

ウェーブレット解析によるベクトルデータのノイズ低減

松山 佐和, 小口 雄康
法政大学計算科学研究センター

齋藤 兆古
法政大学工学部

これまでのウェーブレット変換の適用例は波形データの周波数解析や画像データの圧縮などが大部分である。本稿ではベクトルデータにウェーブレット変換を適用することを試みる。ノイズを含むモデルベクトルデータを設定し、これをウェーブレット変換することで、ベクトルデータにおいてもスカラーデータと同様の方法でデータを圧縮でき、ノイズ成分の低減が図れることを示す。

1. はじめに

離散値系ウェーブレット変換の特徴は、データの特性をウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット近傍に抽出すること、および、多重解像度解析によりデータの各レベルによる変化率を抽出することにある[1], [2]。ここでは、ベクトルデータへウェーブレット変換を適用することを試みる。ベクトルデータは、空間座標上の1点で多成分からなるデータである。ある点において1つの成分が圧縮されてゼロと見なせても、残る成分がゼロと見なせなければデータの圧縮はできないため、ベクトルデータの圧縮効果はスカラーデータのように期待できない。しかし、ベクトルデータのウェーブレット変換を種々の異なる基底関数を用いて行ってみると、ベクトルデータのウェーブレット変換においてもスカラーデータの場合と同様に、大きなベクトルがウェーブレットスペクトラムのマザーウェーブレット近傍に集中することが示される。この特徴を利用してノイズを含むベクトルデータをウェーブレット変換し、スカラーデータと同様にデータの圧縮および多重解像度解析によりノイズ成分の低減が平面ベクトル場において可能であることを示す。

2. ベクトルデータのウェーブレット変換

一般に、1次元のウェーブレット変換は、

$$X' = WX \quad (1)$$

で表される。ここで、 X は n 次の列ベクトル、 X' はウェーブレット変換スペクトラム、 W は $n \times n$ のウェーブレット変換マトリックスである。これを発展させ、列ベクトル X の要素がそれぞれ2成分からなるベクトルである場合を考える。2次元ベクトル V の x 成分 V_x 、 y 成分 V_y はそれぞれ直交するベクトル成分であるから、ベクトルのウェーブレット変換は成分ごとのウェーブレット変換

$$\begin{aligned} V'_x &= WV_x \\ V'_y &= WV_y \end{aligned} \quad (2)$$

で定義される。すなわち V'_x 、 V'_y は V のウェーブレット変換スペクトラム V' の x 成分、 y 成分となる。

次に、一般に2次元のウェーブレット変換は

$$S = W_m \cdot M \cdot W_n^T \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 S はウェーブレットスペクトラム、 M は $m \times n$ の長方マトリックス、 W_n および W_m はそれぞれ $n \times n$ 、 $m \times m$ のウェーブレット変換マトリックスである。これをベクトルのウェーブレット変換に発展させる。 M のそれぞれの要素が2成分からなるベクトルデータとする。1次元の場合と同様に各成分に分けてウェーブレット変換し、得られたスペクトラムを各成分とするスペクトラムをベクトルデータの変換スペクトラムとする。

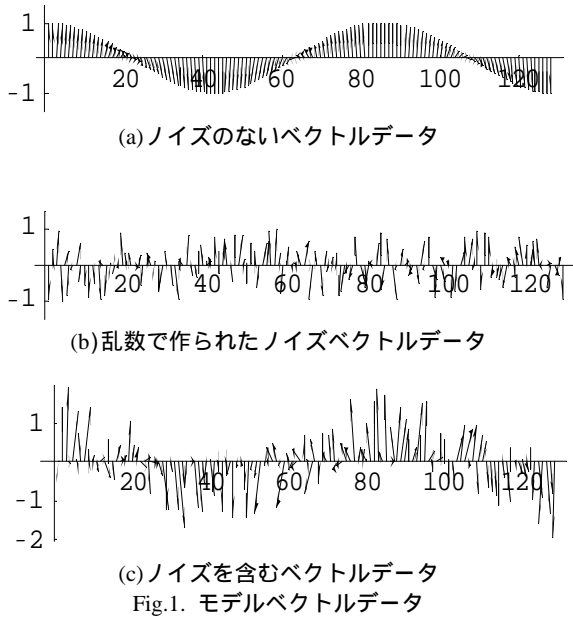
3. モデルベクトルデータのウェーブレット変換例

3.1 1次元ベクトル

まず、1次元のモデルベクトルデータを設定する。データの個数を n としたときの i 番目のベクトルを

$$V_i = \left(\sin\left(\frac{3\pi}{n}i\right), \cos\left(\frac{3\pi}{n}i\right) \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

