

一般化 SPM 法による二次元電流分布推定 - ウェーブレット変換との併用 -

関島 大志郎 早野 誠治 斎藤 兆古
法政大学

澤田 彰
(株)東芝

堀井 清之
白百合女子大学

本稿では、不適切な線形システムの新しい反復型逆問題解析法を提案する。そして、この反復型解法を電流分布推定問題に適用し、さらに多重解像度解析を行い、ノイズベクトルを削減することで良好な結果が得られたのでここに報告する。また、この反復型解法の数学的な背景はこの解法が絶対的に安定した反復型逆問題解析法であることを示す。

1. はじめに

プリント基板上の電流分布を推定する上で最も重要なことは、欠損部分を探索することや、現代の電気機器に対して EMC 問題を考慮することに他ならない[1,2]。電気機器を分解、破壊せず電流分布を推定するためには、本質的には逆問題を解くことに帰する。なぜならば、電気機器の周辺から得られる情報は局所的に測定された電磁界のみであり、これらの限られた局所的な電磁界から電磁界源を計算しなければならないからである。

多くの逆問題は、 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ という不適切な線形システム方程式によって解かれる。ここで、 \mathbf{Y} は n 次の測定された電磁界ベクトル、 \mathbf{X} は m 次の電磁界源ベクトル、そして \mathbf{C} は n 行 m 列のシステム行列であり、電磁界と電磁界源の関係を表すグリーン関数で構成されている。多くの場合、未知数の数 m のほうが既知である数 n よりもはるかに多い。このように、プリント基板上の電流分布を推定するためには、不適切な線形システム方程式 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ を解くことに帰するのは明らかである。

本稿では、不適切な線形システムの新しい反復型逆問題解析法を提案する。そして、この反復型解法を電流分布推定問題に適用し、さらに多重解像度解析を行いノイズベクトルを削減することで良好な結果が得られたのでここに報告する。また、この反復型解法の数学的な背景はこの解法が絶対的に安定した反復型逆問題解析法であることを示す。

2. 逆問題解析法

2.1. 不適切な線形システム方程式

(1) 式で与えられる一般的な線形システム方程式を考える。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{Y} は n 次の入力ベクトル、 \mathbf{X} は m 次の解ベクトル、そして \mathbf{C} は n 行 m 列のシステム行列であり、多くの場合 $m > n$ である。(1) 式は (2) 式のように書き直すことも可能である。

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_m] \quad (2)$$

さらに (2) 式の両辺を入力ベクトルと列ベクトル、それぞれのノルムで正規化して (3) 式を得る。

$$\frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{|\mathbf{C}_i|}{\|\mathbf{Y}\|} \frac{\mathbf{C}_i}{|\mathbf{C}_i|}, \quad (3)$$

or

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}'\mathbf{X}'.$$

2.2. 評価関数

(2)式は入力ベクトル \mathbf{Y} が必ずシステム行列の列ベクトル \mathbf{C}_i の線形結合で与えられることを意味する。

したがって、 k 回目の反復解 $\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}$ と入力ベクトル \mathbf{Y} 間の角度

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{X}^{(k)}) &= \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \cdot \frac{\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}}{|\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}|} \\
&= \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \cdot \frac{|\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}|} \\
&= \mathbf{Y}' \cdot \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}|}.
\end{aligned} \tag{4}$$

を解の評価関数とし、

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) \rightarrow 1, \tag{5}$$

となる解ベクトル $\mathbf{X}^{(k)}$ を得る。このとき、入力ベクトル \mathbf{Y}' と解ベクトル $\mathbf{X}^{(k)}$ を(6)式

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}. \tag{6}$$

へ代入して構成されるベクトルの方向は一致する。反復計算の初期値を $\mathbf{X}^{(0)}$ とすると (7) 式を得る。

$$\Delta\mathbf{Y}'^{(1)} = \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}|}. \tag{7}$$

