

流体解析における B-スプライン制御での形状最適デザイン

A Shape Optimization with B-Spline Function in Fluid Flow Analysis

山口清道¹⁾ 竹内則雄²⁾

Kiyomichi Yamguchi, Norio Takeuchi

¹⁾ 法政大学大学院デザイン工学研究科

²⁾ 法政大学理工学部機械工学科

This research shows the formulation about the optimal shape design of a product in consideration of the influence of a fluid property, and shows the example related to the optimal shape design of the air deflector of the big track which assumed the two-dimensional state. B-spline control is used to apply the influence of a complex fluid property to the shape representation. Then simplex method is applied to linear optimization techniques to reduce computational load. The optimal shape design was obtained by the minimum design variable by using the control point of B-spline as a design variable.

Key Words: B-spline, Optimization, FEM, Fluid Flow Analysis, Air deflector,

1. はじめに

近年、航空機や新幹線、自動車部品などの工業製品の開発において、数値解析と最適化アルゴリズムを組み合わせて形状デザインを決定する方法が幅広く活用されている。初期デザイン段階から最適設計ツールを用いることで、力学的な影響を考慮した初期形状の指針の決定が容易になり、その後の形状修正のサイクルがより短縮化できる。

このような最適設計における重要な要素として、設計変数・目的関数・制約条件の3つをあげることができる。これらのうちの設計変数は、形状最適化に対して形状モデルを定義する変数である。従来、数値計算において形状モデルを作成するために設定される計算格子の節点を、設計変数とする方法が広く用いられてきた。そのため、格子を細かくして数値計算の精度を上げると、設計変数の数も増加する。この設計変数の数が膨大になるほど、最適設計サイクルに対する計算時間が増加する。また、最適形状が歪むこともあり、そういった場合には設計の有用性が失われることもある。

最適化のために用いられる代表的な数値解析法として、有限要素法がある。一般的な有限要素法による離散化解析では、計算格子生成により、CAD(Computer Aided Design)で設計した滑らかな曲線データが失われる。こういった点を克服するため、Hughes^{1,2)}らは、CADの形状表現をそのまま利用するため、B-spline曲線を用いて試行関数を表すIsogeometric解析を提案している³⁾。それにより、計算格子生成をしてもCADデータを失われずに一連のデータで数値解析および再設計が可能になる。

したがって、計算格子を用いた最適設計の問題点に対して、このIsogeometric解析を適用することが考えられる。つまり、設計変数を有限要素法の計算格子に対する最適設計ではなく、CADの形状表現であるB-spline曲線そのものを利用して最適設計を行う方法が考えられる。

そこで本論文では、CADで主流の制御点を補間して滑らかな形状を描くB-spline曲線を形状最適化問題における設計変数とする方法を提案し、その有用性を検証する。

2. 形状最適デザイン適用モデルについて

形状最適デザインのモデル例として、Fig.1 に示すトラックの導風板を取り上げる。走る壁ともいえる長距離輸送が多いトラックは物流にとって欠かせないものであり、燃費向上や乗り心地の観点から荷台にも影響してくる導風板の形状は重要とされる。導風板形状は、ダウンフォースを利かせた物や荷台後方への整流を考慮した形状などの様々なものがある。このような様々な形状を表すためには、B-spline 曲線での形状表現が効果的である。そこで、本論文では空力特性による導風板形状の最適化を B-spline 制御により検討する。



Fig.1 The Air Deflector of the Big Track 4

計算のモデル化にあたり、Fig.2 のように、導風板形状を、x 方向の幅 1600 mm、y 方向の高さ 640 mm、z 方向の奥行 2000 mm とする。流れを単純にするために、運転席部分はモデルに含めず導風板のみとする。