とする。また、ノイズベクトルを乱数で作成し、モデルベクトルデータとの和をノイズを含むデータとする。ここではノイズベクトルデータをモデルベクトルデータと同程度の大きさ(-1から1)としている。Fig.1にモデルベクトルデータを示す。データ数 $n = 128$ である。(a)はノイズのないベクトルデータ、(b)は乱数で作られたノイズベクトルデータ、(c)はノイズを含むベクトルデータで



ある。ここで、ノイズを含むベクトルデータを成分ごとに分けてウェーブレット変換する。基底関数にドビッシェの 2 次を用いたウェーブレットスペクトラムベクトルを Fig.2 に、ドビッシェの 20 次を用いたものを Fig.3 に示す。これらの 2 つの図に示されるように大きなベクトルがマザーウェーブレット近傍に集中していることがわかる。これはベクトルデータもスカラデータと同様に圧縮可能であることを意味する。

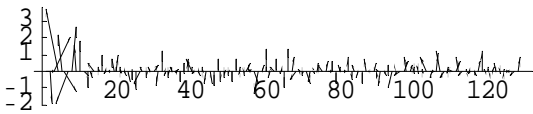


Fig.2. 基底関数にドビッシェの 2 次を用いた場合のウェーブレットスペクトラム

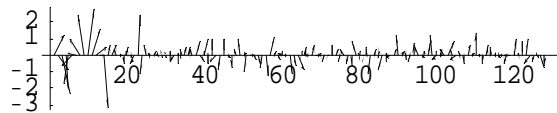


Fig.3. 基底関数にドビッシェの 20 次を用いた場合のウェーブレットスペクトラム

そこでベクトルデータを、マザーウェーブレット近傍のデータを残し他をゼロとする方法で圧縮してみる。圧縮したデータを逆変換して再現されたデータの再現率を斎藤[1]は相関係数を用いて評価している。データの圧縮率と再現率を比較するため圧縮率に対する相関係数を求める。Fig.4 は Fig.2 に示される基底関数にドビッシェの 2 次を用いたウェーブレットスペクトラムを圧縮して再現した場合、Fig.5 は Fig.3 に示される基底関数にドビッシェの 20 次を用いたウェーブレットスペクトラムを圧縮して再現した場合の相関係数である。

これらの図から Fig.1 の(a)のノイズのないデータを最もよく再現するのは、データ数を 16 に圧縮した場合であることがわかる。ここでは基底関数にドビッシェの 2

次と 20 次を用いた場合を示したが他の基底関数を用い

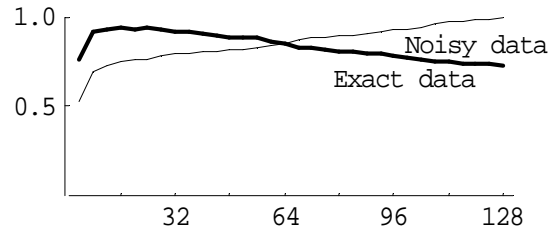


Fig.4. 基底関数にドビッシェの 2 次を使用した場合の再現率を示す相関係数

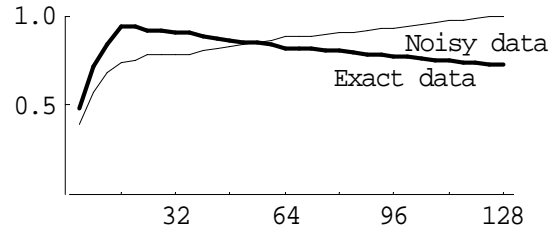


Fig.5. 基底関数にドビッシェの 20 次を使用した場合の再現率を示す相関係数

てもほぼ同様の結果が得られる。

Fig.6、Fig.7 にデータを 8 分の 1 に圧縮した場合、すなわち、マザーウェーブレット近傍の 16 個を残し他をゼロとして逆変換して再現されたベクトルデータを示す。このベクトルデータは、明らかに Fig.1 の(c)のノイズを含むベクトルデータからノイズが低減され、Fig.1 の(a)のノイズを含まないベクトルデータに近くなっていることがわかる。すなわち、ベクトルデータの圧縮はノイズを低減する。データの再現率を評価する相関係数はそれぞれ 0.94、0.95 であり、よい再現性を示す。

