

ウェーブレット変換による3次元ベクトルデータのノイズ低減

松山 佐和, 小口 雄康
法政大学計算科学研究センター

齋藤 兆古
法政大学工学部

1次元および2次元ウェーブレット変換の適用例はこれまでも数多くあり、特に、波形データの周波数解析やノイズ成分の低減、画像データの圧縮などに適用されている。本稿では3次元空間に分布する3次元ベクトルのモデルデータに離散値系ウェーブレット変換を適用し、3次元ベクトルデータのウェーブレット変換においても1次元、2次元ベクトルデータと同様に大きなベクトルがマザーウェーブレット近傍に集中すること、さらに、支配的なベクトルを抽出することによりデータの圧縮およびノイズ成分の低減が可能であることを示す。

1. はじめに

ウェーブレット変換は波形データの周波数解析やノイズ成分の低減、画像データの圧縮などに適用されている。離散値系ウェーブレット変換の特徴は、データの特徴をウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット近傍に抽出すること、および、多重解像度解析によりデータの各レベルにおける特徴を抽出することにある^[1]。筆者らはウェーブレット変換をベクトルデータに適用することを試みてきた。まず、1次元および2次元のモデルベクトルデータをウェーブレット変換しベクトルデータの圧縮およびノイズ成分の低減を試み、その成果を潮流データおよび風データに適用しデータの圧縮、ノイズ低減に有用であることを報告した^{[2],[3],[4]}。

本稿では、3次元の離散値系ウェーブレット変換をモデルベクトルデータに適用しシミュレーションを行い、1次元や2次元ベクトルで得られた知見と同様に、3次元ベクトルデータの支配的成分抽出が可能であり、さらにこの支配的成分抽出がベクトルデータに含まれるノイズベクトルの削減へつながらせることを示す。

2. ベクトルデータのウェーブレット変換

1次元のウェーブレット変換は、一般に、

$$S = WV \quad (1)$$

で表される。ここで、 V は n 次の列ベクトル、 S はウェーブレット変換スペクトラム、 W は $n \times n$ のウェーブレット変換マトリックスである。次に、列ベクトル V が x, y 方向の2成分 X, Y からなるベクトル

$$V = X + Y \quad (2)$$

であるとき、ウェーブレット変換スペクトラムは、(1)および(2)式より

$$S = W(X + Y) \quad (3)$$

となる。ここで X, Y は互いに直交するベクトルであるから、(3)式は

$$S = WX + WY \quad (4)$$

となる。すなわちベクトルのウェーブレット変換スペクトラムはそれぞれの成分のウェーブレット変換となる。次に、2次元のウェーブレット変換は

$$S = W_m \cdot M \cdot W_n^T \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 S はウェーブレット変換スペクトラム、 M は $m \times n$ の長方マトリックス、 W_n および W_m はそれぞれ $n \times n$ 、 $m \times m$ のウェーブレット変換マトリックスである。これをベクトルのウェーブレット変換に発展させる。ここで、 M が x, y 方向の2成分 X, Y からなるベクトル

$$M = X + Y \quad (6)$$

とであるとき、(5)、(6)式よりウェーブレット変換スペクトラムは、

$$S = W_m \cdot (X + Y) \cdot W_n^T \quad (7)$$

となる。 X, Y は直交するベクトル成分であるから、(7)式は

$$S = W_m \cdot X \cdot W_n^T + W_m \cdot Y \cdot W_n^T \quad (8)$$

となる。2次元のウェーブレット変換においてもベクトルのウェーブレット変換は1次元の場合と同様に各成分のウェーブレット変換の和となる。

3次元のウェーブレット変換は、3次元マトリックスの転置行列を

$$[H_{lmn}]^T = H_{nlm} \quad (9)$$

で表すと、

$$S = [W_l \cdot [W_m \cdot [W_n \cdot H_{lmn}]^T]^T]^T \quad (10)$$

で与えられる。ここで、 S はウェーブレットスペクトラム、 H は $l \times m \times n$ の直方マトリックス、 W_l 、 W_m 、 W_n は、それぞれ $l \times l$ 、 $m \times m$ 、 $n \times n$ のウェーブレット変換マトリックスである。ここで、 H が x 、 y 、 z 方向の3成分 X, Y, Z からなるベクトル