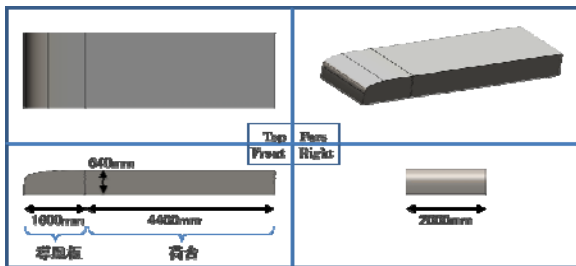


Fig.2 Model of the Air Deflector

計算領域は Fig.3 のように、横幅 7500 mm、高さ 3500 mm、奥行き 400 mm の空間としており、境界条件の影響を排除するため、図のようにモデル先端から 2500 mm の余裕を持たせている。モデル周りの流体は空気と仮定する。また、初期速度は高速道路で走行していると仮定し、時速 80 km に設定する。対象モデルの圧力・せん断応力を求めるために、Solid Works によりモデル設計を行い、数値解析・可視化を行う。この結果に線形最適化の 2 段階シンプレックス法を適用して最適な形状を導き、再び Solid Works を用いて評価する。

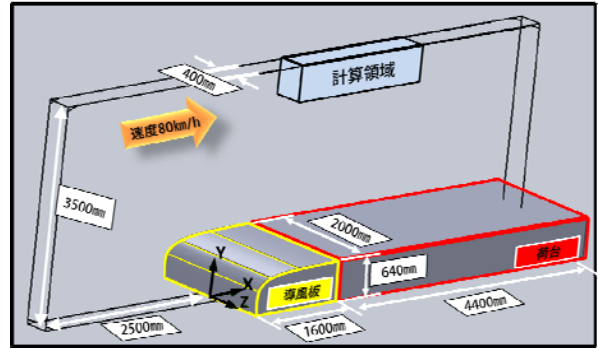


Fig.3 Numerical Model and Computational Space

3. 形状最適デザインのための設計条件

3.1 設計変数

一般的に形状最適化における設計変数としては、形状を直接的に表現するパラメータを用いる。設計変数が多い方が製品形状を精密に表現できるが、その分計算量が増加し最適解を求めるための計算時間が増加する。このため、できるだけ最小限の設計変数にした方が望ましい。形状を示す式は、2 次、あるいは 3 次関数の多項式やベジェ、B の spline 関数で表現することが多い。本論文では、CAD への互換性・操作性と形状表現の豊かさを考慮し、B-spline 曲線を用いる。

この B-spline とは Basis-spline のことで、spline 関数の基礎を表している。spline 曲線はこの B-spline 関数の重ね合わせで表現される⁵。また、spline 曲線を表す場合、通過点を用いる方法と制御点を用いる方法がある。ここでは、設計の簡易性のために制御点を設計変数とする。関数の重ね合わせと制御点を補間することにより、少ない設計変数で滑らかに様々な曲線を表現することができる。

B-spline 曲線の特徴である、基底関数の重ね合わせによる補間方法で用いる (K-1) 次の B-spline の基底関数 $B_{i,k}(x)$ は漸化式で以下の様に表せる。

$$B_{i,K}(t) = \frac{t - q_i}{q_{i+K-1} - q_i} B_{i,K-1}(t) + \frac{q_{i+K} - t}{q_{i+K} - q_{i+1}} B_{i+1,K-1}(t) \quad (1)$$

これは、 $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+k}$ の節点で q に関する K 階の差分商をとったもので、パラメータ t は、 i 番目のデータ点に対して $i \leq t < i+1 (i=0,1,\dots,N-2)$ の範囲の値をとる。式(1)を解くために出発値として、式(2)および Fig.4 の 0次 (K=1) の B-spline を用いる。

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & (q_i \leq t < q_{i+1}) \\ 0 & (t < q_i, q_{i+1} \leq t) \end{cases} \quad (2)$$

