サイバー空間と空間構造

國井利泰
法政大学計算科学研究センター

様々な機器がコンピュータネットワーク上でグローバルに常時接続される時代に入って、Jini を初めとする様々な環境がベンダー等から提案されている。しかし、このようにして創られるサイバー空間の空間構造については、全くといって良いほど科学的研究がなされていない。これは、現実にサイバー空間上に人工世界を合成する工学上の立場からは、基盤無き建築で、重大な問題を提示している。本論では、この問題について、簡単な例を以て、一つのアプローチを提案する。

1. はじめに

家電品、工業製品のほとんどすべての機器にマイクロコンピュータが実装され、さらにそれらが常時グローバルにコンピュータネットワークで結合される時代に入りつつある。Jini は、その一例である[1]。このようにして形成されるサイバー空間とは何か、特にいかなる空間構造を有するかについては、実用上の見地からの考察が迫られるようになった。以下簡単に、この問題についてのアプローチを提示する。

2. 空間構造

我々の住む宇宙の空間構造については、Hawking と Penrose による、特異点理論(singularity theory)に準拠した空間時間理論等が知られている[2]。しかしこれは、より一般的なサイバー空間を構築する上では、参考にはなっても、直接有効ではない。より一般的な空間構造は、セル構造空間(cellular structured spaces)として知られており[3]、もっとも一般的なのは filtration spaces である。さらにそれが closure finite であり、かつ weak topology を満たす場合は、CW-spaces となる。もっと厳しい、diffeomorphic であるという条件を満たす場合は、多様体空間となる。Hawking と Penrose の空間時間理論は、この、極めて制約条件が厳しい場合のセル構造空間の一例になる。

３．セル空間構造

セル構造空間 *cellular structured spaces*、略して *cellular spaces* について、概略を説明する。まず セルは、トポロジー的に n 次元の開ボール $Int\ \mathcal{B}^n$ と同等なトポロジー空間 X であり、n-cell e^n と表記する。 X から、セル接合により、有限あるいは無限のセルの列 X^p を inductive に構成することが出来る。X^p は X の部分空間であるように構成し、 整数$\mathbb{Z}$で索引付ける。このようにして得られる$\{X^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ を *filtration* と呼ぶ。記法では、

X^p *covers* X (or, X^p is a *covering* of X),

すなわち

$X = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} X^p$,

X^{p-1} は X^p, の部分集合

すなわち

$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^{p-1} \subseteq X^p \subseteq \ldots \subseteq X.$

このようにしてXから得られるセル構造空間 $\{X; X^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ を *filtration space* と呼ぶ。

４．セル接合によるセル空間構造構築

開 n-cell e^n を、すでに構築されたトポロジー空間 X に surjectiveかつ連続な写像 f により接合する事により、セル構造空間 Y を構築できる。言うまでもなく、 写像 f: X → Y が surjective であるとは

$(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ [\ f(x) = y\ ]$

を意味する。 写像 f: X → Y が連続であるとは、

“a subset $A \subset Y$ is open in Y if and only if $\{f^{-1}(y) \mid y \in A\}$ is open in X”

を意味する。

$Y \sqcup_f X = Y \sqcup X / \sim$

は attaching space (an adjunction space, an adjoining space)とも呼ばれる。transitivity から、同値関係により、空間を *equivalence classes* の排他的和に分割できる。一つの equivalence class を $x / \sim$と表記しよう。すると

$x / \sim = \{y \in X \mid x \sim y\}$

である。

すべての equivalence class の集合を $X / \sim$と表記すると、それは X の *quotient space* あるいは *identification space* とよばれ

$X / \sim = \{\ x / \sim \in 2^X \mid x \in X\} \subseteq 2^X$

である。

５．セル接合によるセル空間構造構築の応用例

空間構築のコンピュータ支援システムは一般に CAD(computer aided design)system と呼ばれる。

思えば、空間が０次元空間から始めて、１次元、２次元と、inductive に任意の次元までセル接着により矛盾無く構築できることを示した１９５０年に至るまでの J. H. C. Whitehead の研究功績[4]は、Baues が１９９６年にその著書で紹介している[5]。この方法は，サイバー空間構築に於いて極めて有益である。

商用 CAD システムは、もっとも進んだものはグラフ理論に Euler index を応用し、グラフ理論上の有効性は検証できる[6]。しかし、空間構造を、上記のようには、明確に定義していない。従って、例えば、三角錐が同等な稜線で成り立っているという表現すら保証されない。稜線の接合点で、点がダブったり欠落していても、分からない（図１、２）。面の接合部に於いても、稜線の重複、欠落は、表現で