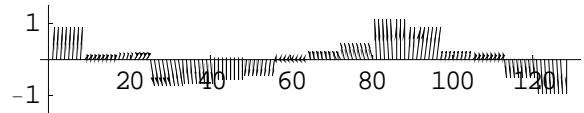


Fig.6. 8 分の 1 に圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ (基底関数にドビッシェの 2 次を使用)

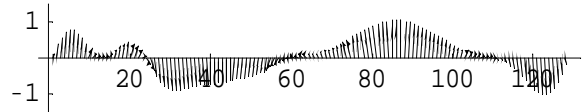


Fig.7. 8 分の 1 に圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ (基底関数にドビッシェの 20 次を使用)

多重解像度解析結果はウェーブレットスペクトラムを各レベルのスペクトラムに分解し、その部分ウェーブレットスペクトラムをそれぞれ逆変換して得られる。Fig.2 のウェーブレットスペクトラムを多重解像度解析して得られた結果が Fig.8 である。(1)はマザーウェーブレットだけによるベクトルであり、データの平均的な方向を表している。ここでは、全体としてのベクトルの大きさはほとんどない。(2)以降は各レベルにおけるベクトルの方

向を表している。Fig.8の多重解像度解析の結果から高周

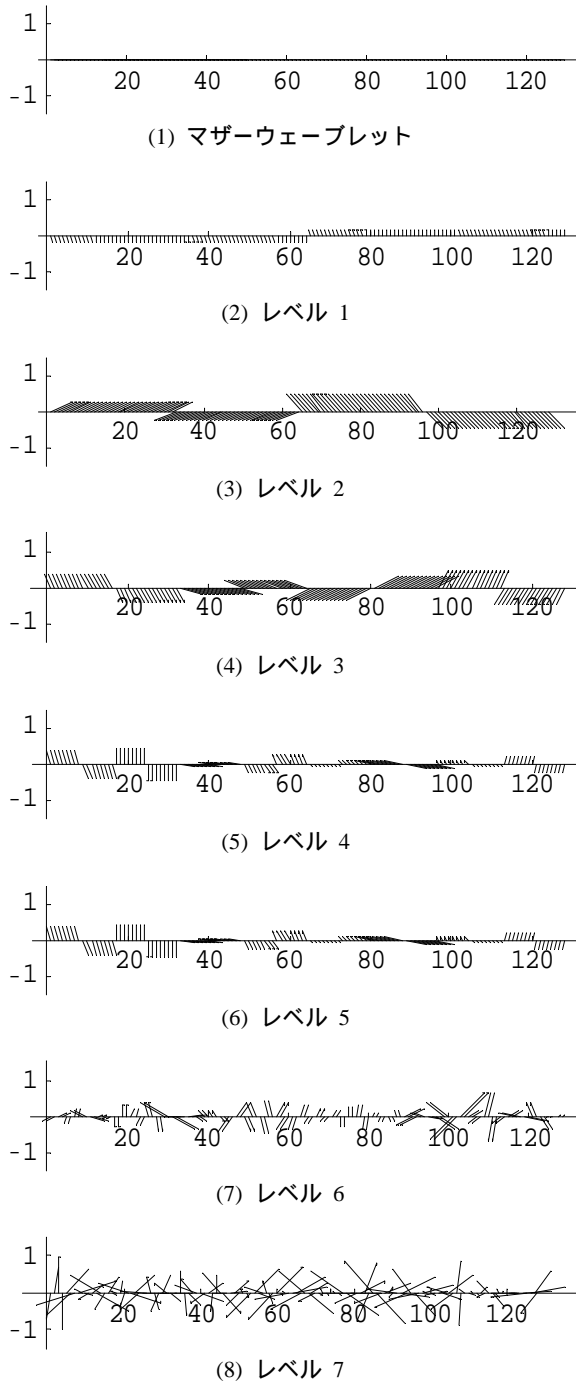


Fig.8. 多重解像度解析 (1)~(8)は各部分スペクトラムを逆変換して得られたベクトルデータ (基底関数にドビッシーの2次を使用)