I_m を m 次の単位正方行列、 $\Delta\mathbf{X}'^{(1)}$ を解の誤差ベクトルとすると、第一近似解ベクトルは (8) 式の形で書ける。

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}^{(0)} + \Delta\mathbf{X}'^{(1)} \\
&= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}'^T \Delta\mathbf{Y}'^{(1)} \\
&= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}'^T \left(\mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}|} \right) \\
&= \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' + \left(I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}|} \right) \mathbf{X}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

したがって、 k 回目の解ベクトル $\mathbf{X}^{(k)}$ は (9) 式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(k)} &= \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}'^T \Delta\mathbf{Y}'^{(k-1)} \\
&= \mathbf{C}'^T \mathbf{Y}' + \left(I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

2.3. 収束条件

(9) 式で解が収束する条件は状態遷移行列 S

$$\begin{aligned}
S &= I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \\
&= I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{Y}'^{(k-1)}|}
\end{aligned} \tag{10}$$

の最大固有値が 1 より小さければ、解は必ず収束する。しかしながら、(10) 式において状態遷移行列 S は定数値からなる行列ではなく、解ベクトル $\mathbf{X}'^{(k-1)}$ の関数である。このため、解の収束条件は解ベクトル $\mathbf{X}'^{(k-1)}$ そのものに依存する。しかし、単位正方行列の固有値は 1 の重根であるから、収束条件は

$$\begin{aligned}
|I_m| &\geq |S|, \\
|I_m| &\geq \left| I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \right|
\end{aligned} \tag{11}$$

or

$$|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}| |I_m| \geq \|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}\| |I_m - \mathbf{C}'^T \mathbf{C}'|.$$

とも書ける。(11) 式において、行列 $\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'$ の対角要素は全て 1 であり、対角線要素以外の要素の絶対値は全て 1 以下である。このため、(11) 式の条件は常に成り立ち (9) 式は絶対に安定な反復解を与える。これは、状態遷移行列 S の最大絶対値を持つ対角要素が近似的に最大固有値に等しいためである。

3. 磁界における逆問題

3.1. システム方程式

電流と磁界の関係はマクスウェルの方程式の解として与えられることが知られている。グリーン関数を用いた離散値系の積分方程式をマクスウェルの方程式に適用すると、(1) 式と同様なシステム方程式が導かれる。磁界に関して、ベクトル \mathbf{Y} と \mathbf{X} はそれぞれ n 次の磁界ベクトルと m 次の電流ベクトルである。 n 行 m 列の長方システム行列 C はグリーン関数の空間微分から生成される[3-5]。

電気機器の主要な電流は内部のプリント基板上を流れているが、磁界は電気機器の外に広がって放射する。これは、電流が流れている範囲は限定されるが、磁界は外側の限られた範囲でのみ測定可能であることを意味している。電気機器内で電流が流れている範囲を知るには、電気機器を分解する必要がある。他方、得られる磁界は局所的ではあるが、電気機器を分解することなく容易に測定することができる。したがって、電気機器内の電流分布を推定するには、 $m > n$ の条件下で(1) 式を解くことになる。

4. シミュレーション

4.1. 磁界分布

図 1 に 10×10 [cm] のプリント基板上、高さ 1 [cm] の平行平面上で測定された 3 次元磁界ベクトル分布を示す。

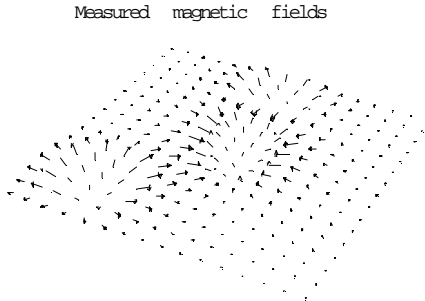


図 1. 3 次元磁界ベクトル分布

磁界の測定点数は 16×16 であり、 x, y, z の 3 成分が測定されているので、全体として $n = 3 \times 16 \times 16 = 768$ となる。一方、対象であるプリント基板に 32×32 のループ電流モデルを用いると未知数の数は $m = 32 \times 32 = 1024$ となる[3]。従って、768 点の磁界測定点から 1024 個のループ電流を計算する。