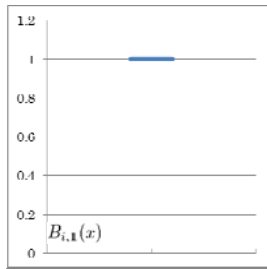


Fig.4 Basis Functions of Order 0 : $B_{i,1}(x)$

0次のB-spline以降は、Fig.5の1次・2次..., と必要とされる次数のB-splineまで基底関数を重ね合わせて求める。

本論文では、K=4の3次B-spline曲線を考えており、1次・2次・3次の重ね合わせによってFig.6のような基底関数を用いる。

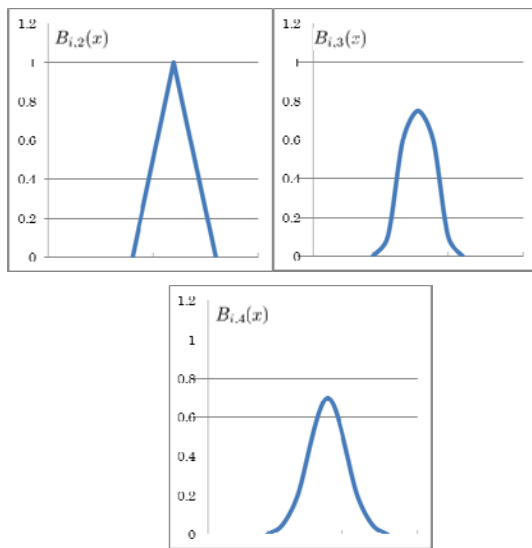


Fig.5 Basis Functions of Order 1,2,3 ($B_{i,2}(x), B_{i,3}(x), B_{i,4}(x)$)

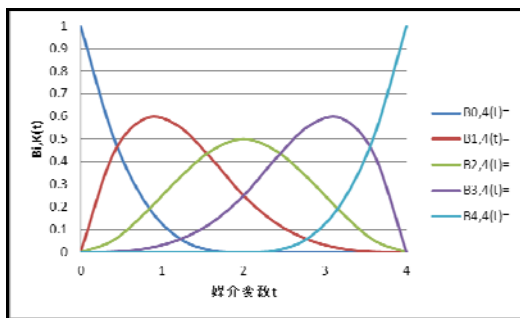


Fig.6 Basis Functions of 3rd Order B-spline

このとき、この3次の基底関数を用い、N個の制御点を指標として、利用する3次B-spline曲線を表すと次のようになる。

$$X(t) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)B_{i,4}(t) \quad (3)$$

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} y(i)B_{i,4}(t) \quad (4)$$

本論文では、この制御点の個数をN=5とする。このとき、3次のB-spline曲線を描くとFig.7となる。

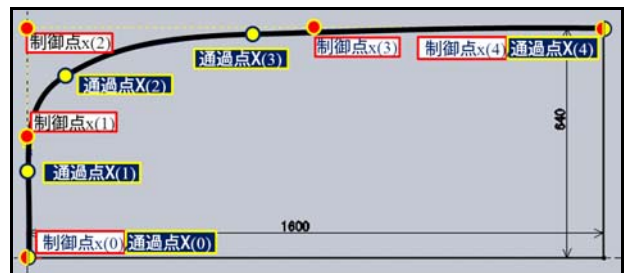


Fig.7 B-spline Curves of 3rd Order (Control Points=5)

ここで、Fig.7の赤点、 $x(i), y(i)$ は制御点の座標であり、また、Fig.7の黄点、 $X(t), Y(t)$ は曲線上を通過している点を表している。

3.2 目的関数

流体解析の目的関数として、揚力最大化や揚抗比最大化、抗力最小化などが挙げられる。本論文の適用例であるトラックの導風板形状では、燃費向上や乗り心地安全性を目的とするため、空気抵抗を目的関数とし最小化を考える。

