

ベクトル場へのウェーブレット変換の適用

石田 則道 小口 雄康 松山 佐和
法政大学計算科学研究センター

斎藤 兆古
法政大学工学部電気電子工学科

ベクトルデータにウェーブレット変換を適用するとベクトルデータに含まれるノイズが削減されることが知られている。そこで、ヘルムホルツの定理に基づき、任意のベクトルをベクトルポテンシャル（回転成分）とスカラーポテンシャル（発散成分）の和に表現する。二次元ベクトル場でのポテンシャルは長方システム行列となる。いわゆる不適切問題であり、その逆問題の解を最小ノルム法によって一的に計算できることを述べ、最小ノルム法で得られたポテンシャルへウェーブレット変換を適用し、ベクトルデータに含まれるノイズがどの程度軽減できるかを述べる。具体的な例として、気流データにこの手法を適用し、その実際を検証する。

1. はじめに

近年、離散値系ウェーブレット変換は波形解析、イメージデータの処理[1]などに広く利用されている。また、線形システムの解法にも応用[2]されている。さらに、ウェーブレット変換をベクトルデータのノイズの削減に応用された報告もある[3] [4]。本論文では、ノイズを含む2次元ベクトルデータをウェーブレット変換することでノイズ成分を軽減する新しい方法を提案する。本稿で提案する解析法は大まかに2段階からなり、第1段階はヘルムホルツの定理と最小ノルム法を用いて、ベクトルデータをスカラーとベクトルポテンシャルへ分離する。第2段階は離散値系ウェーブレット変換のデータ圧縮機能を利用してポテンシャルに含まれるノイズを軽減する。離散値系で与えられるベクトルデータからスカラーおよびベクトルポテンシャルを求める問題は不適切な線形システムを解くことに帰し、本稿では最小ノルムを用いてこの不適切な線形システムを解く。

ヘルムホルツの定理によれば、任意のベクトル場はベクトルポテンシャルの回転演算で得られる回転成分とスカラーポテンシャルの勾配演算で得られる発散成分の和で与えられる。この処理結果はベクトルの回転成分がベクトルポテンシャル、発散成分がスカラーポテンシャルで表現されることを意味する。次に、最小ノルム法で得られたスカラーおよびベクトルポテンシャル、それぞれに離散値系ウェーブレット変換を適用する。その結果、ベクトルデータのノイズ成分が軽減された本質的なベクトル成分を抽出することが可能になる。

2. ノイズ軽減への解析

2.1 ポテンシャルの評価

ヘルムホルツの定理によれば、任意のベクトル場 \mathbf{U} は回転成分と発散成分からなる。回転成分はベクトル \mathbf{V} の回転演算、発散成分はスカラーポテンシャルの勾配演算によりそれぞれ与えられる。すなわち、次式で表される。

$$\mathbf{U} = \text{rot } \mathbf{V} - \text{grad } \phi \quad (1)$$

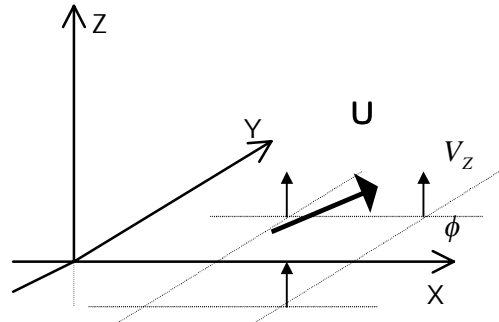


図1 2次元離散値系モデル

具体的な例として、図1に示す2次元ベクトル場 \mathbf{U} について考察する。与えられたベクトル \mathbf{U} は x 、 y 成分であるから、求めるべきベクトルポテンシャル \mathbf{V} は z 成分である。すなわち、回転成分は次式となる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & V_z \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{i}_x \frac{\partial V_z}{\partial y} - \mathbf{i}_y \frac{\partial V_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

同様にして、ベクトル \mathbf{U} の発散成分は(3)式となる。

$$\nabla \phi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (3)$$

(2)式と(3)式を加えて、(4)式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \nabla \times \mathbf{V} - \nabla \phi \\ &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \mathbf{i}_x - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \mathbf{i}_y. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式の偏微分を中心差分で近似して、ベクトルの和で