きない。このように、既存の CAD システムは、空間構造が、表現も出来ず、保証も出来ない（図３、４、５）のである。

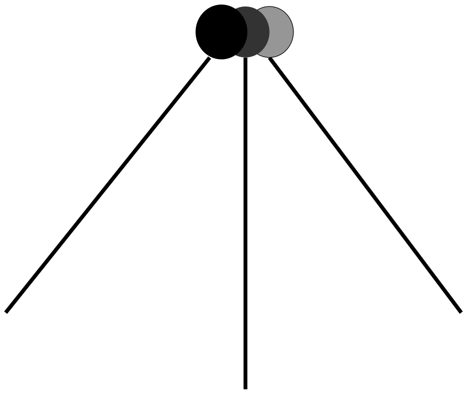

図１　３閉稜線は、同等であるが、稜点が３個重複する

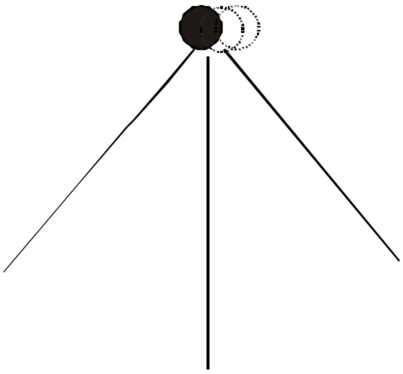

図２　１閉稜線、２開稜線は、稜点の重複を免れるが、稜線の同等性を喪失する

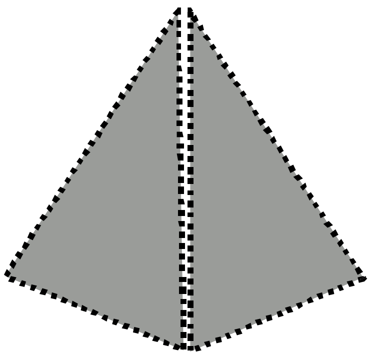

図３　２開面は同等であるが、稜線が喪失する

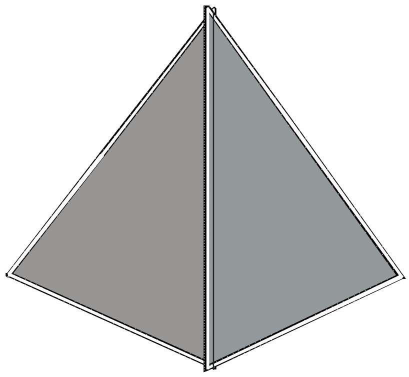

図４　２閉面は同等であるが、稜線の重複をもたらす

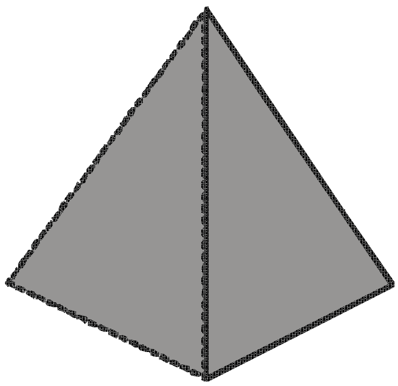

図５　１開面、１閉面は重複しない稜線を与えるが、面の同等性の喪失を招く

サイバー空間のような大規模かつ複雑な空間の設計は、上記のセル接着法によるセル空間構築法のような、空間定義の明確性を要求する。CAD でよく用いられる

1.Wire Frame Modeling
2.Boundary Modeling
3.Solid Modeling

について、セル接着法によるセル空間構築法を、最も簡単な立体である三角錐(tetrahedron)に適用し、その有効性を確認した[7]。次頁に、その概要を、英文で示す。

1. Wire frame modeling of a tetrahedron

We can actually produce a valid wire frame model X^1 by composing X^1, starting from X^0 that consists of 0-cells as the elements, via attaching 1-cells to X^0.

In case of a tetrahedron, X^0 is a set of 4 vertex points

$X^0 = \{ e^0_1, e^0_2, e^0_3, e^0_4 \}$.

A tetrahedron has 6 edges, and we attach their disjoint union

$\sqcup_i \mathcal{B}^1{}_i = \mathcal{B}^1{}_1 \sqcup \mathcal{B}^1{}_2 \sqcup \mathcal{B}^1{}_3 \sqcup \mathcal{B}^1{}_4 \sqcup \mathcal{B}^1{}_5 \sqcup \mathcal{B}^1{}_6$

to X^0 via an attaching map F by identifying each end point $x \in \partial \mathcal{B}^1{}_i$ of an edge $\mathcal{B}^1{}_i$ with a vertex point F(x). Then, as shown in Figure 6, we obtain a valid wire frame model X^1 of a tetrahedron such that

$X^1 = X^0 \sqcup_F (\sqcup_i \mathcal{B}^1{}_i) = X^0 \sqcup (\sqcup_i e^1{}_i)$

where i =1, …, 6, and an attaching map F is

$F: \sqcup_i \partial \mathcal{B}^1{}_i \rightarrow X^0$.