$$H = X + Y + Z \quad (11)$$

であるとき、(9)、(10)式より

$$S = [W_l \cdot [W_m \cdot [W_n \cdot (X + Y + Z)]^T]^T]^T \quad (12)$$

が得られる。ここで X, Y, Z はそれぞれ直交するベクトルであるから(12)式は、

$$\begin{aligned} S = & [W_l \cdot [W_m \cdot [W_n \cdot X]^T]^T]^T \\ & + [W_l \cdot [W_m \cdot [W_n \cdot Y]^T]^T]^T \\ & + [W_l \cdot [W_m \cdot [W_n \cdot Z]^T]^T]^T \end{aligned} \quad (13)$$

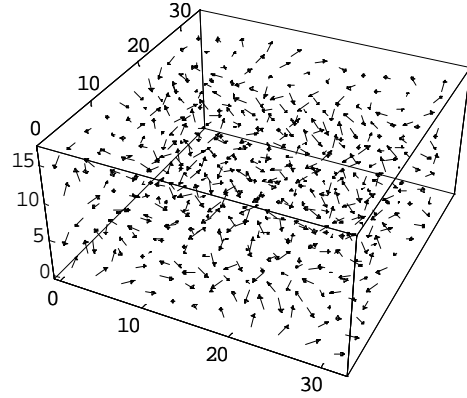
となる。すなわちベクトルデータのウェーブレット変換スペクトラムは各成分のウェーブレット変換スペクトラムを成分とするベクトルである。

3. モデルベクトルデータのウェーブレット変換例

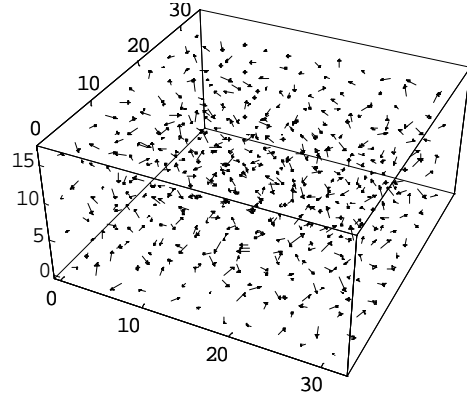
まず、3次元空間において、 x 、 y 、 z 方向の成分を持つ3次元ベクトル V_{ijk} を次のように定義する。

$$V_{ijk} = \left(\sin\left(3\pi\left(\frac{i-j}{l-m}\right)\right), \cos\left(3\pi\left(\frac{j-k}{m-n}\right)\right), \cos\left(3\pi\left(\frac{k-i}{n-l}\right)\right) \right) \\ , i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

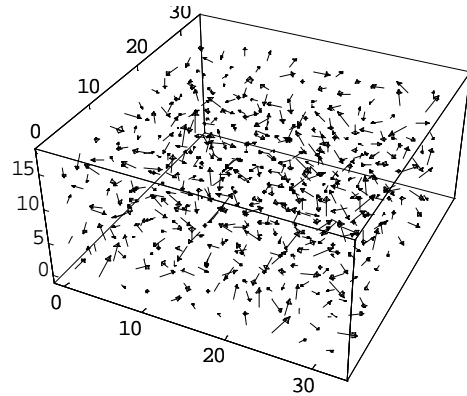
ここでは、 $l = 32$ 、 $m = 32$ 、 $n = 16$ とする。次に、ノイズベクトルデータを先のデータと同程度の -1 から 1 の大きさの乱数で作成しておく。Fig.1 にモデルベクトルデータを示す。(a)はノイズのないベクトルデータ、(b)は乱数で作られたノイズベクトルデータ、(c)は(a)と(b)の和でノイズを含むベクトルデータである。この図ではデータが重なり合ってデータの分布がわかりにくいので $n=16$ の点についてのみ図示したのが Fig.2 である。(a)はノイズのないベクトルデータ、(b)はノイズを含むベクトルデータである。このモデルベクトルデータについてウェーブレット解析を行う。