表現すると、次の方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_V + \mathbf{U}_S, \\ &= D_V \mathbf{V} + D_S \Phi, \\ &= (D_V \quad D_S) \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \Phi \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{A} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、ベクトル \mathbf{U} は回転成分 \mathbf{U}_V と発散成分 \mathbf{U}_S の和で構成され、 D_V 、 D_S はそれぞれ回転演算子、勾配演算子である。 \mathbf{A} は、回転成分システム行列 D_V と発散成分システム行列 D_S を要素とする長方システム行列である。既知ベクトルからベクトルおよびスカラーポテンシャルを求める問題は、式の数よりも未知数が多い不適切な線形を解くことに帰する。本解析法では(5)式の不適切問題を解く方法として最小ノルム法を適用する。(5)式の最小ノルム解は

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{U}. \quad (6)$$

となり、ベクトルポテンシャル \mathbf{V} とスカラーポテンシャル Φ が得られる。具体的な例として、ノイズを含んだ回転的ベクトル場の例を示す。図2のベクトル分布へ(6)式を適用して得られたポテンシャルの分布を図3に示す。

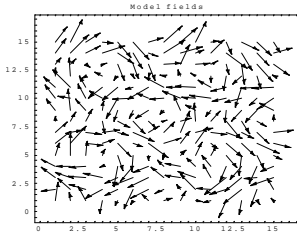


図2 ノイズを含むモデルベクトルの分布。

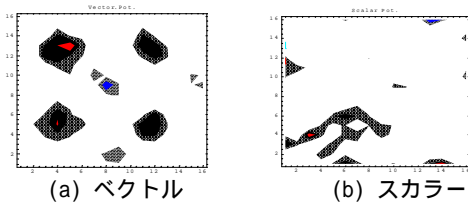


図3 ノイズを含むベクトルから導いたベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル。

2.2 ウェーブレット変換

ウェーブレット変換行列を W_m とすれば、(5)式のベクトル \mathbf{V} と Φ は(7)式のように変換される。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= W_m \mathbf{V} W_m^T, \\ \Phi' &= W_m \Phi W_m^T, \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{V}' と Φ' は2次元ウェーブレットスペクトラムベクトルである。また、上付き文字 T は転置行列を示す。図3のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルのウェーブレットスペクトラムを図4に示す。

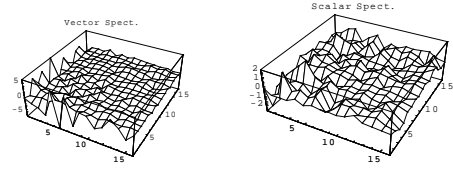


図4 ベクトル(\mathbf{V}')とスカラー(Φ')ポテンシャルのウェーブレットスペクトラム。

データの圧縮はスペクトラムの特定部分のみを残し、他のゼロとすることで行う。ここでは、図4のスペクトラム行列の第1行ベクトルと第1列ベクトルの要素を残し、他の要素をゼロとして圧縮した。図5は図4のそれぞれを圧縮したスペクトラムを示す。

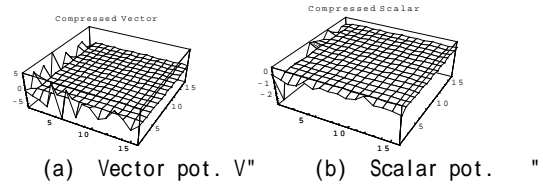


図5 圧縮ウェーブレットスペクトラム。

圧縮ウェーブレットスペクトラム \mathbf{V}'' と Φ'' に対してウェーブレット逆変換は(8)式で行われる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{recovered}} &= W_m^T \mathbf{V}'' W_m, \\ \Phi_{\text{recovered}} &= W_m^T \Phi'' W_m. \end{aligned} \quad (8)$$

図6に(8)式で得られたベクトルポテンシャル $\mathbf{V}_{\text{recovered}}$ とスカラーポテンシャル $\Phi_{\text{recovered}}$ が生成するベクトル分布を示す。

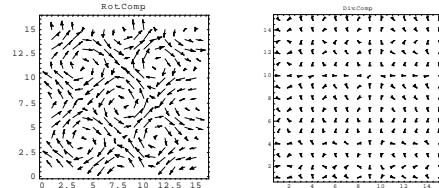


図6 ベクトルポテンシャル($\mathbf{V}_{\text{recovered}}$)スカラーポテンシャル($\Phi_{\text{recovered}}$)それぞれのベクトル分布。