この物体に働く流体抵抗は、圧力抵抗と摩擦抵抗の成分に分けることができる。摩擦抵抗は粘性作用により生じるもので、物体表面の接線方向に作用する。圧力抵抗とは粘性と圧力により生じるもので、物体表面の垂直方向に作用する。この流体抵抗の代表的な評価方法として、2つの計算方法がある。1つは物体表面に働く応力を直接積分して抵抗を計算する方法であり、もう一つは保存則を物体のまわり全体の流体領域に適用する手法である。本論文では、物体表面の一部分の抵抗力を評価するために前者の応力積分に基づく計算方法⁶を用いる。

2次元ナビエ・ストークス方程式をFEMで解析することにより、 x, y 方向の流速 u, v および圧力 p を求めることができる。本論文では、その値を用いて応力を計算し、応力テンソル P の成分である垂直応力とせん断応力を求める。

いま、物体表面上の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ とすると、物体表面に働く単位面積あたりの力のベクトルは、 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ で与えられる。したがって、物体に働く流体力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ は物体表面上 S で積分することにより以下ようになる。

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} dS \quad (5)$$

このうちx軸方向の力が流体抵抗であるから、これを R とすると、以下のようになる。

$$R = F_x = \iint_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) dS \quad (6)$$

この式で、例えば $n_x dS$ は x 軸に垂直な面 (yz 平面) への dS の射影面を示しているので、 $\sigma_x n_x dS$ はこの微小面に働く x 方向の力を示していることがわかる。Fig.8は、物体表面の微小部分を拡大し、2次元的に切り出した図である。式(6)はこの図の微小面に働く力を物体全体にわたって積分していると考えることができる。

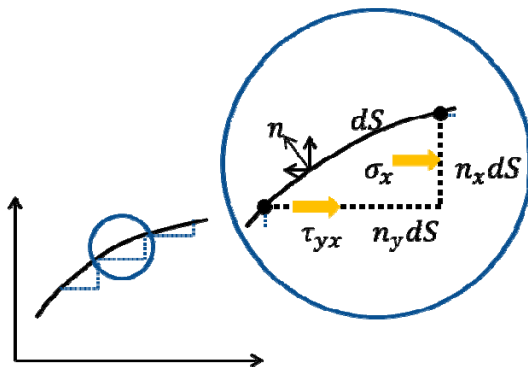


Fig.8 Surface Force on the Body Surface

このように、ナビエ・ストークス方程式を解いて速度・圧力を求め、物体表面上の応力分布を導く。そして、物体表面上の応力積分を行うことで空気抵抗を求めることができる。

本論文の導風板形状問題の場合、圧力に比べ粘性 μ による力が十分に小さいので無視すると、

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \simeq 0 \quad (7)$$

と考えることができるので、 σ_x は次のように求められる。

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -p \quad (8)$$

これより、式(6)は、次のように簡単に表すことができる。

$$R = F_x = \iint_S (-pn_x + \tau_{xy} n_y) dS \quad (9)$$

ここで、空気抵抗力を B-spline 曲線に沿って求めるが、近似的に Fig.9 のように各制御点間を線形に補間して考える。

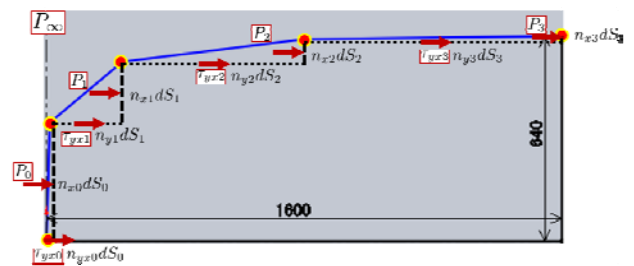


Fig.9 Stress Integration between Each Node(Drag)