4.2. 電流分布推定

(9) 式をこの問題に適用するとループ電流分布が計算される[6]。図 2 に解の収束過程を示す。図 2 から、(9) 式の収束性が確認され、条件式である (11) 式の妥当性も証明された。

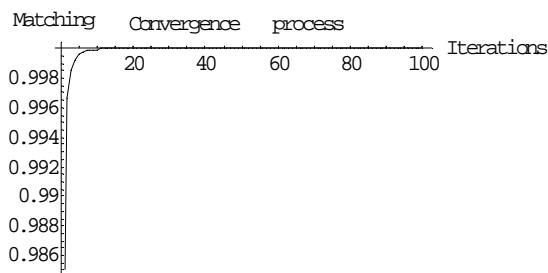
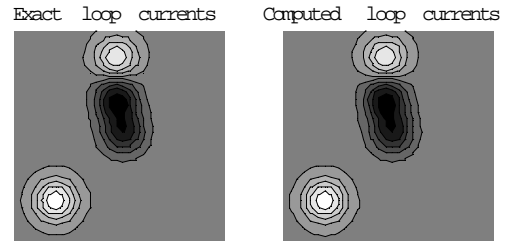
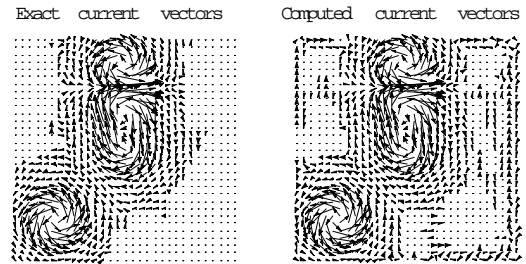


図 2. (9)式における解の収束過程

図 3 に正解のループ電流分布と計算されたループ電流分布を示す。また図 4 には、図 3 のループ電流分布から得られる電流ベクトル分布を示す。図 3 において、白い部分は正の値を、黒い部分は負の値を示す。図 4 の計算された電流ベクトル分布は多少ノイズベクトルを含んでいるが、この解法が、良好に電流分布を推定していることは明らかである。

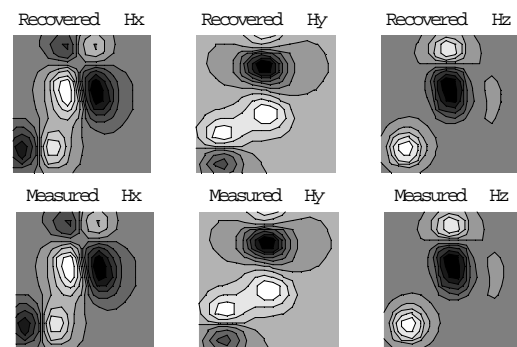


左：正解 右：計算値
図 3. ループ電流分布



左：正解 右：計算値
図 4. 電流ベクトル分布

全体の妥当性を調べるために、計算された磁界分布と測定された磁界分布を比較してみる。図 5 に x 方向、 y 方向、 z 方向の磁界分布を示す。



上：計算値 下：測定値
左： x 成分、中： y 成分、右： z 成分
図 5. 磁界分布

図 5 の結果を見ると明らかなように、この解法が不適切な線形システム方程式に対して信頼できる解を与えることが示された。

5. 基礎実験

5.1. 磁界分布

図 6 に測定された 3 次元磁界ベクトル分布を示す。

磁界は、 10×10 [cm] の電流分布面と平行平面上で測定し、測定面の高さは 0.9 [cm] とした。磁界分布の測定点数は 10×10 であり、 x, y, z の 3 成分が測定されているので、全体として $n = 3 \times 10 \times 10 = 300$ となる。一方、対象である励磁コイルに 25×25 のループ電流モデルを