波数部分の(6)から(8)を除いたものが Fig.9 で、Fig.1 の(a) のノイズを含まないデータと比較してほぼ一致することがわかる。この結果は多重解像度解析によりノイズの低減が図れることを意味する。前述のように相関係数を求めると 0.94 であり、Fig.6 の単純な圧縮は高周波ノイズを低減していることが分かる。また圧縮した残りの高周波部分を逆変換して再現したものが Fig.10 でこれは Fig.1 の(b) のノイズベクトルデータと一致していることが明らかである。ノイズベクトルデータとの相関係数は 0.91 で

ある。

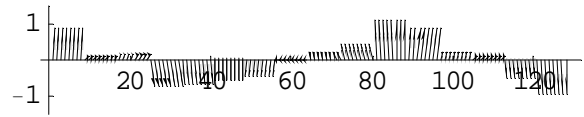


Fig.9. Fig.8 の高周波部分を除いて圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ

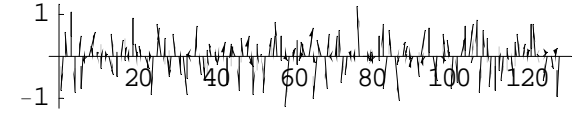


Fig.10. Fig.8 の高周波部分のデータから再現されたベクトルデータ

同様の多重解像度解析を Fig.3 の基底関数にドビッシーの 20 次を使用した場合のウェーブレットスペクトラムについて行ってみる。その結果が Fig.11 である。(1)はマザーウェーブレットだけによるベクトルである。基底関数の次数が高いためマザーウェーブレットのみでもとのデータを表していることがわかる。(2)以降の各レベルにおけるベクトルの方向はランダムである。

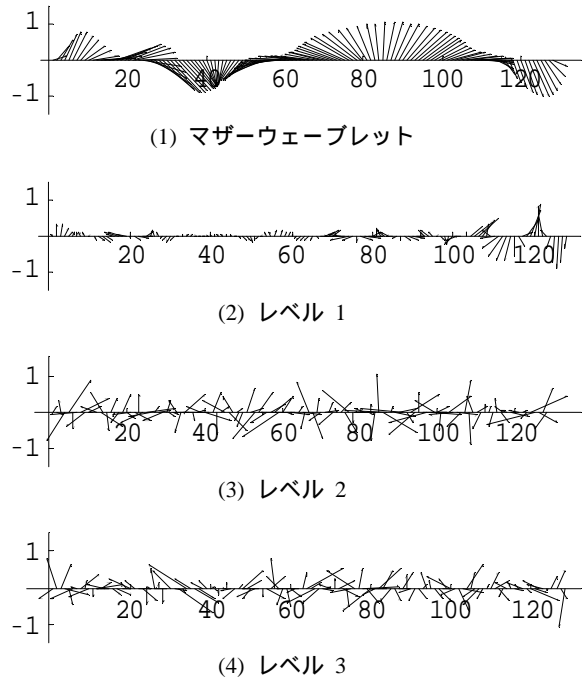


Fig.11. 多重解像度解析 (1)~(4)は各部分スペクトラムを逆変換して得られたベクトルデータ (基底関数にドビッシーの20次を使用)

Fig.11 の多重解像度解析の結果から高周波数部分の(2)から(4)を除いたものが Fig.12 で、同様に Fig.1 の(a) のノイズを含まないデータと比較してほぼ一致することがわかる。相関係数は 0.95 である。また圧縮した残りの高周波部分を逆変換して再現したものが Fig.13 で同様に Fig.1 の(b) のノイズベクトルデータと一致していることが明らかである。ノイズベクトルデータとの相関係数は 0.92 である。