式(9)の p は、各通過点間の圧力 $P_j (j = 0, 1, 2, 3)$ と大気圧 P_∞ の差で表せるので

$$p = (P_j - P_\infty) \quad (10)$$

となる。Fig.9 のせん断力 τ_{yx} と法線ベクトル $n_{xj} n_{yj}$ 考慮し、導風板に及ぼす空気抵抗 F_x を求めると

$$R = F_x = \iint_S ((P_j - P_\infty) n_{xj} + \tau_{yx} n_{yj}) dS \quad (11)$$

となる。 τ_{yx} も圧力に比べ小さくなるが、 n_y が表す x 軸方向の設計変数を最適化計算に入れるため、 n_y に影響するせん断応力は無視しない。

ここで、 x, y の合計 10 個の制御点を設計変数として形状を定義するため、目的関数の空気抵抗を求め式(11)の $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ に、この設計変数を組み込む必要がある。まず、各法線は通過点 $X(t), Y(t)$ の差分であるため、

$$n_{xj} dS_j = Y(t+1) - Y(t) \quad (12)$$

$$n_{yj} dS_j = X(t+1) - X(t) \quad (13)$$

となり、これを式(11)に代入すると、

$$F_x = \int ((P_j - P_\infty)(Y(t+1) - Y(t)) + \tau_{yx}(X(t+1) - X(t))) dt \quad (14)$$

となる。ここでの、 x, y は物体表面の座標であるので、通過点座標 $X(t), Y(t)$ から制御点座標 $x(i), y(i)$ に変換する。そこで、B-spline 制御の式(3)(4)を組み込むと

$$F_x = \int_{t=0}^3 \left((P_t - P_\infty) \left(\sum_{i=0}^3 y(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 y(i)B_{i,4}(t) \right) + \tau_{yxt} \left(\sum_{i=0}^3 x(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 x(i)B_{i,4}(t) \right) \right) dt \quad (15)$$

となり、空気抵抗力を制御点の設計変数により表すことができる。

3.3 制約条件

制約条件は、設計上の安定性・有用性・機能性を保持するために、状態変数を用いる。一般的に制約条件は不等式・等式で表現され、その範囲内で状態変数を変化させ、目的関数を最小・最大にする設計変数を導く。本論文における適用例では、形状の有用性・安全性から設計変数の移動範囲と揚力などを用いる。

導風板形状の制約は、運転席と荷台によって始点と終点が定義される。すなわち、10個の設計変数の内の、4つの端点 $x(0), x(4), y(0), y(4)$ を固定するために、式(16)~(18)の等式制約を設ける。

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (16)$$

$$x(4) = 1600 \quad (17)$$

$$y(4) = 640 \quad (18)$$

中間にある $(x(1), y(1)), (x(2), y(2)), (x(3), y(3))$ の制御点は、曲線が交差しないように、各節点の移動制限として $(x_{lim1}, y_{lim1}), (x_{lim2}, y_{lim2})$ を設定する。すなわち、各節点の移動範囲として、式(19)~(21)のように、それぞれの大小関係を定義する。これを図示したものが Fig.10 で、設計移動領域を黄色の長方形内のみとして、始点・終点・隣接点の位置を越えないものとする。

$$x(0) \leq x(1) \leq x_{lim1}, y(0) \leq y(1) \leq y_{lim1} \quad (19)$$

$$x_{lim1} \leq x(2) \leq x_{lim2}, y_{lim1} \leq y(2) \leq y_{lim2} \quad (20)$$

$$x_{lim2} \leq x(3) \leq x(4), y_{lim2} \leq y(3) \leq y(4) \quad (21)$$

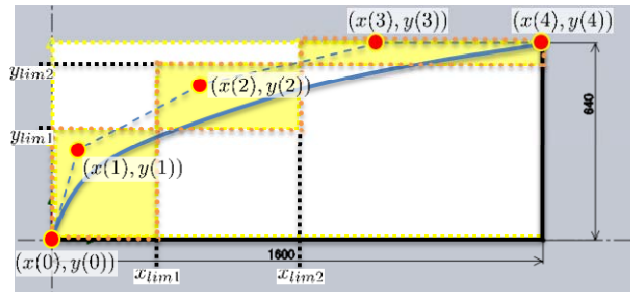


Fig.10 Design Area

次に、トラックの走行安定性には、導風板にかかる揚力が関係するため、揚力値の制約についても考える。揚力は物体表面にかかる力を垂直方向と水平方向に分解した場合の垂直方向に影響する抗力である。ちなみに、空気抵抗力は水平方向に影響する抗力なので、揚力を求める方程式は空気抵抗力式(15)を基に考えれば導ける。つまり、Fig.11 のように、圧力抵抗に対しては x 座標で求め、摩擦抵抗には y 座標を用いて計算するので式(22)のように表せる。