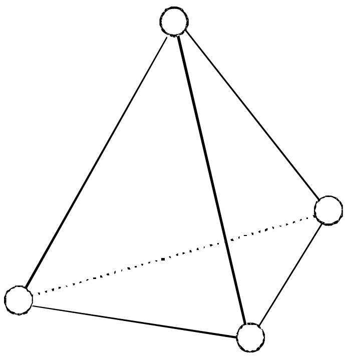

Fig. 6 Composing a wire frame model X^1 of a tetrahedron by attaching 6 1-cells $\mathcal{B}^1{}_i$ to X^0 that consists of 4 0-cells $e^1{}_i$.

2. Boundary modeling of a tetrahedron

A valid boundary model X^2 of a tetrahedron is composed from the wire frame model X^1 by attaching a disjoint union of 4 regular triangular planes

$\sqcup_i \mathcal{B}^2{}_i = \mathcal{B}^2{}_1 \sqcup \mathcal{B}^2{}_2 \sqcup \mathcal{B}^2{}_3 \sqcup \mathcal{B}^2{}_4$

to it via an attaching map G

$G: \sqcup_i \partial \mathcal{B}^2{}_i \rightarrow X^1$ where i = 1, …, 4

by identifying the boundary line $\lambda \in \partial \mathcal{B}^2{}_i$ of each plane $\mathcal{B}^2{}_i$ with a part G(λ) of the wire frame model X^1. The boundary model X^2 thus composed is, as shown in Figure 7,

$X^2 = X^1 \sqcup_G (\sqcup_i \mathcal{B}^2{}_i) = X^1 \sqcup (\sqcup_i e^2{}_i)$

where i = 1, …, 4.

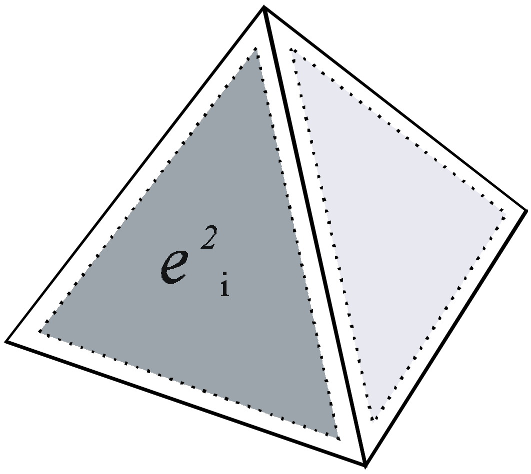

Fig. 7 Composing a boundary model X^2 of a tetrahedron by attaching 4 2-cells $\mathcal{B}^2{}_i$ to the wire frame model X^1.

3. Solid modeling of a tetrahedron

Now we compose a valid solid model X^3 of a tetrahedron from the boundary model X^2 by attaching a 3-dimensional ball $\mathcal{B}^3$ to it via an attaching map H

$H: \partial \mathcal{B}^3 \rightarrow X^2$

by identifying the boundary plane $\pi \in \partial \mathcal{B}^3$ of the ball $\mathcal{B}^3$ with the inside boundary plane H(π) of the boundary model X^2 . The solid model X^3 obtained is (Figure 8)

$$X^3 = X^2 \sqcup_H \mathcal{B}^3 = X^2 \sqcup e^3.$$

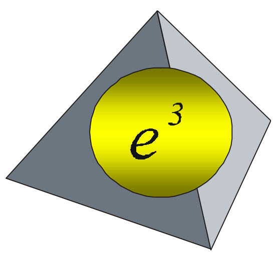

Fig. 8 Composing a solid model X^3 of a tetrahedron by attaching a 3-cell $\mathcal{B}^3$ to the boundary model X^2.

参考文献

[1] www.sun.com

[2] S. Hawking , R. Penrose, “The Nature of Space and Time”, Princeton University Press, 1996.

[3] F. Fritsch and R. A. Piccinini, “Cellular Structures in Topology”, Cambridge University Press, Cambridge; 1990.

[4] J. H. C. Whitehead, “Combinatorial Homotopy I”, Bulletin of American Mathematical Society, 55 巻, 213-245 頁, 1949 年.

[5] H.-J. Baues, “Homotopy Type and Homology”, Oxford University Press, 1996.

[6] H. Chiyokura, “Solid Modeling with DESIGNBASE: Theory and Implementation”, Addison-Wesley, 1988.

[7] T. L. Kunii, “Computational Shape Modeling: Valid vs. Invalid”, Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Applications '99 (SMI99), (March 1-4, 1999, Aizu-Wakamatsu, Japan) in press, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, U. S. A.

キーワード.

セル空間構造、サイバー空間、CAD

Summary.

Cyberspaces and Spatial Structures

Tosiyasu L. Kunii
Computational Science Research Center, Hosei University

In the era of global 24 hour networking of varieties of devices and equipment, new environments such as Jini have been proposed by different vendors. There is a lack of basic scientific research on the spatial structures of the cyberspaces thus created. From engineering view points, the situation is exactly the construction without the foundation. It poses great difficulties in constructing the world of artificial in cyberspaces. This paper presents a simple approach to solve the difficulties.

Keywords.

Cellular spatial structures, cyberspaces, CAD