用いると未知数の数は $m = 25 \times 25 = 625$ となる。
 このようにして、300 点の磁界測定点から 625 個の
 ループ電流を計算する。

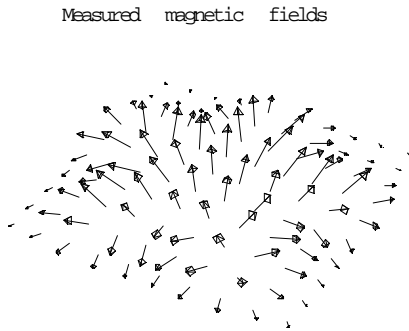


図 6. 3次元磁界ベクトル分布

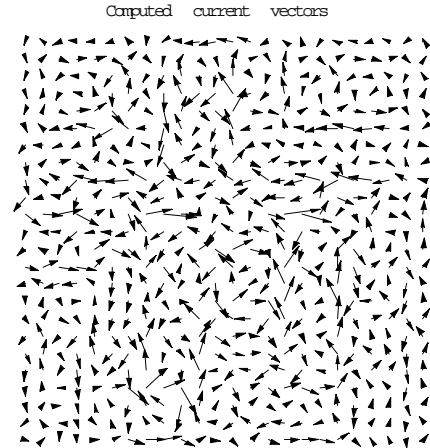


図 9. 電流ベクトル分布

5.2. 電流分布推定

図 7 に解の収束過程を示す。

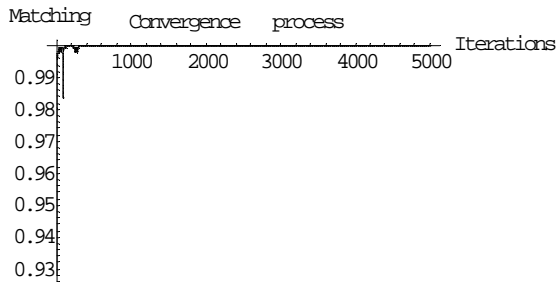


図 7. (9)式における解の収束過程

図 8 に計算されたループ電流分布を示す。また、図 9
 は、図 8 のループ電流分布から得られる電流ベクトル分
 布を示す。図 8 で、白い部分は正の値を、黒い部分は負
 の値を示す。

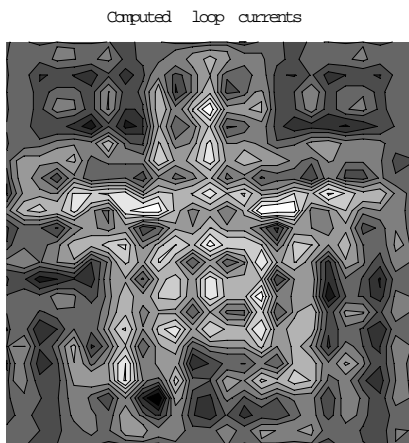
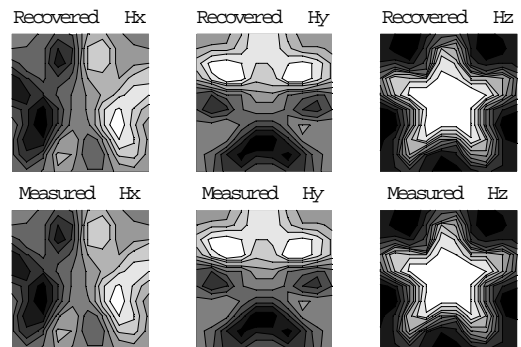


図 8. ループ電流分布

最後に、全体の妥当性を調べるために計算された磁界
 分布と測定された磁界分布を比較してみる。図 10 に x 方
 向、y 方向、z 方向の磁界分布を示す。



上：計算値 下：測定値
 左：x 成分、中：y 成分、右：z 成分
 図 10. 磁界分布

5.3. 多重解像度解析

図 9 の電流ベクトル分布に多重解像度解析を行うこと
 でランダムなノイズ成分を除くことでより正確な電流ベ
 クトル分布を抽出する[7]。図 11 に多重解像度解析結果
 を示す。