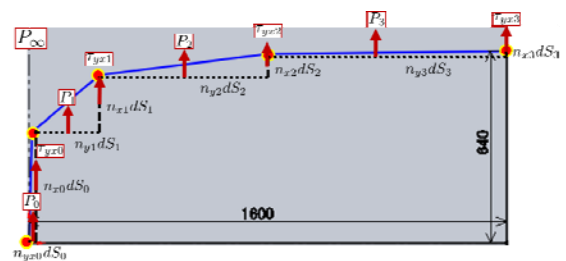


Fig.11 Stress Integration between Each Node(Lift)

$$F_y = \int_{t=0}^3 \left((P_t - P_\infty) \left(\sum_{i=0}^3 x(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 x(i)B_{i,4}(t) \right) + \tau_{yxt} \left(\sum_{i=0}^3 y(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 y(i)B_{i,4}(t) \right) \right) dt \quad (22)$$

なお、本論文では、最適化手法として、線形計画法における2段階シンプレックス法を用いる⁷。

4. 形状最適デザイン適用例

4.1 制約条件が設計範囲のみの場合

初期モデルの設計データはTable 1, Fig.12のように設定した。

Table 1 Initial Design Variable.

| 制御点 i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|-----|-----|-----|------|
| x(i) | 0 | 0 | 0 | 800 | 1600 |
| y(i) | 0 | 320 | 640 | 640 | 640 |

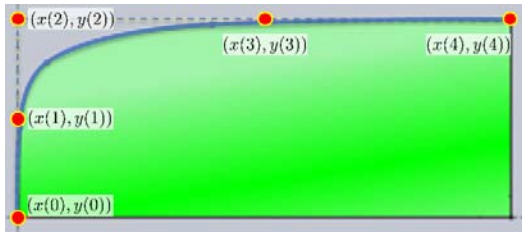


Fig.12 Initial Shape of Air Deflector

Table 2 Pressure and Shearing Stress.

| | | | | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|
| 通過点間 j | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(j)$ | 101552 | 101330 | 101229 | 101277 |
| $\tau(j)$ | 0.48 | 1.61 | 1.51 | 1.07 |

この時の設計変数間の圧力とせん断応力をTable 2に示す. 式(15)に, 求めた表面圧力 τ_{yxt} , $P_t(t=0,1,2,3)$ および大気圧 $P_\infty = 101325$, B-spline基底関数 $B_{i,4}(t)$ を代入して, 目的関数値 F_x と設計変数 $x(i), y(i)$ のみで記述する.

制約条件は, 式(23), (24)のように, 点の移動制限である $(x_{lim1}, y_{lim1}), (x_{lim2}, y_{lim2})$ を設定する. また, 以前に式(25), (26)に示した始点・終点の制約も併せて定義する.

subject to

$$x_{lim1} = 500, y_{lim1} = 200 \quad (23)$$

$$x_{lim2} = 1000, y_{lim2} = 400 \quad (24)$$

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (25)$$

$$x(4) = 1600, y(4) = 640 \quad (26)$$

初期モデルの導風板および荷台にかかる空気抵抗力と揚力を求めたものが, Table 3, Fig.13である.

