT imaging : dependence on source depth, energy, and energy window,” *Phys Med Biol*, vol. 33, pp. 1075-1081, 1988.
- [7]M. Ljungberg and S.E. Strand, “Attenuation and scatter correction in SPECT for sources in a nonhomogeneous object: A Monte Carlo study,” *J Nucl Med*, vol. 32, pp. 1278-1284, 1989.
- [8]K. Ogawa and S. Maeda, “A Monte Carlo method using octree structure in photon and electron transport,” *IEEE Trans Nucl Sci*, pp.2322-2326, 1995.
- [9]M.M. Yau and S.N. Srihari, “A Hierarchical Data Structure for Multidimensional Digital Images,” *Communications of the ACM*, pp.504-515, 1983.
- [10]K. Ogawa and S. Takahashi and Y. Satori, “Description of an object in Monte Carlo simulation,” *IEEE Trans Nucl Sci*, pp.1521-1526, 1997.
- [11]M. Matsumoto and T. Nishimura, Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator,” *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation*, vol. 8, pp.3-30, 1998.

キーワード.

モンテカルロ法、Single Photon Emission CT、物体記述法、Voxel-Based 法、最大直方体

-----

Summary.

**High-speed Monte Carlo simulation  
with the maximum rectangular region algorithm**

Ryuichi Suganuma Koichi Ogawa

Division of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Hosei University

The photon transportation simulation which uses a Monte Carlo method is an indispensable technique for examining the scatter and absorption correction methods in SPECT and PET. We have developed a method for object description in maximum regions (maximum rectangular regions: MRRs) to speed up photon transportation simulation, and compared the calculation time with that of conventional object description methods. In this paper details of the expansion of MRR to three dimensions are given. Moreover, the effectiveness of proposed method was compared with the VB and octree method in the results of simulations of two kinds of phantoms.

Keywords.

Monte Carlo Method, Single Photon Emission CT, Object Description Method, Voxel-Based Method, Maximum Rectangular Region