(4)式により、図6のベクトルの和はノイズベクトルを削減したものとなる。図7にノイズを含まない正確なベクトル分布とノイズを削減したベクトル分布の比較を示す。

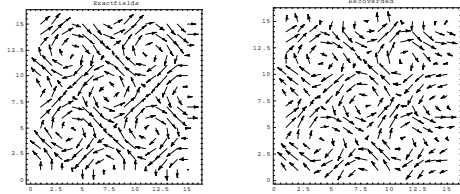
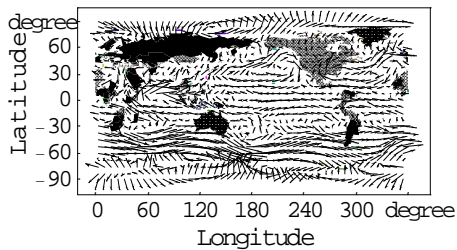


図7 ノイズを含まない正確なモデルベクトル分布と圧縮データから再現したベクトル分布の比較。

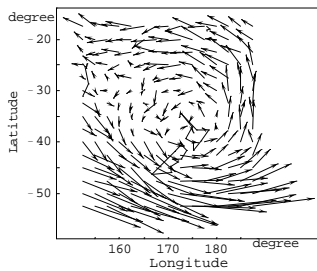
図7の結果から、ノイズを含むベクトルに対して本論文の方法により、大部分のノイズ成分を削減できることが可能であることが判明した。

3. 気象データへの応用

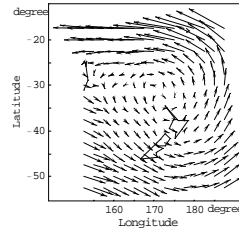
ベクトルデータの応用例として、気象データに適用する。図8は実際に観測した風のベクトル分布(850hPaの高度、NCEP/NCAR再解析データ月平均、 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$)とノイズを削減した結果である。



(a) 観測(風)データ (1993年7月1/3表示)



(b) 観測データの一部分 (ニュージーランド近傍)



(c) (b)の再現データ

図8 (a) 実際の観測(風)データ、(b) 観測データ(a)の一部、(c) (b)の再現データ。

4. まとめ

本論文では、ベクトルデータに含まれるノイズ成分を削除する新しい方法を提案した。すなわち、与えられたベクトルを満足するポテンシャルを求める逆問題を検討した。ヘルムホルツの定理に基づきノイズを含む2次元ベクトルデータからベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを得ることが可能である。そして、それぞれのベクトル、スカラーポテンシャルに離散系ウェーブレット変換を適用し、離散値ウェーブレットのデータ圧縮の効果から、ベクトルデータに含まれるノイズ成分を除去した。具体的な例として、実際の観測(風)データに本手法を適用した結果、ノイズ成分を削減するのに極めて有効であった。

参考文献

- [1] 斎藤兆古著：“Mathematicaによるウェーブレット変換”，朝倉書店、1996年。
- [2] 石田則道：“不適切な線形システムのWavelet変換による解析法の提案”，計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月。
- [3] 松山佐和：“ウェーブレット解析のベクトルデータへの適用”，計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月。
- [4] 松山佐和：“ウェーブレット解析の気象データへの応用”，計算工学講演会論文集、第2巻、第2号、1997年5月。

キーワード.

ウェーブレット変換、ベクトル場、ヘルムホルツの定理、ポテンシャル、不適切問題、最小ノルム法

Summary.

Application of Wavelets Transform to The Vector Fields

Norimichi Ishida Sawa Matsuyama Yuko Oguchi
Computational Science Research Center, Hosei University

Yoshifuru Saito
Department of Electrical Engineering, Hosei University

In order to remove the noisy vector fields from the raw measured fields, this paper proposes a novel approach based on the discrete wavelets transform. At first, the scalar and vector potentials are evaluated from the raw measured vector fields by combining the Helmholtz's theorem and minimum norm methods. Second, we apply the discrete wavelets transform to each of the scalar and vector potentials. Utilizing the data compression ability of the discrete wavelets transform, noise components included in the potentials can be dramatically reduced. Intensive simulations verify the our approach and applications to the practically measured vector fields are demonstrated.

Keywords.

Wavelets transform, Vector field, Helmholtz's theorem, Potential, Ill-posed problem, Minimum norm method