Table 3 Air Drag and Lift of Initial Shape.

| | | |
|-------|-------|-------|
| | 導風板 | 荷台 |
| F_x | 35.18 | 1.48 |
| F_y | 39.06 | 13.31 |

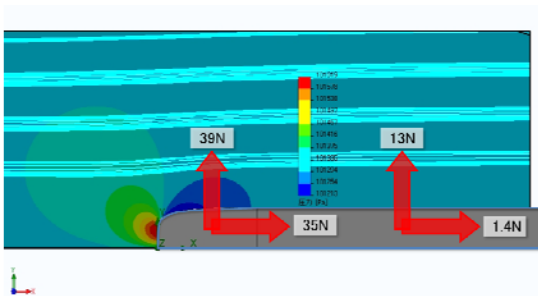


Fig.13 Air Drag and Lift of Initial Shape

最適化後における設計変数の値をTable 4に, 形状をFig.14に示す. また, モデル全体に与える抵抗力 $F_x, F_y(N)$ をTable 5とFig.15に示す. 最適化後の導風板上の空気抵抗力は最適デザイン前より66%減少し, 揚力は240%減少しダウンフォースが生まれている. 荷台上の空気抵抗力はあまり変化しないが, 揚力が80%増加している.

Table 4 Optimized Design Variable.

| | | | | | |
|---------|---|-----|------|------|------|
| 制御点 i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x(i)$ | 0 | 500 | 1000 | 1000 | 1600 |
| $y(i)$ | 0 | 0 | 200 | 400 | 640 |

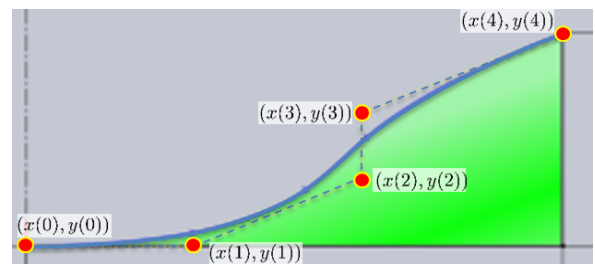


Fig.14 Optimized Shape in Constraint 4.1

Table 5 Air Drag and Lift of Optimized Shape.

| | | |
|-------|--------|-------|
| | 導風板 | 荷台 |
| F_x | 12.09 | 1.27 |
| F_y | -54.72 | 65.59 |

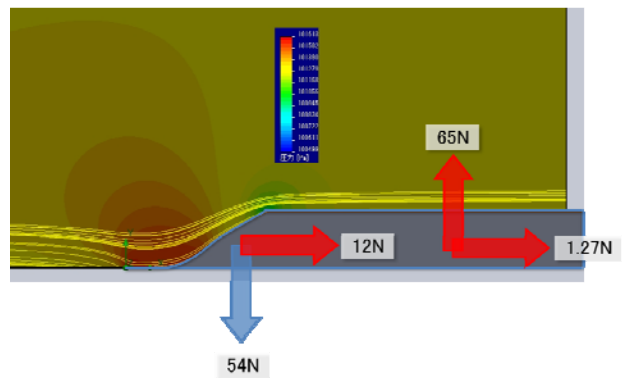


Fig.15 Air Drag and Lift of Optimized Shape in Constraint 4.1

4.2 制約条件に揚力を追加した場合

導風板上の空気抵抗力と揚力は低減したが, 荷台上での抵抗力は増加していた. そこで, 次に, 荷台への影響も考慮するため, 初期導風板上の初期圧力による揚力を0以下に設定する. 制約条件に揚力を追加するため, 式(27)の揚力を求める式を用いて, 制約条件を追加する.

$$F_y = \int_{t=0}^3 \left((P_t - P_\infty) \left(\sum_{i=0}^3 x(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 x(i)B_{i,4}(t) \right) + \tau_{yxt} \left(\sum_{i=0}^3 y(i+1)B_{i+1,4}(t) - \sum_{i=0}^3 y(i)B_{i,4}(t) \right) \right) dt \quad (27)$$