図 11 を見ると明らかにノイズ成分が削減され、正確
 な電流ベクトル分布が抽出されている。

Filtered

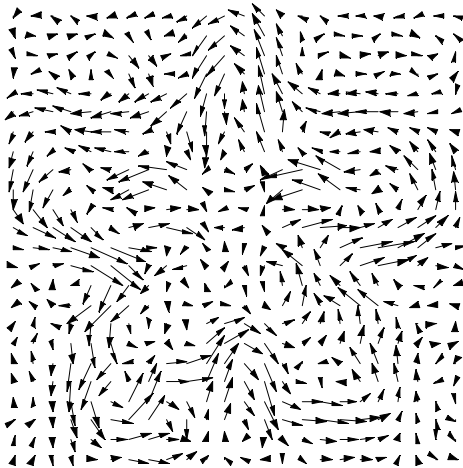


図 11. 多重解像度解析結果

6. まとめ

本稿では、局所的に測定された磁界分布からプリント基板上の電流分布を推定するために、不適切な線形システム方程式を解く新しい反復型逆問題解析法を提案した。その結果、プリント基板上の電流分布を推定することに成功した。

また、ウェーブレット変換の多重解像度解析によって、ノイズベクトルを削減することでより正確な電流分布を得ることができた。

このように、プリント基板上の電流分布の推定は非破壊検査や電気機器の EMC 問題に対する一方法を与える。

参考文献

- [1] T.Do, S.Hayano and Y.Saito," Magnetic field distribution caused by a notebook computer and its source searching ," Journal of Applied Physics,Vol.79, No.8, April, (1996),pp.5214-5216.
- [2] S.Hayano, Y.Midorikawa and Y.Saito," Development of film transformer," IEEE Transaction on Magnetics, Vol.MAG-30, No.6, Nov.(1994),pp.4758-4760.
- [3] Y.Midorikawa, J.Ogawa, T.Do, S.Hayano and Y.Saito," Inverse analysis for magnetic field source searching in thin film conductor," IEEE Transaction on Magnetics, Vol.MAG-33, No.5, Sep.(1997), pp.4008-4010
- [4] T.Do, S.Hayano, I.Marinova, N.Ishida and Y.Saito," Defect recognition in conductive materials by local magnetic field measurement," Journal of Applied Physics, Vol.75, No.10, May, (1994) pp.5907-5909.
- [5] T.Do, S.Hayano and Y.Saito " Wavelet solution of the inverse source problems ", IEEE Transaction on Magnetics,Vol.MAG-33,No.2, March,(1997),pp.1935-1938.
- [6] Stephen Wolfram, " The Mathematica book 3rd ed., " Wolfram Research, Inc., (1996).
- [7] 斎藤兆古, "ウェーブレット変換の基礎と応用", 朝倉書店, 1998年4月

キーワード.

磁界、電流分布推定、多重解像度解析、ウェーブレット、逆問題

Summary.

Estimation of 2D Current Distributions by the Generalized SPM Method

Daishiro Sekijima Seiji Hayano Yoshifuru Saito
Hosei University

Akira Sawada
TOSHIBA Co.Ltd

Kiyoshi Horii
Shirayuri Women's College

This paper proposes a new iterative solution strategy for an ill-posed inverse problem. Apply our new solution strategy to evaluating the current distribution yields the current vectors. And, we removed the noisy vectors using the multi resolution analysis of the discrete wavelets. Thus, we have succeeded in visualizing the current vector distributions on the printed circuit boards without destruction or decomposition. Mathematical background of our method reveals that our method is an absolutely stable iterative inverse scheme.

Keywords.

Magnetic Field, Estimation of Current Distributions, Multi-resolution Analysis, Wavelets, Inverse Problem