(a) ノイズのないベクトルデータ

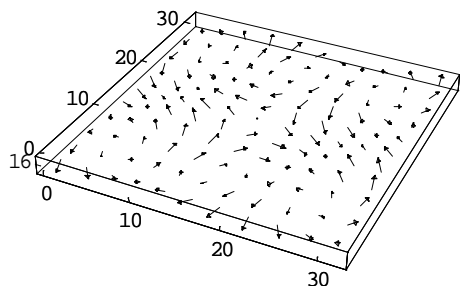


(b) 乱数で作られたノイズベクトルデータ

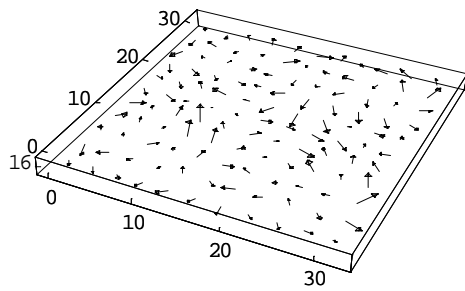


(c) ノイズを含むベクトルデータ

Fig.1. モデルベクトルデータ



(a) ノイズのないベクトルデータ



(b) ノイズを含むベクトルデータ
Fig.2. モデルベクトルデータ (n=16)

Fig.1 の(c)および Fig.2 の(b)に示したノイズを含むベクトルデータを成分ごとにウェーブレット変換しウェーブレット変換スペクトラムを求める。ここでは基底関数にドビッシェの2次を使用している。ウェーブレット変換スペクトラムをベクトル表示したのが Fig.3 である。3次元ウェーブレット変換においても1、2次元ウェーブレット変換と同様に大きなベクトルがマザーウェーブレット近傍に顕著に集中しており、このデータが圧縮可能であることを示している。

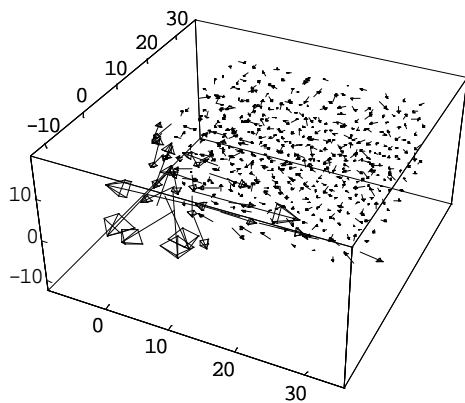


Fig.3. ウェーブレット変換スペクトラム
(基底関数にドビッシェの2次を使用)

次にベクトルデータを圧縮する。Fig.3 に示したウェーブレット変換スペクトラムにおいて、マザーウェーブレット近傍の $16 \times 16 \times 8$ の部分直行列の要素をそのまま残り他の要素をゼロとする。すなわち、データを8分の1に圧縮する。Fig.4 と Fig.5 に圧縮されたウェーブレット変換スペクトラムを逆変換して再現されたベクトルデータを示す。Fig.5 は $n=16$ のみを図示したものである。再現されたデータの再現率を斎藤^[1]は相関係数を用いて評価している。この方法を用いた再現率は0.91であり、よい再現性を示している。また、Fig.4 および Fig.5 の再現されたベクトルデータは、Fig.1 の(c)および Fig.2 の(b)に示したノイズを含むベクトルデータからノイズが低減され、明らかに Fig.1 および Fig.2 の(a)に示したノイズを含まないベクトルデータに近くなっている。すなわち、ベクトルデータの圧縮はノイズを低減することを示している。