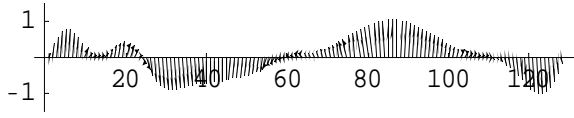


Fig.12. Fig.11 の高周波部分を除いて圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ

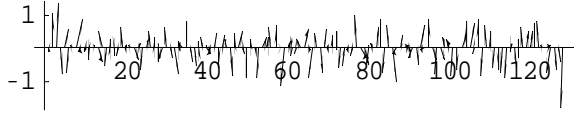


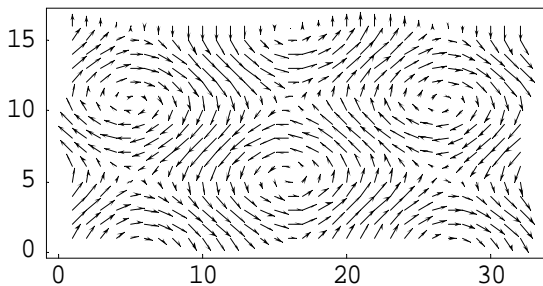
Fig.13. Fig.11 の高周波部分のデータから再現されたベクトルデータ

3.2 2次元ベクトル

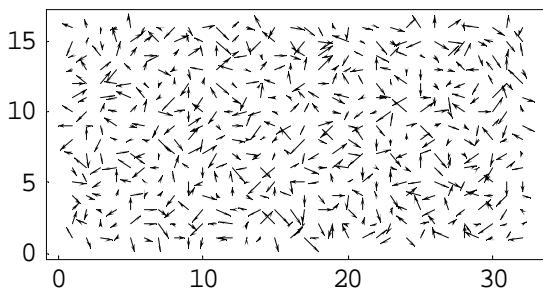
2次元のモデルベクトルデータを設定する。データマトリックスの大きさを $m \times n$ としたときの i 行 j 列の要素ベクトルを

$$V_{ij} = \left(\sin\left(\frac{3\pi}{m}i\right), \cos\left(\frac{3\pi}{n}j\right) \right), \quad i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n \quad (5)$$

とする。また、ノイズベクトルデータを元のデータと同程度の大きさの乱数で作成しておく。Fig.14 にモデルベクトルデータを示す。ここでは $m=16, n=32$ とする。(a)はノイズのないベクトルデータ、(b)は乱数で作られたノイズベクトルデータ、(c)は(a)と(b)の和でノイズを含むベクトルデータである。次に、ノイズを含むベクトルデータをウェーブレット変換する。ノイズを含むベクトル

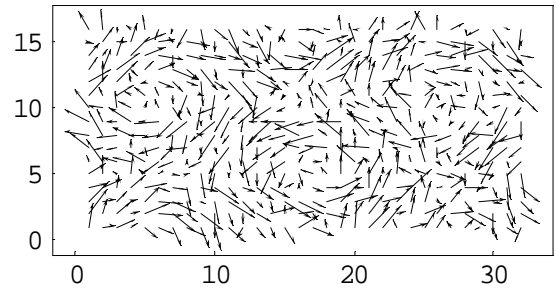


(a)ノイズのないベクトルデータ



(b)乱数で作られたノイズベクトルデータ

Fig.14. 続く



(c)ノイズを含むベクトルデータ
Fig.14. モデルベクトルデータ

ルデータを成分ごとにウェーブレット変換しウェーブレットスペクトラムを求める。これをベクトル表示したのが Fig.15 である。やはり、大きなベクトルがマザーウェーブレット近傍に集中しており、ベクトルデータもスカラーデータと同様に圧縮可能であることを意味する。

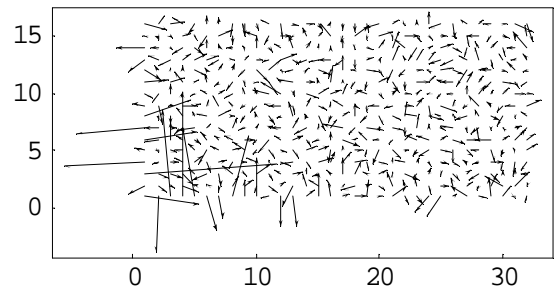


Fig.15. 基底関数にドビッシーの2次を使用した場合のウェーブレットスペクトラム

次にベクトルデータを圧縮する。ウェーブレットスペクトラムで、マザーウェーブレット近傍の 8×16 の部分行列を残し他をゼロとする。すなわち、データを4分の1に圧縮する。Fig.16 が4分の1に圧縮されたデータを逆変換して再現されたベクトルデータである。Fig.16 のベクトルデータは、明らかに Fig.14 の(c)のノイズを含むベクトルデータからノイズが低減され、Fig.14 の(a)のノイズを含まないベクトルデータに近づいていることがわかる。同様に求めた相関係数は0.90でありよい再現性を示している。すなわち、ベクトルデータの圧縮はノイズを低減する。