4.1節の制約条件に追加する条件は、式(27)を用いて以下の様に定義する。

$$F_y \leq 0 \quad (37)$$

目的関数および初期設計変数値については先の例と同じものを用い最適設計を行うと、最適設計後の形状が、Table 6, Fig.16のように求まる。また、また、モデル全体に与える抵抗力は、Table 7, Fig.17に示す値となる。

4.1節と揚力を比較してみると、導風板上ではダウンフォースが12N減少しているが、荷台部分は7Nの揚力が抑えられている。中心を回転軸とすると、右回りのモーメントが抑えられていることになる。

Table 6 Optimized Design Variables.

| | | | | | |
|-------|---|-----|-----|------|------|
| 制御点 i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x(i) | 0 | 224 | 500 | 1000 | 1600 |
| y(i) | 0 | 0 | 200 | 400 | 640 |

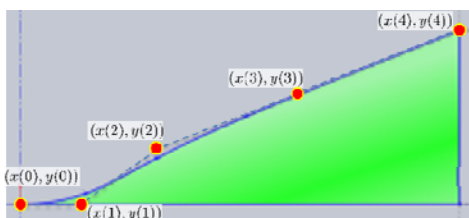


Fig.16 Optimized Shape in Constraint 4.2

Table 7 Air Drag and Lift of Optimized Shape.

| | 導風板 | 荷台 |
|----|--------|-------|
| Fx | 14.65 | 1.4 |
| Fy | -42.34 | 58.61 |

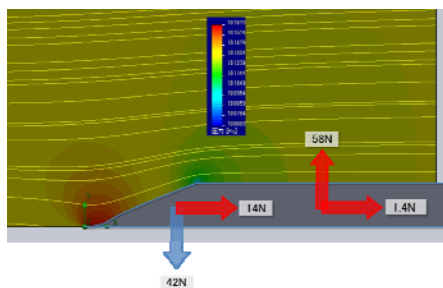


Fig.17 Air Drag and Lift of Optimized Shape in Constraint 4.2

5. まとめ

本研究では、形状定義に B-spline 曲線を用いた形状最適化の定式化を展開し、トラックの導風板を事例として形状デザインの最適設計を行った。

計算格子による形状定義では、数値解析の精度向上や形状を滑らかに表現させるほど、設計変数が増加してしまうという問題点が生じる。この問題を、Isogeometric 解析で用いられている B-spline 曲線を形状定義に利用することで改善し、次のような結果を得た。

形状最適化の設計変数に B-spline 制御を組み込むことによって、4.1節のように少ない設計変数で複雑なトラックの導風板形状を表現できた。また、通過点ではなく制御点での定義により、制約条件や設計変数を等しい値に設定しても、曲線は交わらずに表現することが可能になり、より良い形状に導くことができた。4.2節では導風板上の揚力をゼロリフトに近づけるように制約することで、車体前後の揚力による回転モーメントが抑えることができた。

また、モデル化では導風板およびその後方の荷台のみを解析対象とすることで、必要な抗力値を正しく得ることができた。

以上のように、B-spline 曲線を形状最適化に利用することの有用性を示すことができたと考える。

参考文献

- [1]Hughes, T.J.R., “Isogeometric analysis”, Compu. Mech. Engn, 194, pp.4135-4195, 2005
- [2]Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., “Isogeometric Analysis - Toward Integration of CAD and FEA -”, WILEY, 2009
- [3]宇田川隆博, 川村恭己, 角洋一, “Isogeometric 解析の2次元静的弾性問題への応用”, 日本船舶海洋工学講演会論文集, 第4号, pp.439-442, 2007
- [4]いすゞホームページ, <http://www.isuzu.co.jp/>
- [5] 桜井明, 菅野敬祐, 吉村和美, 高山文雄, “Cによるスプライン関数”, 東京電機大学出版局, 1993
- [6]鈴木和夫, “流体力学と流体抵抗の理論”, 成山堂, 2010
- [7] 大野勝久, 田村隆善, 伊藤崇博, “Excel によるシステム最適化”, コロナ社, 2002