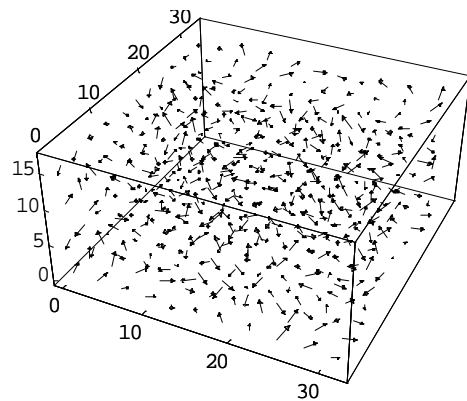


Fig.4. 8分の1に圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ

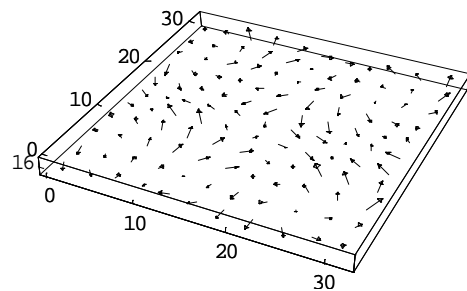
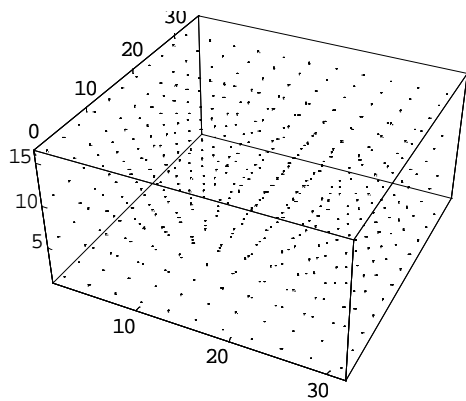
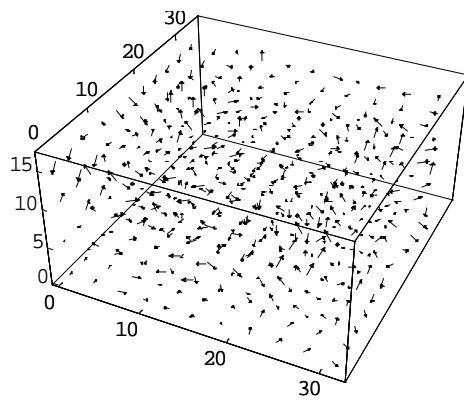


Fig.5. 8分の1に圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ (n=16)

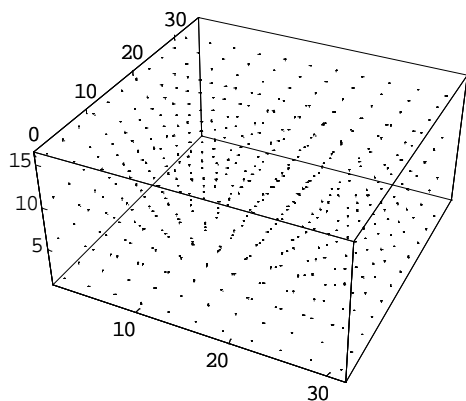
多重解像度解析結果はウェーブレット変換スペクトラムを各レベルのスペクトラムに分解し、その部分ウェーブレット変換スペクトラムをそれぞれ逆変換して得られる。Fig.3 のウェーブレット変換スペクトラムを多重解像度解析して得られた結果が Fig.6 である。(1)はマザーウェーブレットによるベクトルであり、データの平均的な大きさと方向を表している。ここで扱っているデータは、



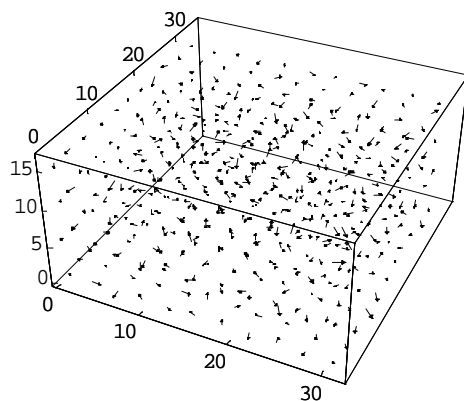
(1) マザーウェーブレット



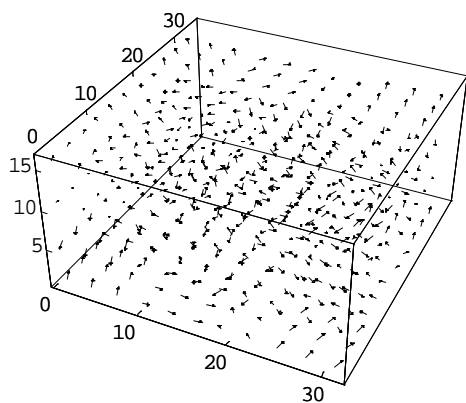
(4) レベル 3



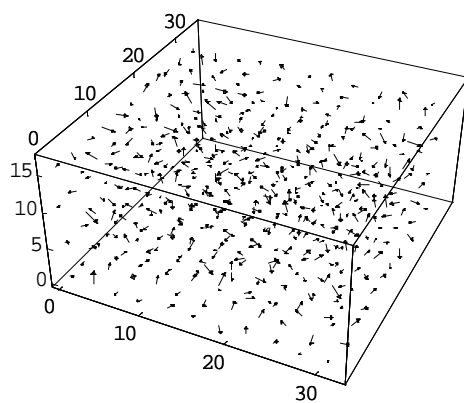
(2) レベル 1



(5) レベル 4



(3) レベル 2



(6) レベル 5

Fig.6. 多重解像度解析 (1)~(6)は各部分スペクトラムを逆変換して得られたベクトルデータ (続く)