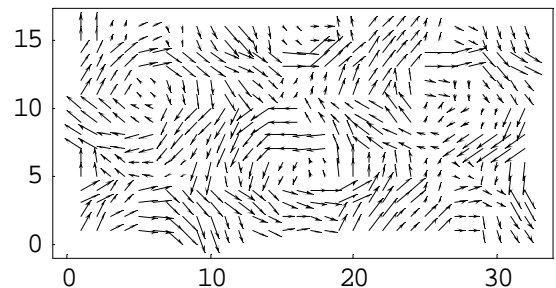


Fig.16. 4分の1に圧縮されたデータから再現されたベクトルデータ

ここで、圧縮の方法を変えてみる。ウェーブレットスペクトラムの1行1列のみを残して他を0としたもの (Fig.17) を逆変換して再現したものが Fig.18 である。

Fig.14 の(a)のノイズのないベクトルデータを非常によく

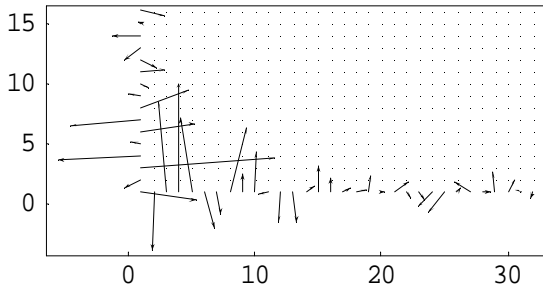


Fig.17. ウェーブレットスペクトラムの1行1列のみを残して他を0としたもの

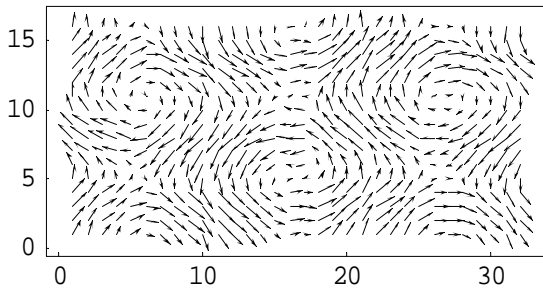
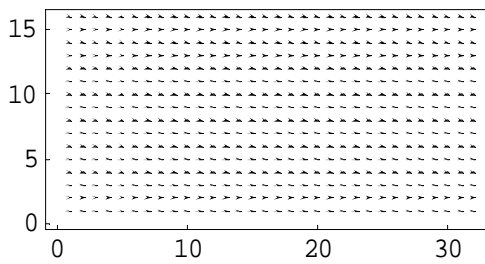


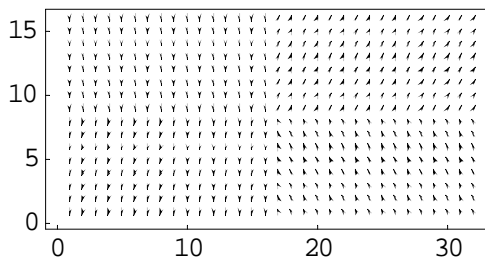
Fig.18. Fig.17 のウェーブレットスペクトラムを逆変換して再現されたベクトルデータ

再現している。相関係数は0.97である。

次に、多重解像度解析によるデータ圧縮を試みる。Fig.15 のウェーブレットスペクトラムの各レベルの部分ウェーブレットスペクトラムを逆変換した結果を Fig.19 に示す。(1)はマザーウェーブレットだけによるベクトルであり、データの平均的な方向を表している。ここでは、ベクトルの大きさはほとんどない。(2)以降は各レベルのベクトルの方向を表している。Fig.20 は各レベルのベクトルの総和であり、もとのベクトル Fig.14 の(c)を再現している。Fig.19 の結果で、(5)および(6)はランダムな方向のベクトルであるから、ノイズベクトルであることがわ

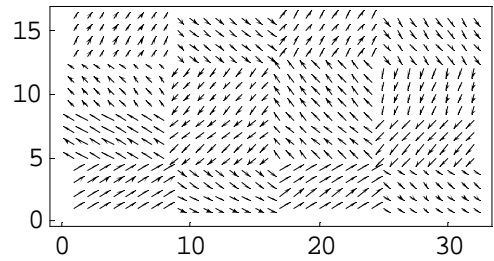


(1) マザーウェーブレット

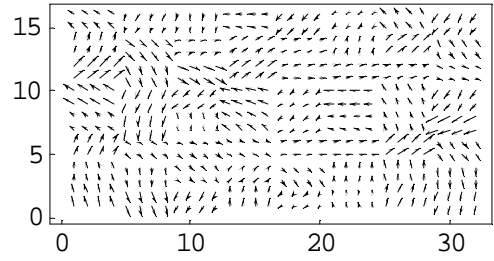


(2) レベル 1

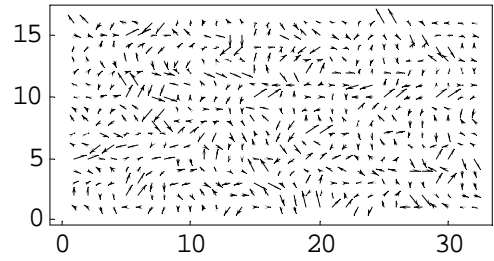
Fig.19. 続く



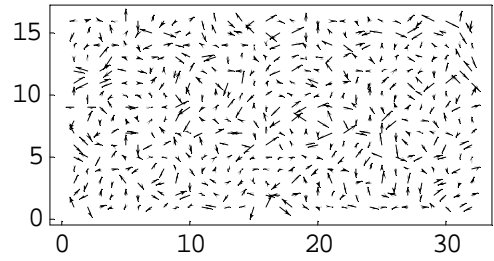
(3) レベル 2



(4) レベル 3



(5) レベル 4



(6) レベル 5

Fig.19. 多重解像度解析 (1)~(6)は各レベルの部分スペクトラムを逆変換して得られたベクトルデータ

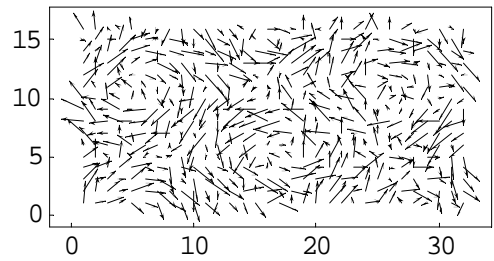


Fig.20. 各レベルのベクトルの総和

かる。Fig.21 は高周波部分のノイズ成分(5)と(6)を除いて逆変換した結果である。Fig.14 の(a)と比較してほぼ正確

に再現されることがわかる。同様に相関係数を求めると

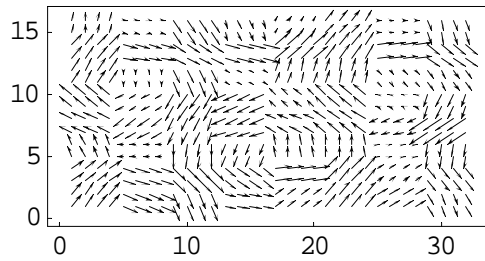


Fig.21 ノイズ成分を除いたベクトル

0.91 である。

4. おわりに

本稿では、ベクトルデータにウェーブレット変換を適用した結果、ベクトルデータにおいてもスカラーデータの場合と同様にデータの支配的なベクトル分布が抽出可能であることを示した。また、ベクトルデータの持つ方向性を利用して、ランダムな方向を持つベクトルを除くことでフィルター演算が可能であることも判明した。今回はモデルベクトルデータについてウェーブレット変換を試みたが、測定データへの応用も試みている。

参考文献

- [1] 齊藤兆古著, "Mathematica によるウェーブレット変換", 朝倉書店, 1996, 9.
- [2] 榊原進, "ウェーブレットビギナーズガイド", 東京電機大学出版局, 1995.

キーワード.

ウェーブレット変換、ノイズ低減、ベクトルデータ圧縮

Summary.

The Vector Data Noise Reduction by the Wavelets

Sawa Matsuyama, Yuko Oguchi
Computational Science Research Center, Hosei University

Yoshifuru Saito
College of Eng., Hosei University

One of the distinguished properties of the wavelet transform is that the major dominant factors can be extracted from the data. Major applications of the wavelet transform have been focused on the waveform analysis and image data compression. In the present paper, we apply this property to the vector data. As a result, we have succeeded in reducing the noisy vector data into noise free fine data.

Keywords.

Wavelet transform, Noise reduction, Vector data compression