Fig.6. 多重解像度解析 (1)~(6)は各部分スペクトラムを逆変換して得られたベクトルデータ (基底関数にドビッシーの2次を使用)

作成された -1 から 1 の大きさの周期的なデータであるため全体としてのベクトルの大きさはほとんどない。(2)以降は各レベルにおけるベクトルの大きさと方向を表し表している。Fig.6の多重解像度解析の結果から高周波数部分の(6)を除いたものが Fig.7で、Fig.1の(a)のノイズを含まないデータと比較してほぼ一致することがわかる。この結果は多重解像度解析によりノイズの低減が図れることを意味している。前述のように再現率を求めると0.91である。

多重解像度解析の結果から Fig.4の単純な圧縮は高周波ノイズを低減していることが分かる。また圧縮した残りの高周波部分を逆変換して再現したものは Fig.6の(6)であり、これは Fig.1の(b)のノイズベクトルデータと比較すると相関係数は0.84であり、明らかにノイズ成分であることがわかる。

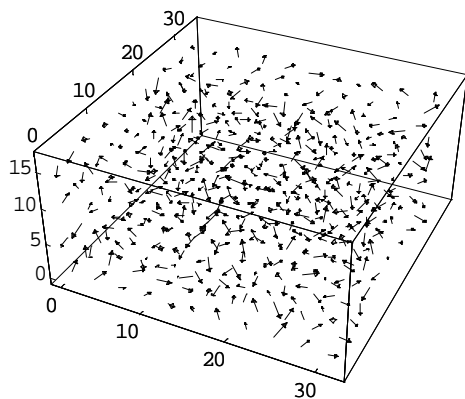


Fig.7. Fig.6の高周波部分を除いて圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ

4. おわりに

本稿では、3次元空間に分布するモデルベクトルデータに3次元ウェーブレット変換を適用した結果、1次元および2次元ウェーブレット変換と同様にデータの支配的なベクトル分布が抽出可能であることを示した。また、同様に支配的なベクトルを抽出することによりデータの圧縮が可能であり、データ圧縮によりランダムな方向を持つベクトルが除かれフィルター演算が可能であることが判明した。ここでは、モデルベクトルデータについてウェーブレット変換を試みたが、測定データへの応用も試みている。

参考文献

- [1] 齊藤兆古著, "Mathematica によるウェーブレット変換", 朝倉書店, 1996, 9.
- [2] 松山佐和, 小口雄康, 齊藤兆古, "ウェーブレット解析のベクトルデータへの適用", 計算工学講演会論文集, Vol.2(1997), No.2, 375-378.
- [3] 松山佐和, 小口雄康, 齊藤兆古, "ウェーブレット変換の気象データへの応用", 計算工学講演会論文集, Vol.2(1997), No.2, 359-362.
- [4] S.Matsuyama, Y.Oguchi and Y.Saito, "Applications of the

Wavelet Transform to the Meteorological Vector Data", 1998 ASME FEDSM, June 21-25, 1998, Washington, D.C.

キーワード.

ウェーブレット変換、ノイズ低減、3次元ベクトルデータ、ベクトルデータ圧縮

Summary.

Three Dimensional Vector Data Noise Reduction by the Wavelets

Sawa Matsuyama, Yuko Oguchi
Computational Science Research Center, Hosei University

Yoshifuru Saito
College of Eng., Hosei University

Wavelets transform has been mostly applied to the one- and two-dimensional wave-like phenomena. Major applications of the wavelet transform have been focused on both the waveform analysis and image data compression. One of the distinguished properties of the wavelets transform is that the major dominant factors can be extracted from the data. In this paper, we have applied this property to the three dimensional vector data. As a result, we have succeeded in extracting the major dominant vector components and reducing the noisy vector data.

Keywords.

Wavelets transform, Noise reduction, Three dimensional vector data, Data compression